2018 北京四中【精编】高三第一次模拟考试仿真卷

数　　学（理）（B）

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3．非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．[2018·石家庄质检]已知命题 $p:-1<x<2$，$q:\log_2 x<1$，则 p 是 q 成立的（　　）条件．

A．充分不必要　　B．必要不充分　　C．既不充分有不必要　D．充要

2．[2018·黄山一模]已知复数 $z_1=1+a\mathrm{i}$，$z_2=3+2\mathrm{i}$，$a\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位，若 $z_1\cdot z_2$ 是实数，则 $a=$（　　）

A．$-\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

3．[2018·长春一模]下列函数中既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数是（　　）

A．$f(x)=2^x-2^{-x}$　　B．$f(x)=x^2-1$　　C．$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x|$　　D．$f(x)=x\sin x$

4．[2018·天一大联考]已知变量 x，y 之间满足线性相关关系 $\hat{y}=1.3x-1$，且 x，y 之间的相关数据如下表所示：

x	1	2	3	4
y	0.1	m	3.1	4

则 $m=$（　　）

A．0.8　　B．1.8　　C．0.6　　D．1.6

5．[2018·乌鲁木齐一模]若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0\\x-y\geqslant 0\\3x+y-4\leqslant 0\end{cases}$，则 $3x+2y$ 的最大值是（　　）

A．0　　B．2　　C．5　　D．6

6．[2018·常德期末]已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差和首项都不为 0，且 a_1、a_2、a_4 成等比数列，则 $\frac{a_1+a_{14}}{a_3}=$（　　）

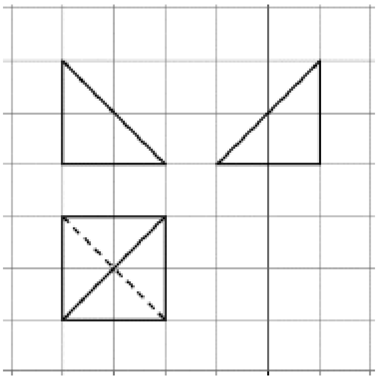
A．2　　B．3　　C．5　　D．7

7．[2018·宁德一模]我国古代数学名著《孙子算经》中有如下问题：“今有三女，长女五日一归，中女四日一归，

少女三日一归．问：三女何日相会？”意思是：“一家出嫁的三个女儿中，大女儿每五天回一次娘家，二女儿每四天回一次娘家，小女儿每三天回一次娘家．三个女儿从娘家同一天走后，至少再隔多少天三人再次相会？”假如回娘家当天均回夫家，若当地风俗正月初二都要回娘家，则从正月初三算起的一百天内，有女儿回娘家的天数有（　　）

A．58　　B．59　　C．60　　D．61

8．[2018 • 福州质检]如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为（　　）



A．$2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$　　B．$2+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}$　　C．$2+6\sqrt{3}$　　D．$8+4\sqrt{2}$

9．[2018 • 衡水中学]已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x, x\in\left[-\pi,0\right]\\ \sqrt{1-x^2}, x\in\left(0,1\right]\end{cases}$，则 $\int_{-\pi}^{1} f\left(x\right)dx=$（　　）

A．$2+\pi$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$-2+\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}-2$

10．[2018 • 西城期末]已知 A，B 是函数 $y=2^x$ 的图象上的相异两点，若点 A，B 到直线 $y=\frac{1}{2}$ 的距离相等，则点 A，B 的横坐标之和的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-1\right)$　　B．$\left(-\infty,-2\right)$　　C．$\left(-1,+\infty\right)$　　D．$\left(-2,+\infty\right)$

11．[2018 • 郑州一中]在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AC=1$，$DB=DC=2$，$AD=BC=\sqrt{3}$，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为（　　）

A．π　　B．4π　　C．7π　　D．9π

12．[2018 • 西北师大附中]在等腰梯形 $ABCD$ 中 $AB//CD$，且 $\left|AB\right|=2$，$\left|AD\right|=1$，$\left|CD\right|=2x$，其中 $x\in\left(0,1\right)$，以 A，B 为焦点且过点 D 的双曲线的离心率为 e_1，以 C，D 为焦点且过点 A 的椭圆的离心率为 e_2，若对任意 $x\in\left(0,1\right)$ 都有不等式 $t<\frac{\left(e_1+e_2\right)^2}{8}$ 恒成立，则 t 的最大值为（　　）

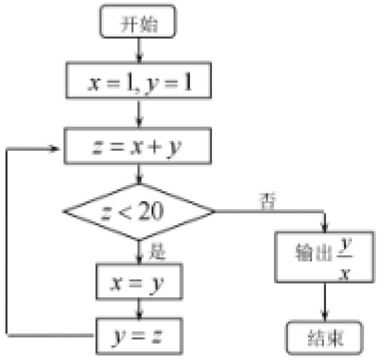
A．$\frac{7}{4}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{5}{4}$

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13．[2018 • 丹东一检]$\triangle ABC$ 内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $2c\cos B=2a+b$，则 $\angle C=$_________．

14．[2018 • 郑州一中]阅读如图的程序框图，运行相应的程序，输出的结果为_________．



15．[2018·乌鲁木齐一模]在 $\triangle ABC$ 中，$CA=2CB=2$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-1$，$O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overrightarrow{CO}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，则 $x+y=$______________.

16．[2018·长春一模]已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2x)$，且当 $x\in[1,2)$ 时 $f(x)=\ln x$．若在区间 $[1,4)$ 内，函数 $g(x)=f(x)-2ax$ 有两个不同零点，则 a 的范围为__________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分，每个试题 12 分．

17．[2018·渭南一模]已知在 $\triangle ABC$ 中，$2B=A+C$，且 $c=2a$．

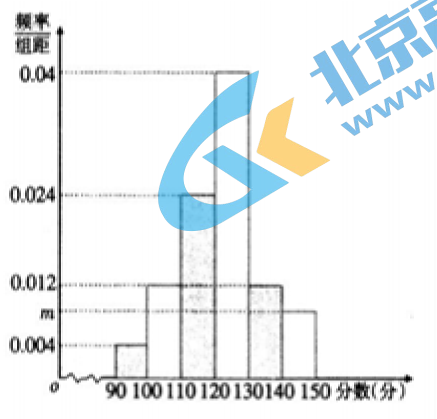
（1）求角 A，B，C 的大小；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=2^n|\cos nC|$，前 n 项和为 S_n，若 $S_n=20$，求 n 的值．

18．[2018·石家庄一检]某学校为了解高三复习效果，从高三第一学期期中考试成绩中随机抽取 50 名考生的数学成绩，分成 6 组制成频率分布直方图如图所示：

（1）求 m 的值；并且计算这 50 名同学数学成绩的样本平均数 $\overline{x}$；

（2）该学校为制定下阶段的复习计划，从成绩在 $[130,150]$ 的同学中选出 3 位作为代表进行座谈，记成绩在 $[140,150]$ 的同学人数位 ξ，写出 ξ 的分布列，并求出期望．

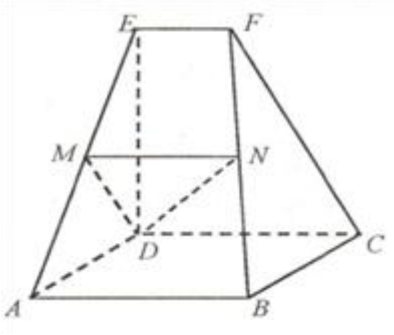


19．[2018·亳州质检]如图，多面体 $ABCDEF$ 中，$ABCD$ 是正方形，$CDEF$

是梯形，$EF//CD$，$EF=\frac{1}{2}CD$，$DE\perp$平面$ABCD$且$DE=DA$，M、N分别为棱AE、BF的中点．

（1）求证：平面$DMN\perp$平面$ABFE$；

（2）求平面DMN和平面BCF所成锐二面角的余弦值．



20．[2018 • 闽侯四中]已知椭圆C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为$4\sqrt{2}$，抛物线$C_2$：$x^2=2py\ (p>0)$的焦点$F$是椭圆$C_1$的顶点．

（1）求C_1与C_2的标准方程；

（2）C_1上不同于F的两点P，Q满足$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，且直线$PQ$与$C_2$相切，求$\triangle FPQ$的面积．

21．[2018 • 淮南一模]已知函数$f\left(x\right)=x^2-\ln x$．

（1）求函数$f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

（2）在函数$f\left(x\right)=x^2-\ln x$的图象上是否存在两点，使以这两点为切点的切线互相垂直，且切点的横坐标都在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上．若存在，求出这两点的坐标，若不存在，请说明理由．

（二）选考题（共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做第一题计分）

22．[2018 • 承德期末]在平面直角坐标系xOy中，直线l_1的参数方程为$\begin{cases}x=t-\sqrt{3}\\y=kt\end{cases}$（$t$为参数），直线$l_2$的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}-m\\y=\frac{m}{3k}\end{cases}$（$m$为参数），设直线$l_1$与$l_2$的交点为$P$，当$k$变化时点$P$的轨迹为曲线$C_1$．

（1）求出曲线C_1的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线C_2的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}$，点$Q$

为曲线C_1的动点，求点Q到直线C_2的距离的最小值.

23．[2018 • 南阳一中]已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}\left|x-a\right|\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）当$a=2$时，解不等式$\left|x-\frac{1}{3}\right|+f\left(x\right)\geqslant 1$；

（2）设不等式$\left|x-\frac{1}{3}\right|+f\left(x\right)\leqslant x$的解集为$M$，若$\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\subseteq M$，求实数$a$的取值范围.

数学试题答案

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】B

【解析】$q:\log_2 x<1 \Rightarrow 0<x<2$，因为$(0,2)\subset(-1,2)$，所以 p 是 q 成立的必要不充分条件，选 B.

2.【答案】A

【解析】复数 $z_1=1+ai$，$z_2=3+2i$，

$z_1\cdot z_2=(1+ai)(3+2i)=3+2i+3ai-2a=(3-2a)+(2+3a)i$.

若 $z_1\cdot z_2$ 是实数，则 $2+3a=0$，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$. 故选 A.

3.【答案】B

【解析】A 是奇函数，故不满足条件；B 是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递增，故满足条件；C 是偶函数，在$(0,+\infty)$上单调递减，不满足条件；D 是偶函数但是在$(0,+\infty)$上不单调. 故答案为 B.

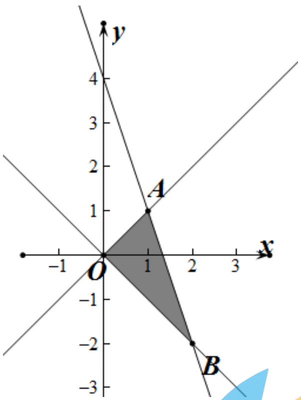
4.【答案】B

【解析】由题意，$\bar{x}=2.5$，代入线性回归方程为 $\hat{y}=1.3x-1$，可得 $\bar{y}=2.25$，

$\therefore 0.1+m+3.1+4=4\times 2.25$，$\therefore m=1.8$，故选 B.

5.【答案】C

【解析】绘制不等式组表示的平面区域如图所示，结合目标函数的几何意义可知：目标函数在点 $A(1,1)$ 处取得最大值，$z_{\max}=3x+2y=3\times1+2\times1=5$. 本题选 C.



6.【答案】C

【解析】由 a_1、a_2、a_4 成等比数列得 $a_2^2=a_1a_4$，$\therefore(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$，$\therefore d^2=a_1d$，$\because d\neq0$，$\therefore d=a_1$，

$\dfrac{a_1+a_{14}}{a_3}=\dfrac{a_1+a_1+13d}{a_1+2d}=\dfrac{15a_1}{3a_1}=5$，选 C.

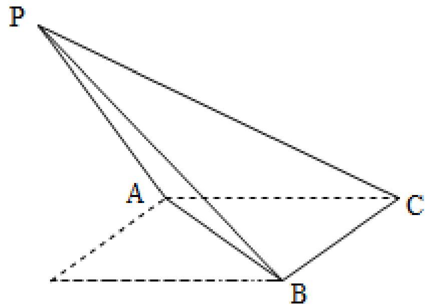
7.【答案】C

【解析】小女儿、二女儿和大女儿回娘家的天数分别是 33，25，20，小女儿和二女儿、小女儿和大女儿、二女儿和大女儿回娘家的天数分别是 8，6，5，三个女儿同时回娘家的天数是 1，所以有女儿在娘家的天数是：33+25+20-(8+6+5)

+1=60．故选 C．

8．【答案】A

【解析】由三视图可知，该多面体是如图所示的三棱锥 $P-ABC$，其中三棱锥的高为 2，底面为等腰直角三角形，直角边长为 2，表面积为 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=2+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$，故选 A．



9．【答案】D

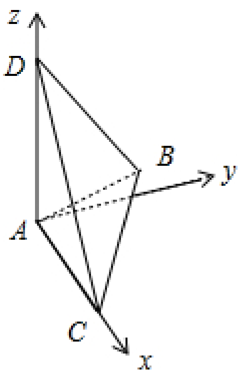
【解析】$\int_{-\pi}^{1} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}\sin xdx+\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$，$\int_{-\pi}^{0}\sin xdx=-\cos x|_{-\pi}^{0}=-2$，$\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ 的几何意义是以原点为圆心，半径为 1 的圆的面积的 $\frac{1}{4}$，故 $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi$，$\therefore\int_{-\pi}^{1} f(x)dx=\frac{\pi}{4}-2$，故选 D．

10．【答案】B

【解析】设 $A\left(a,2^a\right)$，$B\left(b,2^b\right)$，则 $\left|2^a-\frac{1}{2}\right|=\left|2^b-\frac{1}{2}\right|$，因为 $a\neq b$，所以 $2^a+2^b=1$，由基本不等式有 $2^a+2^b>2\times\sqrt{2^{a+b}}$，故 $2\times\sqrt{2^{a+b}}<1$，所以 $a+b<-2$，选 B．

11．【答案】C

【解析】该三棱锥的图象如图所示，由 $AB=AC=1$，$DB=DC=2$，$AD=BC=\sqrt{3}$，可得 $AB\perp AD$，$AC\perp AD$，易证 $AD\perp$ 平面 ABC．



在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=-\frac{1}{2}$，即 $\angle BAC=120^\circ$，

以 AC 为 x 轴，以 AD 为 z 轴建立如图所示的坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C(1,0,0)$，$D\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，设三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心为 $M(x,y,z)$，

则 $x^2+y^2+z^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2=(x-1)^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\left(z-\sqrt{3}\right)^2$，

解得：$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$z=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴外接球的半径为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

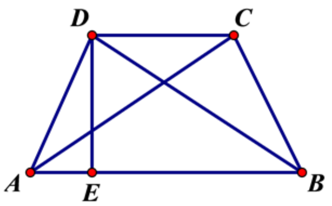
∴外接球的表面积为 $S=4\pi r^2=7\pi$，故选 C.

12.【答案】C

【解析】如图，过 D 作 $DE\perp AB$ 交 AB 于 E，则 $AE=1-x$，$EB=1+x$，所以 $DE=\sqrt{2x-x^2}$，$DB=\sqrt{1+4x}$，

所以 $e_1=\frac{2}{\sqrt{1+4x}-1}$，$e_2=\frac{2x}{\sqrt{1+4x}+1}=\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}$，所以 $e_1+e_2=\frac{2}{\sqrt{1+4x}-1}+\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}$，令 $t=\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}$，

则 $e_1+e_2=t+\frac{1}{t}$，因 $t\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$，故 $e_1+e_2>\sqrt{5}$，所以 $t\leqslant\frac{5}{8}$，选 C.



第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13.【答案】$120°$

【解析】∵ $2c\cos B=2a+b$，∴ $2c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2a+b$，即 $a^2+b^2-c^2=-ab$，

∴ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，∴ $C=120°$.

14.【答案】$\frac{13}{8}$

【解析】由题设中提供的算法流程图中的算法程序可知：当 $x=1$，$y=1$ 时，$z=x+y=2<20$，$x=1$，$y=2$，运算程序依次继续：$z=x+y=3<20$，$x=2$，$y=3$；$z=x+y=5<20$，$x=3$，$y=5$；$z=x+y=8<20$，$x=5$，$y=8$；$z=x+y=13<20$，$x=8$，$y=13$；$z=x+y=21>20$，$\frac{y}{x}=\frac{13}{8}$ 运算程序结束，输出 $\frac{13}{8}$，应填答案 $\frac{13}{8}$.

15.【答案】$\frac{13}{6}$

【解析】由题意可得：$\angle CAB=120°$，$CA=2$，$CB=1$，则：

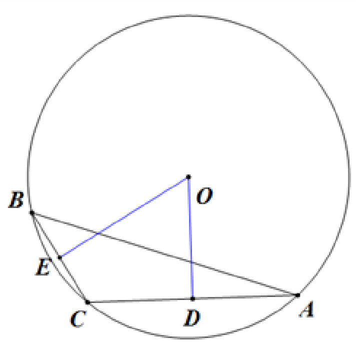
$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=x\overrightarrow{CA}^2+y\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=4x-y$，

$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CB}=x\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CB}^2=-x+y$，

如图所示，作 $OE\perp BC=E$，$OD\perp AC=D$，

则$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2=2$，$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2=\frac{1}{2}$，

综上有：$\begin{cases}4x-y=2\\-x+y=\frac{1}{2}\end{cases}$，求解方程组可得：$\begin{cases}x=\frac{5}{6}\\y=\frac{4}{3}\end{cases}$，故$x+y=\frac{13}{6}$．

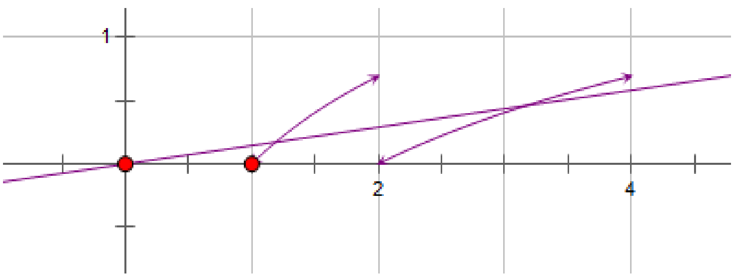


16．【答案】$\left[0,\frac{\ln 2}{8}\right)$

【解析】$\because f\left(x\right)=f\left(2x\right)$，$\therefore f\left(x\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)$，当$x\in\left[2,4\right)$时，$\frac{x}{2}\in\left[1,2\right)$；

$f\left(x\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)=\ln\frac{x}{2}=\ln x-\ln 2$，故函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x, x\in\left[1,2\right)\\\ln x-\ln 2, x\in\left[2,4\right)\end{cases}$，

作函数$f\left(x\right)$与$y=2ax$的图象如下，



过点$\left(4,\ln 2\right)$时，$2a=\frac{\ln 2}{4}$，$\therefore a=\frac{\ln 2}{8}$，$y=\ln x-\ln 2$，$y'=\frac{1}{x}$；故$\frac{\ln x-\ln 2}{x}=\frac{1}{x}$，故$x=2\mathrm{e}>4$，故实数$a$的取值范围是$\left[0,\frac{\ln 2}{8}\right)$．

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分，每个试题 12 分．

17．【答案】（1）$A=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{2}$；（2）$n=4$或$n=5$．

【解析】（1）由已知$2B=A+C$，又$A+B+C=\pi$，所以$B=\frac{\pi}{3}$．又由$c=2a$，

所以$b^2=a^2+4a^2-2a\cdot a\cos\frac{\pi}{3}=3a^2$，所以$c^2=a^2+b^2$，

所以$\triangle ABC$为直角三角形，$C=\dfrac{\pi}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$．

（2）$a_n=2^n\left|\cos nC\right|=2^n\left|\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|=\begin{cases}0,n\text{为奇数}\\2^n,n\text{为偶数}\end{cases}$．

所以$S_n=S_{2k+1}=S_{2k}=0+2^2+0+2^4+\cdots+0+2^{2k}=\dfrac{4\left(1-2^{2k}\right)}{1-4}=\dfrac{2^{2k+2}-4}{3}$，$k\in\mathbf{N}^*$，

由$S_n=\dfrac{2^{2k+2}-4}{3}=20$，得$2^{2k+2}=64$，所以$2k+2=6$，所以$k=2$，所以$n=4$或$n=5$．

18.【答案】（1）$m=0.008$，$\bar{x}=121.8$；（2）见解析.

【解析】（1）由题$\left(0.004+0.012+0.024+0.04+0.012+m\right)\times 10=1$，解得$m=0.008$，

$\bar{x}=95\times0.004\times10+105\times0.012\times10+115\times0.024\times10+125\times0.04\times10+$

$135\times0.012\times10+145\times0.008\times10=121.8$．

（2）成绩在$\left[130,140\right)$的同学人数为6，成绩在$\left[140,150\right)$人数为4，

$P\left(\xi=0\right)=\dfrac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$，$P\left(\xi=1\right)=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$，

$P\left(\xi=2\right)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，$P\left(\xi=3\right)=\dfrac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$；

所以ξ的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

$E\left(\xi\right)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$．

19.【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

【解析】（1）$\because EF//CD$，$ABCD$是正方形，

$\therefore EF//AB$，$\because M$、N分别为棱AE、BF的中点，$\therefore MN//AB$，

$\because DE\perp$平面$ABCD$，$\therefore DE\perp AB$，$\because AB\perp AD$，$AD\cap DE=D$，

$\therefore AB\perp$平面ADE，$\therefore AB\perp AE$，从而$MN\perp AE$，

$\because DE=DA$，M是AE中点，$\therefore DM\perp AE$，

$\because MN\cap DM=M$，$\therefore AE\perp$平面DMN，

又$AE\subset$平面$ABFE$，$\therefore$平面$DMN\perp$平面$ABFE$．

（2）由已知，DA，DC，DE两两垂直，如图，建立空间直角坐标系$D-xyz$，

设$AD=2$，则$A\left(2,0,0\right)$，$E\left(0,0,2\right)$，$B\left(2,2,0\right)$，$C\left(0,2,0\right)$，$F\left(0,1,2\right)$，

$\therefore \overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CF}=(0,-1,2)$，设平面 BCF 的一个法向量为 $\vec{n}(x,y,z)$，

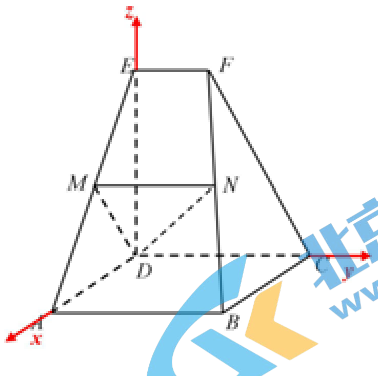
由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x=0\\ -y+2z=0\end{cases}$，令 $y=2$，则 $\vec{n}=(0,2,1)$，

由（1）可知 $AE\perp$ 平面 DMN，

$\therefore$ 平面 DMN 的一个法向量为 $\overrightarrow{AE}=(-2,0,2)$，

设平面 DMN 和平面 BCF 所成锐二面角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos<\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}>\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以，平面 DMN 和平面 BCF 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.



20.【答案】（1）$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$x^2=8y$；（2）$\dfrac{18\sqrt{3}}{5}$.

【解析】（1）设椭圆 C_1 的焦距为 $2c$，依题意有 $2c=4\sqrt{2}$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

解得 $a=2\sqrt{3}$，$b=2$，故椭圆 C_1 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

又抛物线 C_2：$x^2=2py(p>0)$ 开口向上，故 F 是椭圆 C_1 的上顶点，$\therefore F(0,2)$，$\therefore p=4$，故抛物线 C_2 的标准方程为 $x^2=8y$.

（2）显然，直线 PQ 的斜率存在．设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{FP}=(x_1,y_1-2)$，$\overrightarrow{FQ}=(x_2,y_2-2)$，

$\therefore \overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=x_1x_2+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=0$，

即 $(1+k^2)x_1x_2+(km-2k)(x_1+x_2)+m^2-4m+4=0\ (*)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，消去 y 整理得，$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-12=0(**)$.

依题意 x_1，x_2，是方程 $(**)$ 的两根，$\Delta=144k^2-12m^2+48>0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{3m^2-12}{3k^2+1}$，

将 x_1+x_2 和 $x_1\cdot x_2$ 代入 $(*)$ 得 $m^2-m-2=0$，

解得 $m=-1$，（$m=2$ 不合题意，应舍去）

联立 $\begin{cases}y=kx-1\\x^2=8y\end{cases}$，消去 y 整理得，$x^2-8kx+8=0$，

令 $\Delta'=64k^2-32=0$，解得 $k^2=\dfrac{1}{2}$.

经检验，$k^2=\dfrac{1}{2}$，$m=-1$ 符合要求.

此时，$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{72}{25}-4\left(-\dfrac{18}{5}\right)}=\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$，

$\therefore S_{\triangle FPQ}=\dfrac{1}{2}\times3\times|x_1-x_2|=\dfrac{18\sqrt{3}}{5}$.

21.【答案】（1）$y=x$；（2）存在两点为 $\left(\dfrac{1}{2},\ln2+\dfrac{1}{4}\right)$，$(1,1)$.

【解析】（1）$\because f(1)=1$，又 $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$，$\therefore f'(1)=2-1=1$，

故所求切线方程为 $y-1=1\times(x-1)$ 即 $y=x$.

（2）设所求两点为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，x_1，$x_2\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，不妨设 $x_1<x_2$，

$\because f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$，

由题意：$\left(2x_1-\dfrac{1}{x_1}\right)\cdot\left(2x_2-\dfrac{1}{x_2}\right)=-1$，

$\because f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，

$\therefore -1\leqslant2x_1-\dfrac{1}{x_1}\leqslant1$，$-1\leqslant2x_2-\dfrac{1}{x_2}\leqslant1$，

又 $x_1<x_2$，$\therefore f'(x_1)<f'(x_2)$，$\therefore \begin{cases}2x_1-\dfrac{1}{x_1}=-1\\2x^2-\dfrac{1}{x_2}=1\end{cases}$，

解得：$x_1=\dfrac{1}{2}$，（$x_1=-1$ 舍），$x_2=1$，（$x_2=-\dfrac{1}{2}$ 舍）

所以，存在两点为 $\left(\dfrac{1}{2},\ln2+\dfrac{1}{4}\right)$，$(1,1)$ 即为所求.

（二）选考题（共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做第一题计分）

22.【答案】（1）C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1\left(y\neq 0\right)$；（2）$d$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$．

【解析】（1）将 l_1，l_2 的参数方程转化为普通方程；

$l_1: y=k\left(x+\sqrt{3}\right)$，①　　　　$l_2: y=\frac{1}{3k}\left(\sqrt{3}-x\right)$，②

①×②消 k 可得：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，

因为 $k\neq 0$，所以 $y\neq 0$，所以 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1\left(y\neq 0\right)$．

（2）直线 C_2 的直角坐标方程为：$x+y-8=0$．

由（1）知曲线 C_1 与直线 C_2 无公共点，

由于 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos a\\ y=\sin a\end{cases}$（$a$ 为参数，$a\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$），

所以曲线 C_1 上的点 $Q\left(\sqrt{3}\cos a,\sin a\right)$ 到直线 $x+y-8=0$ 的距离为：

$$d=\frac{\left|\sqrt{3}\cos a+\sin a-8\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|2\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)-8\right|}{\sqrt{2}},$$

所以当 $\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 时，d 的最小值为 $3\sqrt{2}$．

23.【答案】（1）$\{x\,|\,x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant 1\}$；（2）$\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$．

【解析】（1）当 $a=2$ 时，原不等式可化为 $|3x-1|+|x-2|\geqslant 3$，

①当 $x\leqslant\frac{1}{3}$ 时，原不等式可化为 $-3x+1+2-x\geqslant 3$，解得 $x\leqslant 0$，所以 $x\leqslant 0$；

②当 $\frac{1}{3}<x<2$ 时，原不等式可化为 $3x-1+2-x\geqslant 3$，解得 $x\geqslant 1$，所以 $1\leqslant x<2$．

③当 $x\geqslant 2$ 时，原不等式可化为 $3x-1-2+x\geqslant 3$，解得 $x\geqslant 1$，所以 $x\geqslant 2$，

综上所述，当 $a=2$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant 1\}$．

（2）不等式 $\left|x-\frac{1}{3}\right|+f\left(x\right)\leqslant x$ 可化为 $|3x-1|+|x-a|\leqslant 3x$，

依题意不等式 $|3x-1|+|x-a|\leqslant 3x$ 在 $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ 恒成立，

所以 $3x-1+|x-a|\leqslant 3x$，即 $|x-a|\leqslant 1$，

即 $a-1\leqslant x\leqslant a+1$，所以$\begin{cases}a-1\leqslant\dfrac{1}{3},\\a+1\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{4}{3}$，故所求实数 a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right]$.