北京市东城区 2015－2016 学年上学期高一年级期末考试
数学试卷

第一部分（选择题　共 24 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项并填在答题卡中．

1．已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\cup B=$（　　）．

A．$\{1,2,3\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{2\}$　　D．$\{0,1,3\}$

2．若角 α 的终边经过点 $P(1,-2)$，则 $\tan\alpha$ 的值为（　　）．

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．-2　　D．$-\dfrac{1}{2}$

3．正弦函数 $f(x)=\sin x$ 图象的一条对称轴是（　　）．

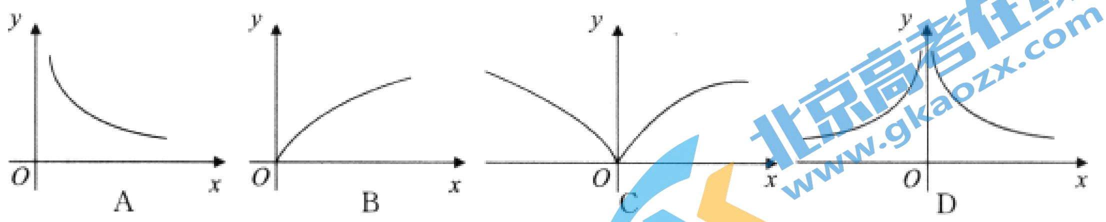
A．$x=0$　　B．$x=\dfrac{\pi}{4}$　　C．$x=\dfrac{\pi}{2}$　　D．$x=\pi$

4．下列函数中，既是偶函数又存在零点的是（　　）．

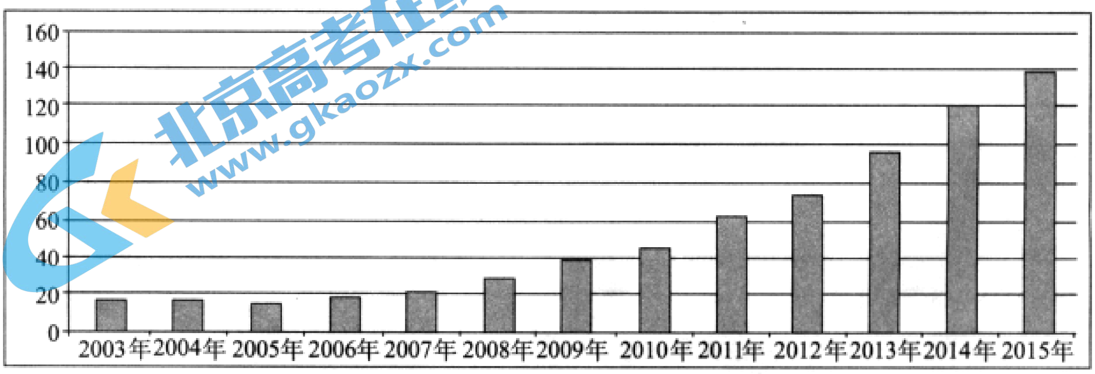
A．$f(x)=\sin x$　　B．$f(x)=x^2+1$

C．$f(x)=\ln x$　　D．$f(x)=\cos x$

5．函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 的大致图象是（　　）．



6．2003年至2015年北京市电影放映场次（单位：万次）的情况如图所示，下列函数模型中，最不适合近似描述这13年间电影放映场次逐年变化规律的是（　　）．



A．$f(x)=ax^2+bx+c$　　B．$f(x)=ae^x+b$

C．$f(x)=e^{ax+b}$　　D．$f(x)=a\ln x+b$

7．若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称，则（　　）．

A. $\alpha+\beta=\pi+k\pi(k\in\mathbf{Z})$　　　　B. $\alpha+\beta=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$　　　　D. $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\in(-\infty,0)\\ \ln(x+1),x\in[0,+\infty)\end{cases}$，$g(x)=x^2-4x-4$，若存在实数 a，使得 $f(a)+g(x)=0$，则 x 的取值范围为（　　）.

A. $[-1,5]$　　　　B. $(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　　　D. $(-\infty,5]$

第二部分（非选择题　共 76 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分．请把答案填在相应题目横线上．

9. 函数 $f(x)=\log_2(2x+1)$ 的定义域是__________.

10. $\sin80°\cos20°-\cos80°\sin20°$ 的值为__________.

11. 已知函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，则 $f(x)$ 的最大值为__________.

12. 若 $a=\log_4 3$，则 $4^a-4^{-a}=$__________.

13. 已知函数 $f(x)=a^x+b(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的定义域和值域都是 $[-1,0]$，则 $a+b=$__________.

14. 设 S，T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集，如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足：

（1）$T=\{f(x)\mid x\in S\}$；

（2）对任意 x_1，$x_2\in S$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$．

那么称这两个集合"保序同构"，现给出以下 4 对集合：

① $S=\{0,1,2\}$，$T=\{2,3\}$；

② $S=\mathbf{N}$，$T=\mathbf{N}^*$；

③ $S=\{x\mid-1<x<3\}$，$T=\{x\mid-8<x<10\}$；

④ $S=\{x\mid0<x<1\}$，$T=\mathbf{R}$．

其中，"保序同构"的集合对的序号是________（写出所有"保序同构"的集合对的序号）.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 52 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．（本题满分 8 分）

已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x\mid x^2-ax=0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 a 的值.

16．（本题满分 9 分）

设θ为第二象限角，若$\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$．求

（Ⅰ）$\tan\theta$的值；

（Ⅱ）$\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)+\sin(\pi+2\theta)$的值．

17.（本题满分 9 分）

已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

（Ⅰ）证明：$f(x)$ 是奇函数；

（Ⅱ）用函数单调性的定义证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

18．（本题满分 9 分）

某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

（Ⅰ）请将上表数据补充完整，并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）将 $y=f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\theta(\theta>0)$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 的图象．若 $y=g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$，求 θ 的最小值．

19． （本题满分 9 分）

某食品的保鲜时间y（单位：小时）与储存温度x（单位：℃）满足函数关系$y=\mathrm{e}^{kx+b}$（e＝2.718…为自然对数的底数，k，b为常数）．若该食品在0℃的保鲜时间为192小时，在22℃的保鲜时间是48小时，求该食品在33℃的保鲜时间．

20. （本题满分 8 分）

若实数 x，y，m 满足 $|x-m|>|y-m|$，则称 x 比 y 远离 m．

（Ⅰ）比较 $\log_2 0.6$ 与 $2^{0.6}$ 哪一个远离 0；

（Ⅱ）已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D=\left\{x \middle| x\neq \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in \mathbf{Z}\right\}$，任取 $x\in D$，$f(x)$ 等于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中远离 0 的那个值，写出函数 $f(x)$ 的解析式以及 $f(x)$ 的三条基本性质（结论不要求证明）.

北京市东城区 2015－2016 学年上学期高一年级期末考试
数学答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	C	D	A	D	B	A

二、填空题

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$\left\{x\mid x>-\frac{1}{2}\right\}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	$\frac{10}{3}$	$-\frac{3}{2}$	②③④

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 52 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. （本题满分 8 分）

解：$\because B=\{x\mid x^2-ax=0\}$

$\therefore B=\{x\mid x=0$ 或 $x=a\}$，

由 $A\cup B=A$，得 $B=\{0\}$ 或 $\{0,1\}$.

当 $B=\{0\}$ 时，方程 $x^2-ax=0$ 有两个相等实数根 0，

$\therefore a=0$.

当 $B=\{0,1\}$ 时，方程 $x^2-ax=0$ 有两个实数根 0，1，

$\therefore a=1$.

16. （本题满分 9 分）

解：（Ⅰ）$\because \tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，

$$\therefore \frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}.$$

解得 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$.

（Ⅱ）$\because \theta$ 为第二象限角，$\tan\theta=-\frac{1}{3}$，

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

$$\therefore \sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)+\sin(\pi+2\theta)=\cos 2\theta-\sin 2\theta=2\cos^2\theta-1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{5}.$$

17.（本题满分 9 分）

证明：（Ⅰ）由已知得，函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$.

设 $x\in D$，则 $-x\in D$， $f(-x)=-x+\dfrac{1}{x}=-f(x)$.

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

（Ⅱ）设 x_1， x_2 是 $(0,+\infty)$ 上的两个任意实数，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2^2-1}{x_2}-\frac{x_1^2-1}{x_1}$$

$$=\frac{x_1(x_2^2-1)-x_2(x_1^2-1)}{x_1x_2}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{x_1x_2}.$$

因为 $0<x_1<x_2$， 所以 $x_1x_2>0$， $x_2-x_1>0$， $x_1x_2+1>0$，

所以 $\dfrac{(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{x_1x_2}>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

18.（本题满分 9 分）

解：（Ⅰ）根据表中已知数据，解得 $A=5$， $\omega=2$， $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，数据补全如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5	0	-5	0

且函数解析式为 $f(x)=5\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $f(x)=5\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$，得 $g(x)=5\sin(2x+2\theta-\dfrac{\pi}{6})$.

因为 $f(x)=\sin x$ 的图象的对称中心为 $(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$.

令 $2x+2\theta-\dfrac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}-\theta(k\in\mathbf{Z})$.

由于函数 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$ 成中心对称，令 $\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}-\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\theta=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

由 $\theta>0$ 可知，当 $k=1$ 时，θ 取得最小值 $\dfrac{\pi}{6}$.

19．（本题满分 9 分）

解：由题意知，$\begin{cases} e^{b}=192 \\ e^{22k+b}=48 \end{cases}$.

$\therefore e^{22k}=\dfrac{48}{192}=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore e^{11k}=\dfrac{1}{2}$.

所以当 $x=33$ 时， $y=e^{33k+b}=(e^{11k})^{3}\cdot e^{b}=\dfrac{1}{8}\times 192=24$.

答：该食品在33℃的保鲜时间为24小时.

20．（本题满分 8 分）

解：（Ⅰ） $|\log_2 0.6-0|=|\log_2 0.6|=\log_2\dfrac{5}{3}$， $|2^{0.6}-0|=|2^{0.6}|=2^{0.6}$.

$\because 0<\log_2\dfrac{5}{3}<1$， $1<2^{0.6}<2$，

$\therefore \log_2\dfrac{5}{3}<2^{0.6}$， $\therefore |\log_2 0.6-0|<|2^{0.6}-0|$，

$\therefore 2^{0.6}$ 比 $\log_2 0.6$ 远离 0 .

（Ⅱ） $f(x)=\begin{cases} \sin x, x\in(k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4})(k\in\mathbf{Z}) \\ \cos x, x\in(k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\pi+\dfrac{5\pi}{4})(k\in\mathbf{Z}) \end{cases}$.

$f(x)$ 的性质：

① $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数；

② $f(x)$ 是周期函数，最小正周期 $T=2\pi$；

③ $f(x)$ 在区间 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$， $\left[2k\pi+\pi,2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)$， $\left[2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},2k\pi+\dfrac{7\pi}{4}\right)$，

$\left(2k\pi+\dfrac{7\pi}{4},2k\pi+2\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 单调递增，

$f(x)$ 在区间 $\left[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$， $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)$， $\left(2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\pi\right]$，

$\left(2k\pi+\dfrac{5\pi}{4},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调递减；

④当 $x=2k\pi$ 或 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时， $f(x)$ 有最大值 1，

当 $x=2k\pi+\pi$ 或 $x=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时， $f(x)$ 有最小值 -1 .

北京市东城区 2015－2016 学年上学期高一年级期末考试
数学试卷部分解析

一、 选择题

1.【答案】B

【解析】∵集合 $A=\{0,1,2\}$， $B=\{2,3\}$， 则集合 $A\cup B=\{0,1,2,3\}$.

故选 B.

2.【答案】C

【解析】∵ $P(1,-2)$，

∴ $x=1$， $y=-2$，

∴ $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=-2$.

故选 C.

3.【答案】 C

【解析】∴ $f(x)=\sin x$ 的对称轴方程有

$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，

当 $k=0$ 时， $x=\dfrac{\pi}{2}$.

故选 C.

4.【答案】D

【解析】∵ $\cos(-x)=\cos x$，

∴ $y=\cos x$ 是偶函数，

令 $\cos x=0$ 得 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

即零点是 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

故选 D.

5.【答案】 A

【解析】∵ $-\dfrac{1}{2}<0$，

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，排除选项 B、C;

又∵ $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， 故排除选项 D.

故选 A.

6.【答案】 D

【解析】根据图象得出单调性的规律，单调递增，速度越来越快，

∵ $f(x)=ax^2+bx+c$，单调递增，速度越来越快，

$f(x)=a\mathrm{e}^x+b$，指数型函数增长很快，

$f(x)=\mathrm{e}^{ax+b}$，指数型函数增长很快，

$f(x)=a\ln x+b$，对数型函数增长越来越慢.

∴A、B、C 都有可能，D 不可能.

故选 D.

7.【答案】B

【解析】先考虑 α 、β 为 $(0,2\pi]$ 内的角时，

若角 α 和角 β 的终边关于 y 轴对称，则

$\beta=\pi-\alpha$，可得 $\alpha+\beta=\pi$；

若 α 、β 有一个不在区间 $(0,2\pi]$ 内时，

根据终边相同角的集合，得

$\beta=\pi-\alpha+2k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$，

整理得：$\alpha+\beta=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

故选 B.

8.【答案】A

【解析】当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f(x)=x^2+2x\in[-1,+\infty)$，

当 $x\in[0,+\infty)$ 时， $f(x)=\ln(x+1)\in[0,+\infty)$，

∴ $f(x)\in[-1,+\infty)$，

∴只要 $g(x)\in(-\infty,1]$ 即可，

∴ $(x-2)^2-8\in(-\infty,1]$，

解得 $b\in[-1,5]$.

故选 A.

二、填空题

9.【答案】 $\left\{x\,|\,x>-\dfrac{1}{2}\right\}$

【解析】函数 $f(x)=\log_2(2x+1)$ 的定义域为 $\{x\,|\,2x+1>0\}$，

解得 $\left\{x\,|\,x>-\dfrac{1}{2}\right\}$.

故答案为：$\left\{x\,|\,x>-\dfrac{1}{2}\right\}$.

10.【答案】 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 $\sin80^\circ\cos20^\circ-\cos80^\circ\sin20^\circ$

$=\sin(80^\circ-20^\circ)$

$=\sin60^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

11.【答案】2

【解析】∵ $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$$=2(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$$

$$=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

∵ $x\in\mathbf{R}$，

∴ $f(x)$ 的最大值为 2.

故答案为：2.

12.【答案】$\dfrac{10}{3}$

【解析】原式 $=4^{\log_4 3}+4^{-\log_4 3}=4^{\log_2 3^{\frac{1}{2}}}+4^{-\log_2 3^{\frac{1}{2}}}=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$.

故答案为: $\dfrac{10}{3}$.

13.【答案】$-\dfrac{3}{2}$

【解析】当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x+b$ 在定义域上是增函数，

所以 $\begin{cases}0=1+b\\ a^{-1}+b=-1\end{cases}$，解得 $b=-1$，$\dfrac{1}{a}=0$，

不符合题意舍去；

当 $0x+b$ 在定义域是减函数，

所以 $\begin{cases}1+b=-1\\ \dfrac{1}{a}+b=0\end{cases}$，解得 $b=-2$，$a=\dfrac{1}{2}$，

综上 $a+b=-\dfrac{3}{2}$.

故答案为：$-\dfrac{3}{2}$.

14.【答案】②③④

【解析】① $S=\{0,1,2\}$，$T=\{2,3\}$，不存在函数 $f(x)$ 使得集合 S，T“保序同构”；

② $S=\mathbf{N}$，$T=\mathbf{N}^*$，存在函数 $f(x)=x+1$，使得集合 S，T“保序同构”；

③ $S=\{x\mid -1<x<3\}$，$T=\{x\mid -8<x<10\}$，存在函数 $f(x)=x+7$，使得集合 S，T“保序同构”；

④ $S=\{x\,|\,0<x<1\}$，$T=\mathbf{R}$，存在函数 $f(x)=x+1$，使得集合 S，T“保序同构”.
其中，“保序同构”的集合对的对应序号是②③④.
.
故答案为：②③④.