2024届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考（高三）
数学答案

1. D 【解析】由$|x-1|<2$，解得$-1<x<3$；由$x^2+x-2>0$，解得$x<-2$或$x>1$，所以$A\cap B=\{x|1<x<3\}$. 故选D.

2. C 【解析】$f'(x)=e^x+\cos x$，则$f'(0)=e^0+\cos 0=2$. 故选C.

3. B 【解析】当$x>0$时，函数$f(x)=\frac{1}{x}$单调递减，故p是真命题. $\neg p$：$\exists x>y>0$，使得$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$.
故选B.

4. A 【解析】$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi+x)=-\cos x\sin x=-\frac{1}{2}\sin 2x$，
故$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$.
故选A.

5. B 【解析】由$b^2+c^2=2bc$及基本不等式得$b=c$，故$\sin B=\sin C$.
由$\sin B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(B+C)$，得$\sin^2 B=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B$，化简解得$\tan B=\sqrt{3}$，
故$B=C=A=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{1}{2}$. 故选B.

6. B 【解析】由题意$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\omega x$，
所以$\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$\omega=-\frac{9}{4}+6k$，$k\in\mathbf{Z}$，又$\omega>0$，所以正实数$\omega$的最小值为$-\frac{9}{4}+6=\frac{15}{4}$. 故选B.

7. B 【解析】由题意当$t=0$时，$P=P_0e^0=P_0$；当$t=2$时，$P_1=P_0e^{-2k}$；当$t=5$时，$P_2=P_0e^{-5k}$，
又$P_1=(1-20\%)P_0=80\%P_0=P_0e^{-2k}$，所以$e^{-2k}=80\%=0.8$，
因为$\frac{P_2}{P_0}=e^{-5k}=(e^{-2k})^{\frac{5}{2}}=0.8^{\frac{5}{2}}\approx0.57=57\%$，故5 h后的有毒、有害物质大约为原来有毒、有害物质的57%. 故选B.

8. C 【解析】因为$x_1+x_2=1$，
所以$(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=1$，$x_1>0$，$x_2>0$，
故$\frac{3x_1}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}=\frac{3x_1}{x_2}+\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{4x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2\geqslant6$，
当且仅当$x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=\frac{2}{3}$时等号成立，故$\frac{3x_1}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}$的最小值为6. 故选C.

9. BC 【解析】“$x>2$”不能推出“$x>3$”，“$x>3$”能推出“$x>2$”，故“$x>2$”是“$x>3$”的必要不充分条件，所以A错误；
函数$f(x)=x^3$是$\mathbf{R}$上的单调递增函数，所以$x>y\Leftrightarrow x^3>y^3$，故B正确；
$1>-2$，而$1^2<(-2)^2$，所以$x>y$不能推出$x^2>y^2$，$x^2>y^2$也不能推出$x>y$，故C正确；
函数$f(x)=2^x$是$\mathbf{R}$上的单调递增函数，所以$x>y\Leftrightarrow2^x>2^y$，故D错误. 故选BC.

10. ACD 【解析】由$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故A正确；
由$\sin^2(\alpha+\beta)=1-\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$，得$\sin(\alpha+\beta)=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$，又$\sin(\alpha+\pi)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha+\pi\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，$\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$，若$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，则$\alpha+\beta=\alpha+\pi$，则$\beta=\pi$，与$\beta<\pi$矛盾，所以$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故B错误；
$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta-\alpha)=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+$

$\beta)\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{3}{5}$，故 C 正确；

由 $\cos\beta=-\frac{3}{5}$ 及 $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，得 $\sin\beta=\frac{4}{5}$，

故 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=-\frac{11\sqrt{5}}{25}$，故 D 正确.

故选 ACD.

11. ABD 【解析】当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}$，$f'(x)=-\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sin x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 A 正确；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f(x)=-\cos x+\frac{1}{\cos x}$，$\sin x>0$，

所以 $f'(x)=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sin x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)>0$，

故 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增，所以 B 正确；

$f(\pi)=1-1=0$，所以 C 错误；

$f(x+2\pi)=|\cos(x+2\pi)|+\frac{1}{\cos|(x+2\pi)|}=|\cos x|+\frac{1}{\cos(x+2\pi)}=|\cos x|+\frac{1}{\cos|x|}=f(x)$，

故 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，

而 $f(0)=1+1=2$，所以当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)=2$，故 $f(x)=2$ 有无穷多个解，所以 D 正确.

故选 ABD.

12. AC 【解析】$f(-1)=f(1)=2f'(1)$，故 A 正确；

由 $f(2+x)=4-f(-x)$，令 $x=-1$，得 $2f(1)=4$，所以 $f(1)=2$.

又 $2f'(1)=2f(0)=f(1)$，所以 $f'(1)=1$，$f(0)=1$，

$f(2)=4-f(-0)=4-1=3$，

又由 $\begin{cases}f(2+x)=4-f(-x),\\ f(x)=f(-x),\end{cases}$ 得 $f(2+x)=4-f(x)$，故得 $f(4+x)=4-f(2+x)$，

两式相减得 $f(4+x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，所以 $f(3)=f(-1)=f(1)=2$，$f(4)=f(0)=1$，故 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+3+2+1=8$.

由 $f(x)$ 为偶函数，得 $f(x)=f(-x)$，所以 $f'(x)=-f'(-x)$，故 $f'(x)$ 为奇函数，

则 $f'(0)=0$，

因为 $f(2+x)=4-f(-x)$，所以 $f'(2+x)=f'(-x)$，且 $f'(2+0)=f'(-0)$，所以 $f'(2)=0$.

易得 $f'(4+x)=f'(x)$，所以函数 $f'(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

所以 $f'(3)=f'(-1)=-f'(1)=-1$，$f'(4)=f'(0)=0$，

故 $f'(1)+f'(2)+f'(3)+f'(4)=1+0-1+0=0$，故 B 错误；

$\sum_{i=1}^{50}f(i)=12\times8+f(49)+f(50)=12\times8+f(1)+f(2)=101$，故 C 正确；

所以 $\sum_{i=1}^{50}f'(i)=12\times0+f'(49)+f'(50)=12\times0+f'(1)+f'(2)=1$，故 D 错误. 故选 AC.

13. $(-\infty,1]$ 【解析】由 $\frac{2x}{x-2}\leqslant1$ 解得 $-2\leqslant x<2$，故 $A=\{x\mid-2\leqslant x<2\}$；由 $\log_2 x<a$，解得 $0<x<2^a$，故 $B=\{x\mid0<x<2^a\}$. 又 $B\subseteq A$，所以 $2^a\leqslant2$，故 $a\leqslant1$.

14. $a=\sqrt{5}$ 或 $a\geqslant3$ 【解析】由余弦定理，得 $a^2=9+c^2-2\times3c\cos A=c^2-4c+9$，所以 $c^2-4c+9-a^2=0$.

当 $a\geqslant3$ 时，$9-a^2\leqslant0$，关于 c 的二次方程只有一个正根，所以 C 有唯一解；

当 $\Delta=16-4(9-a^2)=0$ 时，解得 $a=\sqrt{5}$，此时 C 有唯一解.

综上所述，当 $a=\sqrt{5}$ 或 $a\geqslant3$ 时，C 有唯一解.

15. $-\frac{3}{5}$ 【解析】由 $\sin x_1=\sin x_2>0$，$0<x_1<x_2<2\pi$，得 $x_1+x_2=\pi$，故 $x_2=\pi-x_1$，所以 $x_1-x_2=2x_1-\pi$，所以 $\cos(x_1-x_2)=\cos(2x_1-\pi)=-\cos2x_1=2\sin^2x_1-1=-\frac{3}{5}$.

16. $(-\infty,1]$ 【解析】由 $x^2-ax+e^{-x}+x\ln x\geqslant 0$, $x>0$, 得 $x-a+\frac{1}{xe^x}+\ln x\geqslant 0$, 故 $x+\ln x+\frac{1}{e^{\ln x+x}}\geqslant a$,

设 $t=x+\ln x$, 则 $t\in\mathbf{R}$.

令 $f(t)=t+\frac{1}{e^t}$, 则 $f'(t)=1-\frac{1}{e^t}$, 又 $f'(0)=0$,

故在区间 $(-\infty,0)$ 上, $f'(t)<0$, 函数 $f(t)$ 单调递减; 在区间 $(0,+\infty)$ 上, $f'(t)>0$, 函数 $f(t)$ 单调递增, 所以 $f(t)\geqslant f(0)=1$, 故 $f(t)_{min}=1$,

故 $a\leqslant 1$.

17. 解: (1) $f(0)=\sin\varphi=\frac{1}{2}$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$, (1分)

又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\omega\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=0$,

由"五点法"得 $\frac{5\pi}{12}\times\omega+\frac{\pi}{6}=\pi$,

解得 $\omega=2$, (3分)

则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. (4分)

(2) 由(1)得, $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2x-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}-\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}+\cos 2x+1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$. (8分)

当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ 时, $g(x)$ 取得最小值, $g(x)_{min}=-1$, (9分)

此时 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

即 $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. (10分)

18. 解: (1) 由题意, $f(-x)=-f(x)$, (1分)

$g(-x)=g(x)$, (2分)

所以 $f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)=e^x$, ① (3分)

又 $f(x)+g(x)=e^{-x}$, ②

②−①得 $f(x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}$, (4分)

②+①得 $g(x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}$. (5分)

(2) 由题知 $e^x+e^{-x}+a(e^{-x}-1)\geqslant 1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

即 $e^x+e^{-x}-1\geqslant a(1-e^{-x})$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立, (6分)

当 $x>0$ 时, $0<e^{-x}<1$, 所以 $1-e^{-x}>0$,

所以 $a\leqslant\frac{e^x+e^{-x}-1}{1-e^{-x}}=\frac{e^x+\frac{1}{e^x}-1}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x-1}$. (7分)

令 $e^x-1=t(t>0)$, 则 $e^x=t+1$,

$a\leqslant\frac{(t+1)^2-(t+1)+1}{t}=\frac{t^2+t+1}{t}=t+\frac{1}{t}+1$, (9分)

又 $t+\frac{1}{t}+1\geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}+1=3$, (10分)

当且仅当 $t=1$, 即 $x=\ln 2$ 时等号成立, (11分)

故 a 的取值范围为 $(-\infty,3]$. (12分)

19. 解: (1) 由题意 $x>0$, $f'(x)=\frac{a-x}{x}$, (1分)

当 $a\leqslant 0$ 时, $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递减. (2分)

当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)=\frac{a-x}{x}=0$, 得 $x=a$,

当 $x\in(0,a)$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x\in(a,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$. (3分)

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递增, 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递减. (4分)

综上, 当 $a\leqslant 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减; 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增, 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减. (5分)

(2) 证明: 因为 $a=\log_2 e>1>0$,

由(1)知当 $0<x\leqslant 1$ 时, $f(x)$ 单调递增, (6分)

故 $f(x)\leqslant f(1)=0$, (7分)

又 $x-1\leqslant 0$, 所以 $(x-1)f(x)\geqslant 0$. (8分)

当 $1<x\leqslant 2$ 时, $f(x)$ 在 $(1,\log_2 e)$ 上单调递增, 在 $(\log_2 e,2)$ 上单调递减. (9分)

又 $f(2)=1-2+\log_2 e\times\ln 2=0, f(1)=0$,

故当 $1<x\leqslant 2$ 时,$f(x)\geqslant 0$,　(10 分)

又 $x-1>0$,所以 $(x-1)f(x)\geqslant 0$.　(11 分)

综上,当 $0<x\leqslant 2$ 时,$(x-1)f(x)\geqslant 0$.　(12 分)

20. 解:(1)由正弦定理及 $\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sin A-\sin C}{\sin B+\sin C}$,

得 $\dfrac{b-c}{a}=\dfrac{a-c}{b+c}$,　(1 分)

化简得 $b^2-c^2=a^2-ac$,

所以 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$,　(2 分)

由余弦定理可得 $\cos B=\dfrac{1}{2}$,　(3 分)

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.　(4 分)

(2)在 $\triangle ABC$ 中,由 $\cos C=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$,得 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$,　(5 分)

由 $\cos B=\dfrac{1}{2}$,得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　(6 分)

则 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{13}}{13}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{39}}{13}=\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$,　(7 分)

由正弦定理得,$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{39}}{26}}{\dfrac{2\sqrt{39}}{13}}=\dfrac{3}{4}$,　(8 分)

设 $a=3x, c=4x$,由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=13x^2$,故 $b=\sqrt{13}x$,　(9 分)

在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理得,$BD^2=CB^2+CD^2-2CB\cdot CD\cdot\cos C$,

即 $\dfrac{37}{4}=9x^2+\dfrac{13}{4}x^2-2\times 3x\times\dfrac{\sqrt{13}}{2}x\times\dfrac{\sqrt{13}}{13}$,

解得 $x=1$,　(10 分)

则 $a=3, c=4$,　(11 分)

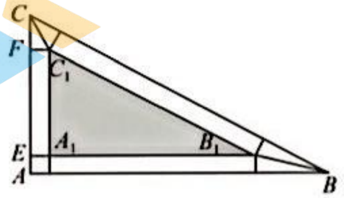
所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.　(12 分)

21. 解:(1)因为 $\angle CAB=90°$, $\angle ACB=60°$, $AC=20$ m,

所以 $\angle ABC=30°$, $AB=20\sqrt{3}$ m.　(1 分)

因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的三边分别平行,所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 相似,

连接 CC_1,过点 A_1, C_1 向 AC 引垂线,垂足分别为 E, F,



则 $AE=A_1E=C_1F=1$,

易得 $\angle C_1CF=\dfrac{1}{2}\angle ACB=30°$,

所以 $CF=\dfrac{1}{\tan 30°}=\sqrt{3}$,　(2 分)

$A_1C_1=AC-AE-FC=20-1-\sqrt{3}=19-\sqrt{3}$.　(3 分)

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1C_1$ 中,$\angle A_1C_1B_1=\angle ACB=60°$,

故 $C_1B_1=2A_1C_1$, $A_1B_1=\sqrt{3}A_1C_1$,　(4 分)

所以 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1C_1$ 的周长 $l=A_1C_1+B_1C_1+A_1B_1=3A_1C_1+\sqrt{3}A_1C_1=(3+\sqrt{3})\times(19-\sqrt{3})=54+16\sqrt{3}$(m);　(5 分)

(2)由(1)知,$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 20\times 20\sqrt{3}=200\sqrt{3}$($\mathrm{m}^2$),　(6 分)

设 r 为 $\triangle ABC$ 内切圆的半径,则 $0<x<r$.

则 $AE=A_1E=C_1F=x$,

$CF=\dfrac{x}{\tan 30°}=\sqrt{3}x$,

所以 $A_1C_1=AC-AE-FC=20-x-\sqrt{3}x=20-(1+\sqrt{3})x$,　(7 分)

又 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 相似,

所以 $A_1B_1=\sqrt{3}A_1C_1=\sqrt{3}[20-(1+\sqrt{3})x]$,　(8 分)

绿地公园 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}A_1B_1\cdot A_1C_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}A_1C_1{}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}[20-(1+\sqrt{3})x]^2\geqslant\dfrac{3}{4}S_{\triangle ABC}=150\sqrt{3}$,　(10 分)

化简得 $20-(1+\sqrt{3})x\geqslant 10\sqrt{3}$，

解得 $x\leqslant 5(3\sqrt{3}-5)$，

故健步道宽度的最大值为 $5(3\sqrt{3}-5)$ m.（12 分）

22. 解：(1) 证明：由 $g(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}(x>0)$，

得 $g'(x)=-\sin x+x$，（1 分）

设 $h(x)=-\sin x+x$，则 $h'(x)=1-\cos x$，

因为 $h'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

故 $g'(x)$ 为增函数，（2 分）

则 $g'(x)>g'(0)=0$，

故 $g(x)$ 为增函数，（3 分）

故 $g(x)>g(0)=0$.（4 分）

(2) 易得 $f(x)-2\ln\frac{x+1}{x}-\frac{x+2}{x+1}+\cos|ax|=e^x-2\ln(x+1)-\frac{x+2}{x+1}+\cos|ax|$，

故设 $F(x)=e^x-2\ln(x+1)-\frac{x+2}{x+1}+\cos|ax|$，$x>0$，

则 $F'(x)=e^x-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-|a|\sin(|a|x)$，（5 分）

令 $G(x)=e^x-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-|a|\sin(|a|x)$，$x>0$，

则 $G'(x)=e^x+\frac{2x}{(x+1)^3}-a^2\cos(|a|x)$，（6 分）

当 $|a|>1$ 时，$G'(0)=1-a^2<0$，

故 $\exists x_0\in(0,+\infty)$，使得在 $(0,x_0)$ 上，$G'(x)<0$，

则 $G(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

故在 $(0,x_0)$ 上，$F'(x)<F'(0)=0$，

故 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

故在 $(0,x_0)$ 上，$F(x)<F(0)=0$，不合题意，舍去；（7 分）

当 $|a|\leqslant 1$ 即 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时，由 (1) 得 $\cos|ax|>1-\frac{a^2x^2}{2}\geqslant 1-\frac{x^2}{2}$，

故 $F(x)>e^x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-\frac{x^2}{2}$，（8 分）

设 $p(x)=e^x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-\frac{x^2}{2}$，$x>0$，

则 $p'(x)=e^x-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-x$，（9 分）

设 $q(x)=e^x-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-x$，$x>0$，

则 $q'(x)=(e^x-1)+\frac{2x}{(x+1)^3}>0$，

故 $q(x)$ 为增函数，（10 分）

故 $p'(x)>p'(0)=0$，

故 $p(x)$ 为增函数，

故 $p(x)>p(0)=0$，则 $F(x)>0$ 恒成立，符合题意.（11 分）

综上，实数 a 的取值范围为 $[-1,1]$.（12 分）