

数 学

本试卷共6页,22小题,满分150分。考试用时120分钟。

- 注意事项:1. 答卷前,考生务必将自己所在的市(县、区)、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上,将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先画掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = (2 + i)(1 - 2i)$, 其中 i 是虚数单位, 则 $|z| =$
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
2. 若向量 a, b 满足 $|a| = 2, |b| = 2, a \cdot b = 2$, 则 $|a - b| =$
- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 4
3. 已知 α 为锐角, 且 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) =$
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 为解决皮尺长度不够的问题, 实验小组利用自行车来测量 A, B 两点之间的直线距离. 如下图, 先将自行车前轮置于点 A , 前轮上与点 A 接触的地方标记为点 C , 然后推着自行车沿 AB 直线前进 (车身始终保持与地面垂直), 直到前轮与点 B 接触. 经观测, 在前进过程中, 前轮上的标记点 C 与地面接触了10次, 当前轮与点 B 接触时, 标记点 C 在前轮的左上方 (以下图为观察视角), 且到地面的垂直高度为 0.45 m . 已知前轮的半径为 0.3 m , 则 A, B 两点之间的距离约为 (参考数值: $\pi \approx 3.14$)



A. 20.10 m

B. 19.94 m

C. 19.63 m

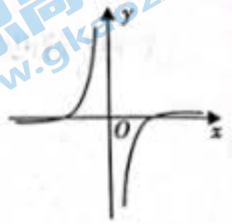
D. 19.47 m

5. 从集合 $U = \{1, 2, 3\}$ 的非空子集中随机选择两个不同的集合 A, B , 则 $A \cap B = \{1\}$ 的概率为

- A. $\frac{4}{21}$ B. $\frac{5}{42}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{5}{56}$

6. 已知函数 $f(x) = \ln|x|$, $g(x) = e^x - e^{-x}$, 则图象如右图的函数可能是

- A. $f(x) + g(x)$ B. $f(x) - g(x)$
C. $f(x)g(x)$ D. $\frac{f(x)}{g(x)}$



7. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点

点, A 是 C 的右顶点, 点 P 在过点 A 且斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. 3 D. 4

8. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 当 a_n 最大时, n 的值为

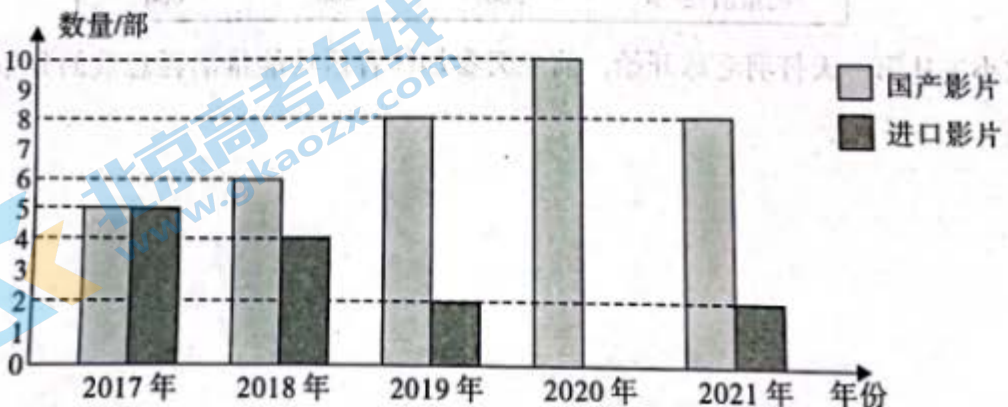
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设 m, n 为不同的直线, α, β 为不同的平面, 则下列结论中正确的是

- A. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$ B. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$
C. 若 $m \parallel \alpha, m \subset \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ D. 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$

10. 中国正在从电影大国迈向电影强国。下面是 2017 至 2021 年各年国内电影票房前十名影片中, 国产影片 (含合拍片) 与进口影片数量统计图, 则下列说法中正确的是

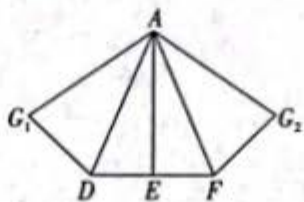


- A. 2017 至 2021 年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片数量占比不低于 50%
- B. 2017 至 2021 年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片数量占比逐年提高
- C. 2017 至 2021 年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片数量的平均数大于进口影片数量的平均数
- D. 2017 至 2021 年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片数量的方差等于进口影片数量的方差
11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n + a_{n+1} = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则下列结论中正确的是
- A. $a_4 = 5$
- B. $\{a_n\}$ 为等比数列
- C. $a_1 + a_2 + \dots + a_{2021} = 2^{2022} - 3$
- D. $a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = \frac{2^{2023} - 2}{3}$
12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，抛物线 C 上存在 n 个点 $P_1, P_2, \dots, P_n (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*)$ 满足 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \dots = \angle P_{n-1}FP_n = \angle P_nFP_1 = \frac{2\pi}{n}$ ，则下列结论中正确的是

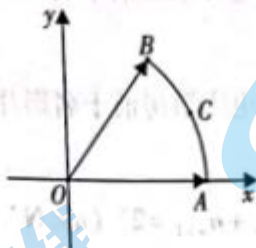
- A. $n=2$ 时， $\frac{1}{|P_1F|} + \frac{1}{|P_2F|} = 2$
- B. $n=3$ 时， $|P_1F| + |P_2F| + |P_3F|$ 的最小值为 9
- C. $n=4$ 时， $\frac{1}{|P_1F| + |P_3F|} + \frac{1}{|P_2F| + |P_4F|} = \frac{1}{4}$
- D. $n=4$ 时， $|P_1F| + |P_2F| + |P_3F| + |P_4F|$ 的最小值为 8

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 二项式 $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^6$ 展开式中的常数项为_____。
14. 下图为四棱锥 $A-DEFG$ 的侧面展开图 (点 G_1, G_2 重合为点 G)，其中 $AD = AF, G_1D = G_2F, E$ 是线段 DF 的中点，请写出四棱锥 $A-DEFG$ 中一对一定相互垂直的异面直线：_____。(填上你认为正确的一个结论即可，不必考虑所有可能的情形)



15. 如下图, 已知扇形 AOB 的半径为 10, 以 O 为原点建立平面直角坐标系, $\vec{OA} = (10, 0)$, $\vec{OB} = (6, 8)$, 则 \widehat{AB} 的中点 C 的坐标为_____.



16. 已知直线 $y=t$ 分别与函数 $f(x) = 2x+1$ 和 $g(x) = 2\ln x + x$ 的图象交于点 A, B , 则 $|AB|$ 的最小值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 下面给出有关 $\triangle ABC$ 的三个论断: ① $a^2 + c^2 - b^2 = ac$; ② $c = 2b \cos B$; ③ $a \cos C + \sqrt{3} a \sin C = b + c$.

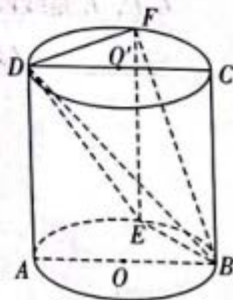
化简上述三个论断, 求出角的值或角的关系, 并以其中两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出所有可能的真命题。(不必证明)

18. (12 分)

如下图, $ABCD$ 为圆柱 OO' 的轴截面, EF 是圆柱上异于 AD, BC 的母线.

(1) 证明: $BE \perp$ 平面 DEF ;

(2) 若 $AB = BC = 2$, 当三棱锥 $B - DEF$ 的体积最大时, 求二面角 $B - DF - E$ 的余弦值.



19. (12分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n(2S_n - a_n) = 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

(1) 求证：数列 $\{S_n^2\}$ 是等差数列，并求出 S_n 的表达式；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中是否存在连续三项 a_k, a_{k+1}, a_{k+2} ，使得 $\frac{1}{a_k}, \frac{1}{a_{k+1}}, \frac{1}{a_{k+2}}$ 构成等差数列？请说明理由。

20. (12分)

小王每天 17:00—18:00 都会参加一项自己喜欢的体育运动，运动项目有篮球、羽毛球、游泳三种。已知小王当天参加的运动项目只与前一天参加的运动项目有关，在前一天参加某类运动项目的情况下，当天参加各类运动项目的概率如下表：

前一天	当天		
	篮球	羽毛球	游泳
篮球	0.5	0.2	0.3
羽毛球	0.3	0.1	0.6
游泳	0.3	0.6	0.1

(1) 已知小王第一天打羽毛球，则他第三天做哪项运动的可能性最大？

(2) 已知小王参加三种体育运动一小时的能量消耗如下表所示：

运动项目	篮球	羽毛球	游泳
能量消耗/卡	500	400	600

求小王从第一天打羽毛球开始，前三天参加体育运动能量消耗总数的分布列和期望。

21. (12分)

已知 $f(x) = \ln x + ax + 1$ ($a \in \mathbb{R}$)， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数。

(1) 若对任意 $x > 0$ 都有 $f(x) \leq 0$ ，求 a 的取值范围；

(2) 若 $0 < x_1 < x_2$ ，证明：对任意常数 a ，存在唯一的 $x_0 \in (x_1, x_2)$ ，使得 $f'(x_0) =$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

22. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 其右焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$, 点 M 在圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 上但不在 y 轴上, 过点 M 作圆的切线交椭圆于 P, Q 两点, 当点 M 在 x 轴上时, $|PQ| = \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 当点 M 在圆上运动时, 试探究 $\triangle FPQ$ 周长的取值范围.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯