2020 届绿色联盟 10 月模拟

一、选择题：本大题共 10 小题，共 40 分

1. 已知 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{2,0,1,8\}$，$C=\{1,9,3,8\}$，则集合 A 可以为（　　）

A．$\{1,8\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{0\}$　　D．$\{9\}$

2. 复数 $z=\dfrac{m+i}{1-i}$（$m\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位）在复平面上对应的点不可能位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1>0$，则“$a_1<a_4$”是“$a_3<a_5$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

4. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geq 0\\ x+y-3\geq 0\\ x-2y\leq 0\end{cases}$，则 $z=x+3y$ 的取值范围是（　　）

A．$[0,9]$　　B．$[0,5]$　　C．$[9,+\infty)$　　D．$[5,+\infty)$

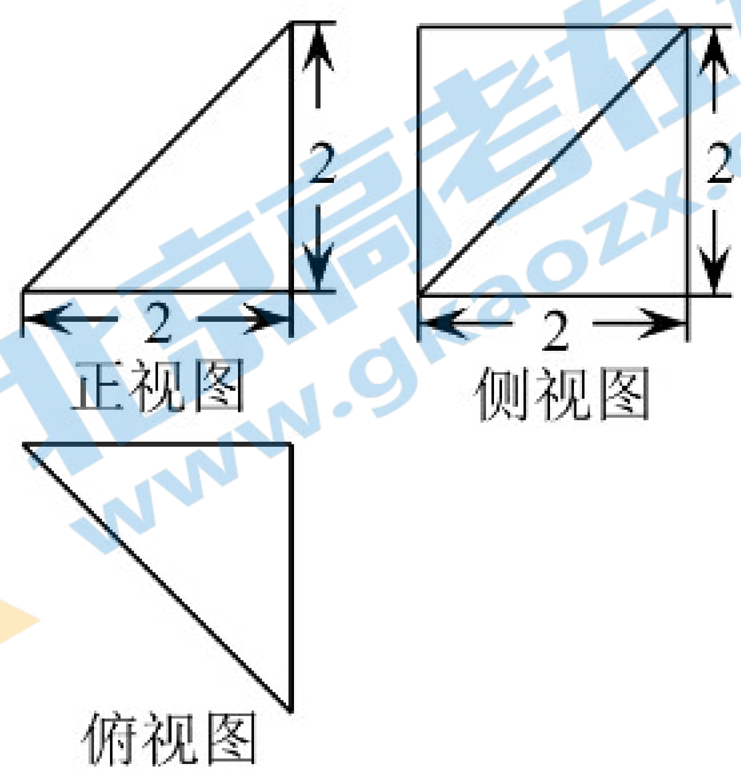
5. 设 α 是空间中的一个平面，l，m，n 是三条不同的直线，则（　　）

A．若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$l\perp m$，$l\perp n$，则 $l\perp\alpha$　　B．若 $l\,/\!/\,m$，$m\,/\!/\,n$，$l\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$

C．若 $l\,/\!/\,m$，$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $l\perp n$　　D．若 $m\subset\alpha$，$n\perp\alpha$，$l\perp n$，则 $l\,/\!/\,m$

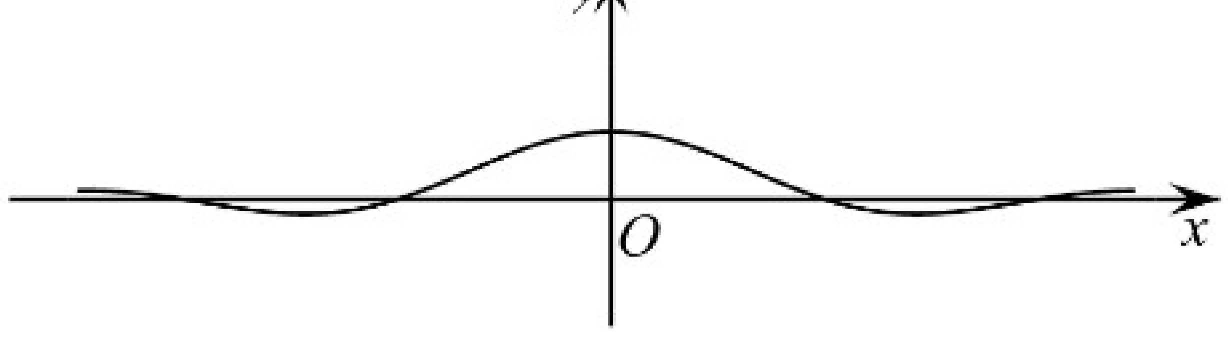
6. 如图为某几何体的三视图，根据图中标出的尺寸（单位：cm），可得这个几何体的体积是（　　）

A．$\dfrac{8}{3}\text{cm}^3$　　B．$\dfrac{4}{3}\text{cm}^3$　　C．$\dfrac{2}{3}\text{cm}^3$　　D．$\dfrac{1}{3}\text{cm}^3$



7. 已知函数 $y=f(x)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的表达式可能是（　　）

A．$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$　　B．$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　　C．$f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$　　D．$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$



8. 随机变量ξ 的分布列如表所示，若$E(\xi)=\frac{5}{3}$，则随机变量ξ 的方差$D(\xi)$等于（　　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{3}{9}$

C．$\frac{5}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

ξ	1	2	3
P	a	b	$\frac{1}{6}$

9. 已知函数$f(x)=m(1+\cos x)-\sin x$，则（　　）

A．仅有有限个实数m，使得$f(x)$有零点

B．不存在实数m，使得$f(x)$有零点

C．对任意的实数m，$f(x)$有零点

D．对任意实数m，$f(x)$零点个数为有限个

10. 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：$a_1>0$，$b_1>0$，$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{b_n} \\ b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{a_n} \end{cases}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$，则（　　）

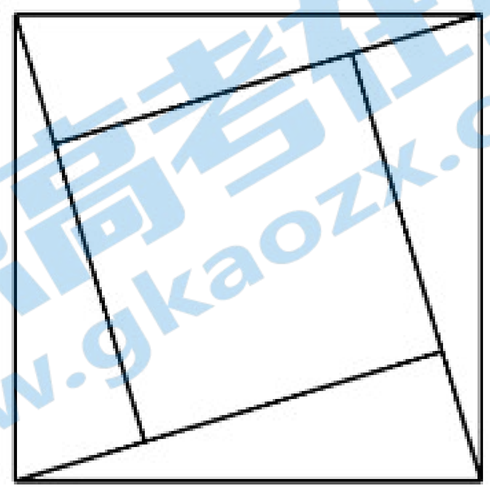
A．$a_{50}+b_{50}>20$，$a_{50}b_{50}>100$　　B．$a_{50}+b_{50}>20$，$a_{50}b_{50}<100$

C．$a_{50}+b_{50}<20$，$a_{50}b_{50}>100$　　D．$a_{50}+b_{50}<20$，$a_{50}b_{50}<100$

二、填空题：本大题共 7 小题，共 36 分

11. $\mathrm{e}^{\ln 3}+(0.125)^{-\frac{2}{3}}=$________；$\log_{2.5}6.25+\ln\sqrt{\mathrm{e}}-(0.064)^{-\frac{1}{3}}=$________.

12. “赵爽弦图”巧妙地利用了面积关系证明了勾股定理，已知大正方形面积为9，小正方形面积为4，则每个直角三角形的面积是__________；每个直角三角形的周长是__________.



13. 若$(x^2-2x-3)^n$的展开式中所有项的系数之和为256，则$n=$______；含x^2项的系数是______（用数字作答）.

14. 已知$x>0$，$y>0$，且$x+2y=3$，则xy的最大值为__________，$\frac{3x+y}{xy}$的最小值为__________.

15. 某校从8名数学教师中选派4名同时去4个边远地区支教，每地1名教师，其中甲和乙不能都去，甲和丙只能都去或都不去，则不同的选派方案有__________.（用数字作答）

16. 倾斜角为30°的直线经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点，且与双曲线的左、右支分别交于$A$，$B$两点，若线段$AB$的垂直平分线经过右焦点，则此双曲线的离心率为__________.

17. 已知平面向量$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，且$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=2$，$|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=1$．若平面向量$\boldsymbol{a}$满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m}|=|\boldsymbol{n}|$，则$|\boldsymbol{a}|$的最大值______.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分

18. （14 分）设 a，b，c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 的对边，已知 $\boldsymbol{m}=(2a,b)$，$\boldsymbol{n}=(\sin B,-\sqrt{3})$，且 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

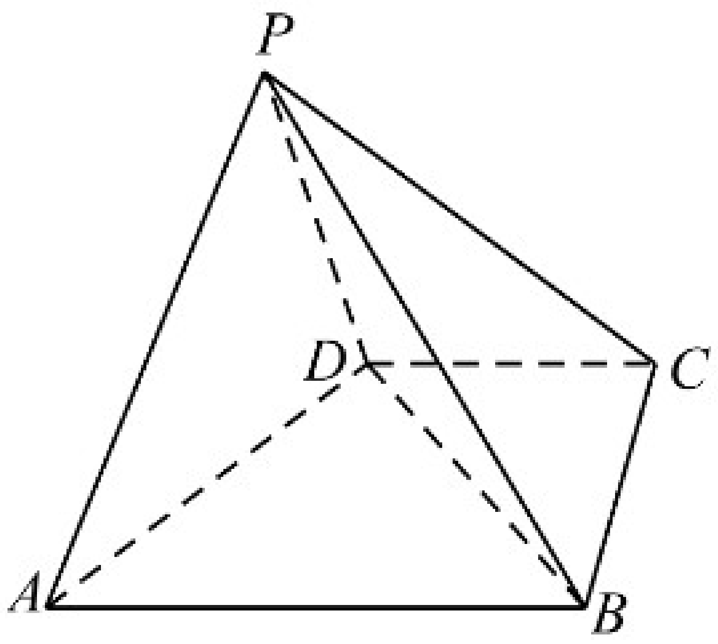
（1）求角 A 的大小；

（2）当 A 为锐角时，求函数 $y=\sqrt{3}\sin B+\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$ 的取值范围.

19. （15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle APB=\angle BPD=\angle APD=60°$，$PB=PD=BC=CD=2$，$AP=3$.

（1）证明：$AP\perp BD$；

（2）求 PC 与平面 PAB 所成角的正弦值.



20. （15 分）设正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $2\sqrt{S_n}=a_n+1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{4n^2-3}{2a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

21. （15 分）已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任意一点$P(x，y)$ $(y\neq 0)$到椭圆左、右顶点的斜率之积为$-\dfrac{1}{4}$.

（1）求椭圆C的离心率；

（2）若直线$y=\dfrac{1}{2}(x+1)$与椭圆C相交于A、B两点，若$\triangle OAB$的面积为$\dfrac{1}{2}$，求椭圆C的方程.

22. （15 分）已知函数$f(x)=(x+1)(e^x-1)$.

（1）求$f(x)$在点$(-1，f(-1))$处的切线方程；

（2）若$a\leq e-1$，证明：$f(x)\geq a\ln x+2ex-2$在$x\in[1，+\infty)$上恒成立；

（3）若方程$f(x)=b$有两个实数根x_1、x_2，且$x_1<x_2$，证明：$x_2-x_1\leq 1+\dfrac{b+e+1}{3e-1}+\dfrac{eb}{e-1}$.

浙江教育绿色评价联盟适应性试卷

数学答案及评分标准

一、选择题：本大题共有 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

ADADB　ABCCA

二、填空题（本大题共 7 小题，11—14 每空 3 分，15—17 每小题 4 分，共 36 分）

11. 7；0　**12.** $\frac{5}{4}$；$3+\sqrt{14}$　**13.** 4 ；108　**14.** $\frac{9}{8}$；$\frac{7+2\sqrt{6}}{3}$

15. 600　**16.** $\sqrt{2}$　**17.** $\sqrt{5}$

三、解答题（本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算过程）

18.解：（Ⅰ）$2a\sin B-\sqrt{3}b=0$ 由正弦定理，

得：$2\sin A\cdot\sin B=\sqrt{3}\sin B$，$\sin B\neq 0$．　…………………3 分

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　…………………5 分

所以 $A=\frac{\pi}{3}$ 或 $A=\frac{2\pi}{3}$．　…………………7 分

（II）$\because A=\frac{\pi}{3}$，$\because B+C=\frac{2\pi}{3}$ 得：$0<B<\frac{2\pi}{3}$　…………………9 分

$\because y=\sqrt{3}\sin B+\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin B+\cos B=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$．　…………………12 分

$\because B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以，所求函数的取值范围 $(1,2]$　…………………14 分

19.（Ⅰ）因为 $\angle APB=\angle APD=60^\circ$，$PD=PB$，

所以 $\Delta APB\cong\Delta APD$，所以 $AD=AB$．　…………………2 分

取 BD 的中点 E，连接 AE,PE，

所以 $AE\perp BD,PE\perp BD$．　…………………4 分

所以 $BD\perp$ 面 PAE．　…………………6 分

又 $AP\subset$ 面 PAE，所以 $AP\perp BD$．　…………………7 分

（II）在 ΔAPD 中，根据余弦定理，得

$AD^2=AP^2+PD^2-2AP\times PD\times\cos 60^\circ=7$,

所以 $AD=\sqrt{7}$ ……………………9 分

又因为 $DE=1$，所以 $AE=\sqrt{6}$， $PE=\sqrt{3}$ ……………………11 分

所以 $AP^2=AE^2+PE^2$，即 $AE\perp PE$. ……………………12 分

设点 C 到平面 PAB 的距离为 h， PC 与平面 PAB 所成角为 θ，

因为 $V_{C-PAB}=V_{P-ABC}$，即 $\frac{1}{3}h\cdot S_{\Delta PAB}=\frac{1}{3}PE\cdot S_{\Delta ABC}$， ……………………13 分

所以 $h=\dfrac{PE\cdot S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta PAB}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\times 1}{\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$

所以 $\sin\theta=\dfrac{h}{PC}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{6}$，

所以 PC 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{2+\sqrt{2}}{6}$. ……………………15 分

20.解：（Ⅰ）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1}{4}(a_1+1)^2$，$\therefore a_1=1$. ……………………2 分

$\because S_n=\frac{1}{4}(a_n+1)^2$， ①

$\therefore S_{n-1}=\frac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2\quad(n\geq 2)$. ②

相减得 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{4}(a_n+1)^2-\frac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$，

即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$， ……………………4 分

$\because a_n>0\ \therefore a_n+a_{n-1}>0$.

$\therefore a_n-a_{n-1}-2=0$，即 $a_n-a_{n-1}=2(n\geq 2)$.

故数列 $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为2 的等差数列. ……………………5 分

$\therefore a_n=2n-1$. …………7 分

（Ⅱ） $b_n=\frac{1}{2}\left[1-\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}\right]$ ……………………9 分

令 $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$ 前 n 项和为 s_n 求得 $s_n=1-\frac{1}{2n+1}$ ……12 分

$T_n=\frac{1}{2}\left[n-1+\frac{1}{2n+1}\right]$ …………15 分

21.解（Ⅰ）左、右顶点的坐标分别为 $(-a,0),(a,0)$， ………………1 分

则 $\frac{y}{x+a}\cdot\frac{y}{x-a}=-\frac{1}{4}$ ，即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{4}}=1$． …………………2 分

故 $a^2=4b^2$ ． ………………4 分

所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ． …………………6 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=\frac{1}{2}(x+1).\end{cases}$

得 $y_1+y_2=\frac{1}{2}$ ，$y_1\cdot y_2=\frac{1-4b^2}{8}$， …………………8 分

$\Delta>0$，得 $b^2>\frac{1}{8}$ ． …………………9 分

所以 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times|y_1-y_2|=\frac{1}{4}\sqrt{8b^2-1}$． …………………11 分

由 $\frac{1}{4}\sqrt{8b^2-1}=\frac{1}{2}$，得 $b^2=\frac{5}{8},a^2=\frac{5}{2}$ ． …………………13 分

故椭圆方程为 $2x^2+8y^2=5$ ． …………………15 分

22. （Ⅰ） $f'(x)=(x+2)e^x-1$， …………………2 分

$f'(-1)=\frac{1}{e}-1$， $f(-1)=0$， …………………3 分

所以切线方程为 $y=\frac{1-e}{e}(x+1)$． …………………4 分

（Ⅱ）当 $x\in[1,+\infty)$时， $\ln x\geq 0$，所以 $a\ln x+2ex-2\leq(e-1)\ln x+2ex-2$．

下先证：$(e-1)\ln x+2ex-2\leq f(x)=(x+1)(e^x-1)$．

即证：$g(x)=(x+1)(e^x-1)-(e-1)\ln x-2ex+2$．

$g'(x)=(x+2)e^x-1-\frac{e-1}{x}-2e$，又 $g'(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g'(1)=0$ 知 $g(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\ge g(1)=0$.因此 $(x+1)(e^x-1)\ge(e-1)\ln x+2ex-2\ge a\ln x+2ex-2$，

得证. …………9 分

（III）由（Ⅰ）知 $f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=\frac{1-e}{e}(x+1)$.

构造 $F(x)=f(x)-\frac{1-e}{e}(x+1)=(x+1)\left(e^x-\frac{1}{e}\right)$，$F'(x)=(x+2)e^x-\frac{1}{e}$，$F''(x)=(x+3)e^x$.

所以 $F'(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增.

又 $F'(-3)=-\frac{1}{e^3}-\frac{1}{e}<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F'(x)=-\frac{1}{e}$，$F'(-1)=0$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.所以 $F(x)\ge F(-1)=0\Rightarrow f(x)\ge s(x)=\frac{1-e}{e}(x+1)$.

设方程 $s(x)=\frac{1-e}{e}(x+1)=b$ 的根 $x_1'=\frac{eb}{1-e}-1$.又 $b=s(x_1')=f(x_1)\ge s(x_1)$，由 $s(x)$ 在 R 上单调递减，所以 $x_1'\le x_1$.

另一方面，$f(x)$ 在点 $(1,2e-2)$ 处的切线方程为 $t(x)=(3e-1)x-e-1$.

构造 $G(x)=f(x)-t(x)=(x+1)(e^x-1)-(3e-1)x+e+1=(x+1)e^x-3ex+e$.

$G'(x)=(x+2)e^x-3e$，$G''(x)=(x+3)e^x$.

所以 $G'(x)$ 在在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增.

又 $G'(-3)=-\frac{1}{e^3}-3e<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}G'(x)=-3e$，$G'(1)=0$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 所以 $G(x)\ge G(1)=0\Rightarrow f(x)\ge t(x)=(3e-1)x-e-1$.

设方程 $t(x)=(3e-1)x-e-1=b$ 的根 $x_2'=\frac{e+1+b}{3e-1}$.又 $b=t(x_2')=f(x_2)\ge t(x_2)$，由 $t(x)$ 在 R 上单调递增，所以 $x_2\le x_2'$. 所以 $x_2-x_1\le x_2'-x_1'=1+\frac{b+e+1}{3e-1}+\frac{eb}{e-1}$，得证. …………15 分