2022 年全国高中数学联合竞赛一试（A1 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设复数 $z=\sqrt{\frac{\pi}{e+\pi}}(1+i)+\sqrt{\frac{e}{\pi+e}}(1-i)$（$e$ 为自然对数的底数，i 为虚数单位），则 z 的模为________.

2. 在平面直角坐标系中，圆 $\Omega: x^2+y^2+dx+ey+f=0$（其中 d,e,f 为实数）的一条直径为 AB，其中 $A(20,22),B(10,30)$，则 f 的值为________.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=|x-2|+a$（其中 a 为实数）. 若 $f(x)$ 为奇函数，则不等式 $f(x)\geq 1$ 的解集为________.

4. 若 $\triangle ABC$ 满足 $\frac{\angle A}{3}=\frac{\angle B}{4}=\frac{\angle C}{5}$，则 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|BC|^2}$ 的值为________.

5. 若等差数列 $\{a_n\}$ 及正整数 $m(m\geq 3)$ 满足：$a_1=1,a_m=2$，且

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}a_m}=3,$$

则 $a_1+a_2+\cdots+a_m$ 的值为________.

6. 在某次数学竞赛小组交流活动中，四名男生与三名女生按随机次序围坐一圈，则三名女生两两不相邻的概率为________.

7. 已知四面体 $ABCD$ 满足 $AB\perp BC, BC\perp CD, AB=BC=CD=2\sqrt{3}$，且该四面体的体积为 6，则异面直线 AD 与 BC 所成的角的大小为________.

8. 在 5×5 矩阵中，每个元素都为 0 或 1，且满足：五行的元素之和都相等，但五列的元素之和两两不等. 这样的矩阵的个数为________.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（本题满分 16 分）对任意正实数 a，记函数 $f(x)=|\lg x|$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 m_a，函数 $g(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ 在 $[0,a]$ 上的最大值为 M_a．若 $M_a-m_a=\frac{1}{2}$，求 a 的所有可能值．

10．（本题满分 20 分）在平面直角坐标系 xOy 中，设一条动直线 l 与抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 相切，且与双曲线 $\Omega: x^2-y^2=1$ 交于左、右两支各一点 A、B．求 $\triangle AOB$ 的面积的最小值．

11．（本题满分 20 分）设正整数数列 $\{a_n\}$ 同时具有以下两个性质：

(i) 对任意正整数 k，均有 $a_{2k-1}+a_{2k}=2^k$；

(ii) 对任意正整数 m，均存在正整数 $l\le m$，使得 $a_{m+1}=\sum\limits_{i=l}^{m}a_i$．

求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}$ 的最大值．

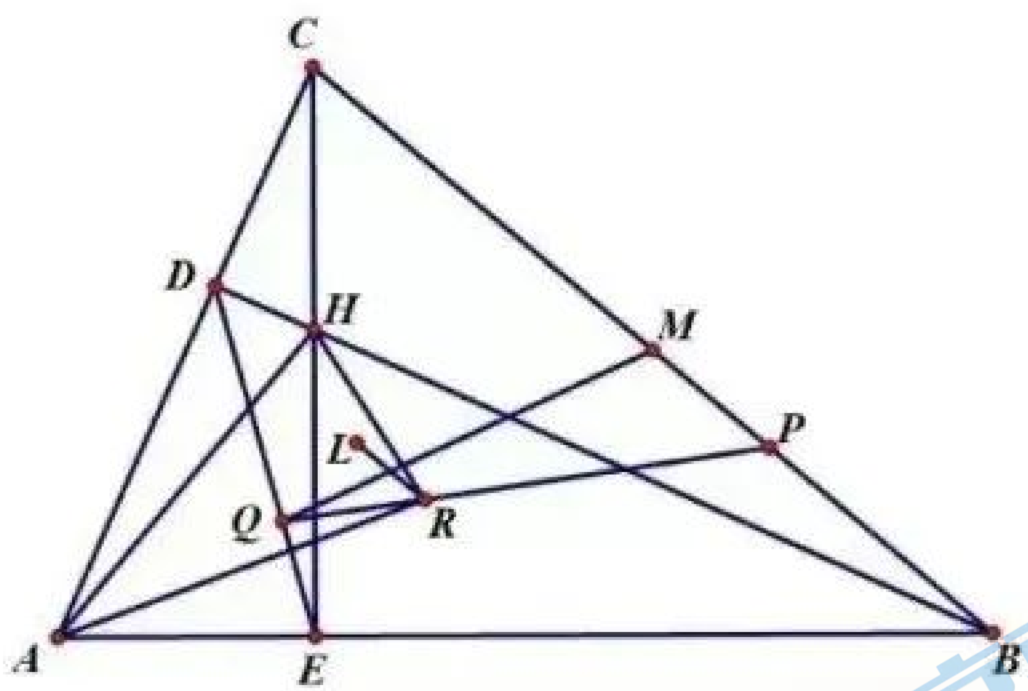
2022 年全国高中数学联合竞赛加试（A1 卷）

一、（本题满分 40 分）设实数 a,b,c,d 满足 $a\ge b$、$c\ge d$，且

$$|a|+2|b|+3|c|+4|d|=1.$$

记 $P=(a-b)(b-c)(c-d)$，求 P 的最小值与最大值.

二、（本题满分 40 分）如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，H 为垂心，BD,CE 为高，M 为边 BC 的中点. 在线段 BM,DE 上各取一点 P,Q，并在线段 PQ 上取一点 R，使得 $\frac{BP}{EQ}=\frac{CP}{DQ}=\frac{PR}{QR}$. 设 L 为 $\triangle AHR$ 的垂心，求证：直线 QM 平分线段 RL.



三、（本题满分 50 分）是否存在一个无限正整数集合 S，具有下述性质：对任意 $x,y,z,w\in S$，$x<y,z<w$，若有序数对 $(x,y)\ne(z,w)$，则 $xy+2022$ 与 $zw+2022$ 互素？

四、（本题满分 50 分）给定实数 r，甲、乙两人玩如下的游戏.

黑板上写着一个含有三个绝对值的算式：

$$S=|\square-\square|+|\square-\square|+|\square-\square|,$$

其中 6 个空格“□”中尚未填数. 每一回合，甲选取区间 $[0,1]$ 中的一个实数（不同回合中可以选相同的数），乙将该数填在某个空格之中. 经过六个回合之后所有 6 个空格中均填了数，S 的值也随之确定. 若 $S\ge r$，则甲胜，否则乙胜.

求所有的实数 r，使得甲有获胜策略.

1. 设复数 $z=\sqrt{\frac{\pi}{e+\pi}}(1+i)+\sqrt{\frac{e}{\pi+e}}(1-i)$（e 为自然对数的底数，i 为虚数单位），则 z 的模为________.

答案： $\sqrt{2}$.

解： 记 $u=\sqrt{\frac{\pi}{e+\pi}}, v=\sqrt{\frac{e}{\pi+e}}$，则 $u,v\in\mathbf{R}, u^2+v^2=1$.

因此 $|z|=|(u+v)+(u-v)i|=\sqrt{(u+v)^2+(u-v)^2}=\sqrt{2(u^2+v^2)}=\sqrt{2}$.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $\Omega: x^2+y^2+dx+ey+f=0$（其中 d,e,f 为实数）的一条直径为 AB，其中 $A(20,22), B(10,30)$，则 f 的值为________.

答案： 860.

解： 易知 Ω 的圆心（即 AB 的中点）为 $(15,26)$，Ω 的半径为 $\frac{|AB|}{2}=\sqrt{41}$，故圆 Ω 的方程为 $(x-15)^2+(y-26)^2=41$，即 $x^2+y^2-30x-52y+860=0$.

所以 $f=860$.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=|x-2|+a$（其中 a 为实数）. 若 $f(x)$ 为奇函数，则不等式 $f(x)\geq 1$ 的解集为________.

答案： $[-3,-1]\cup[5,+\infty)$.

解： 由条件知 $f(0)=2+a=0$，故 $a=-2$.

当 $x\geq 0$ 时，由 $f(x)=|x-2|-2\geq 1$，解得 $x\geq 5$.

当 $x<0$ 时，$f(x)\geq 1$ 等价于 $f(-x)\leq -1$，即 $|-x-2|-2\leq 1$，即 $|x+2|\leq 1$，解得 $-3\leq x\leq -1$.

综上，不等式 $f(x)\geq 1$ 的解集为 $[-3,-1]\cup[5,+\infty)$.

4. 若 $\triangle ABC$ 满足 $\frac{\angle A}{3}=\frac{\angle B}{4}=\frac{\angle C}{5}$，则 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|BC|^2}$ 的值为________.

答案： $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

解： 由条件知 $A=45^\circ, B=60^\circ, C=75^\circ$，于是

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|BC|^2}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AB|\cdot|AC|}\cdot\frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{|AC|}{|BC|}=\cos A\cdot\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

5. 若等差数列$\{a_n\}$及正整数$m(m\geq 3)$满足：$a_1=1, a_m=2$，且

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}a_m}=3,$$

则$a_1+a_2+\cdots+a_m$的值为________.

答案：$\frac{21}{2}$.

解：设$\{a_n\}$的公差为d，则

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}a_m}=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_{i+1}-a_i}{da_ia_{i+1}}$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_m}\right)=\frac{a_m-a_1}{da_1a_m}=\frac{m-1}{a_1a_m},$$

结合条件可知$3=\frac{m-1}{2}$，得$m=7$.

所以$a_1+a_2+\cdots+a_m=\frac{(1+2)\times 7}{2}=\frac{21}{2}$.

6. 在某次数学竞赛小组交流活动中，四名男生与三名女生按随机次序围坐一圈，则三名女生两两不相邻的概率为________.

答案：$\frac{1}{5}$.

解：这7名学生的任意圆排列有$6!$种．以下考虑满足条件的圆排列的种数．

先对四名男生进行圆排列，有$3!$种排法，任意两名相邻男生之间暂视为一个空位，共4个空位；为使三名女生两两不相邻，需挑选3个不同的空位将她们依次排入，有P_4^3种排法．因此满足条件的圆排列有$3!\times P_4^3$种．

从而所求概率为$\dfrac{3!\times P_4^3}{6!}=\dfrac{1}{5}$.

7. 已知四面体$ABCD$满足$AB\perp BC$, $BC\perp CD$, $AB=BC=CD=2\sqrt{3}$，且该四面体的体积为6，则异面直线AD与BC所成的角的大小为________.

答案：$45°$或$60°$.

解：作$DH\perp$平面ABC于点H，则四面体的体积$V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DH=6$.

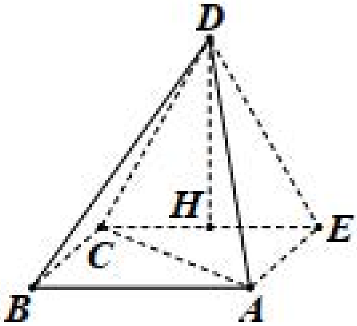
由$AB\perp BC$, $AB=BC=2\sqrt{3}$，得$S_{\triangle ABC}=6$，所以$DH=3$.

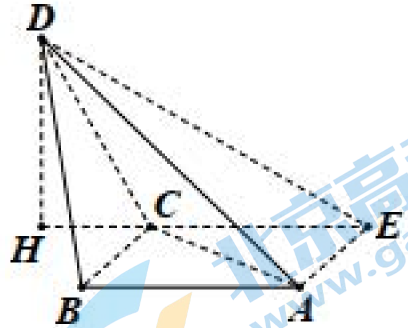
又$DH\perp CH$，$CD=2\sqrt{3}$，故$CH=\sqrt{3}$.

由$BC\perp CD$, $BC\perp DH$，得$BC\perp$平面CDH，所以$BC\perp CH$.

构造正方形$ABCE$，则H在直线CE上，且由$AE\perp$平面CDH知$AE\perp DE$.

由于$AE\parallel BC$，故$\angle DAE$为异面直线AD与BC所成角的平面角





若 $HE=CE-CH=\sqrt{3}$（如左图），则 $DE=2\sqrt{3}=AE$，此时 $\angle DAE=45^\circ$；若 $HE=CE+CH=3\sqrt{3}$（如右图），则 $DE=6=\sqrt{3}AE$，此时 $\angle DAE=60^\circ$．

因此，所求角的大小为 45° 或 60°．

8. 在 5×5 矩阵中，每个元素都为 0 或 1，且满足：五行的元素之和都相等，但五列的元素之和两两不等．这样的矩阵的个数为________（答案用数值表示）．

答案： 26400．

解： 设矩阵的所有元素之和为 S．由于五行的元素之和都相等，故 $5\mid S$．又五列的元素之和两两不等，故 $10=0+1+2+3+4\le S\le1+2+3+4+5=15$．

所以 $S=10$ 或 15．于是只有以下两类情形：

(1) $S=10$，此时每行有 2 个 1，其余为 0，各列中 1 的个数为 0、1、2、3、4 的排列；

(2) $S=15$，此时每行有 2 个 0，其余为 1，各列中 0 的个数为 0、1、2、3、4 的排列．

对于情形 (1)，不妨先考虑对任意 $i=1,2,\cdots,5$，第 i 列中恰有 $i-1$ 个 1，且第 2 列中的 1 位于第 1 行的矩阵，设这样的矩阵有 n 个（则由对称性，符合情形 (1) 的矩阵有 $5!\times5\times n=600n$ 个）．

若第 5 列中的 0 在第 1 行，则第 3 列的 2 个 1 可任选位置，第 4 列的 3 个 1 必须与第 3 列的 2 个 1 两两不同行，这种矩阵有 $C_5^2=10$ 个．

以下设第 5 列中的 0 在第 $k(2\le k\le5)$ 行处．此时，在第 3、4 列中，第 1 行处必须都为 0，第 k 行处必须都为 1，然后，第 3 列中的另一个 1 可在除第 1、第 k 行外的剩下三个位置中任选一处，第 4 列中的另两个 1 的位置随之确定（必须与第 3 列的 1 不同行），这种矩阵有 $4\times3=12$ 个．

所以 $n=10+12=22$，从而符合情形 (1) 的矩阵有 $600n=13200$ 个．

同理，符合情形 (2) 的矩阵也有 13200 个．

综上，所求的矩阵的个数为$2\times13200=26400$．

二、解答题：本大题共3小题，满分56分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分16分） 对任意正实数a，记函数$f(x)=|\lg x|$在$[a,+\infty)$上的最小值为m_a，函数$g(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$在$[0,a]$上的最大值为M_a．若$M_a-m_a=\frac{1}{2}$，求a的所有可能值．

解： 由于$f(1)=0$为$f(x)$的最小值，$f(x)$在$[1,+\infty)$上严格递增，故

$$m_a=\begin{cases}0, & 0<a\le1,\\ \lg a, & a>1.\end{cases}$$ ……………4分

由于 $g(1)=1$ 为 $g(x)$ 的最大值，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增，故

$$M_a=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi a}{2}, & 0<a\le 1,\\ 1, & a>1.\end{cases}$$ ………………8 分

当 $0<a\le 1$ 时，$M_a-m_a=\sin\dfrac{\pi a}{2}$，由 $\sin\dfrac{\pi a}{2}=\dfrac{1}{2}$ 解得 $\dfrac{\pi a}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $a=\dfrac{1}{3}$.

………………12 分

当 $a>1$ 时，$M_a-m_a=1-\lg a$，由 $1-\lg a=\dfrac{1}{2}$ 解得 $a=\sqrt{10}$.

因此 a 的所有可能值为 $\dfrac{1}{3}$ 或 $\sqrt{10}$. ………………16 分

10.（本题满分 20 分） 在平面直角坐标系 xOy 中，设一条动直线 l 与抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 相切，且与双曲线 $\Omega: x^2-y^2=1$ 交于左、右两支各一点 A、B．求 ΔAOB 的面积的最小值.

解： 设 l 与 Γ 相切于点 P（显然 P 不为原点 O，否则 l 为 y 轴，与 Ω 无交点）.

由对称性，不妨设 P 为第一象限内 Γ 上一点，坐标为 $(t,2\sqrt{t})$，其中 $t>0$，则切线 l 的方程为 $2\sqrt{t}\cdot y=2(x+t)$，即

$$y=\frac{x}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}.$$ ………………5 分

代入 Ω 的方程，整理得关于 x 的方程

$$(t-1)x^2-2tx-t(t+1)=0,$$

A,B 的横坐标为该方程的两解，记为 x_1,x_2，则 $t\neq 1$，且

$$x_1+x_2=\frac{2t}{t-1},\ x_1x_2=-\frac{t(t+1)}{t-1}.$$

根据题意有 $x_1x_2<0$，而 $t>0$，故 $t>1$.

注意到 l 的截距为 $\sqrt{t}$，故有

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{t}\cdot|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{t}}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{\sqrt{t}}{2}\sqrt{\frac{4t^2}{(t-1)^2}+4\frac{t(t+1)}{t-1}}=\frac{t\sqrt{t^2+t-1}}{t-1}.$$ ················10 分

令 $u=t-1$，则 $u>0$．利用基本不等式，得

$$S_{\triangle AOB}=\frac{(u+1)\sqrt{(u+1)^2+u}}{u}\geq\frac{2\sqrt{u}\sqrt{4u+u}}{u}=2\sqrt{5}.$$

当 $u=1$（即 $t=2$）时，$S_{\triangle AOB}$ 取到最小值 $2\sqrt{5}$． ················20 分

11.（本题满分 20 分）设正整数数列 $\{a_n\}$ 同时具有以下两个性质：

(i) 对任意正整数 k，均有 $a_{2k-1}+a_{2k}=2^k$；

(ii) 对任意正整数 m，均存在正整数 $l\leq m$，使得 $a_{m+1}=\sum_{i=l}^{m}a_i$．

求 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}$ 的最大值．

解： 由于 $\{a_n\}$ 为正整数数列，在 (i) 中令 $k=1$ 知 $a_1+a_2=2$，故 $a_1=a_2=1$．

以下证明：对任意正整数$k\geq 2$，有$a_{2k}=2^{k-1}$或$3\times 2^{k-2}$．

根据(ii)，对任意正整数m，显然有$a_{m+1}\geq a_m$．

当$k=2$时，由$a_3+a_4=4$及$a_4\geq a_3$知$a_4=2$或3，故结论成立．

假设k时结论成立，考虑$k+1$的情形．

由(ii)知存在正整数$l\leq 2k$，使得$a_{2k+1}=\sum_{i=l}^{2k}a_i$．

当$l\leq 2k-1$时，由(i)及$a_{2k+2}\geq a_{2k+1}$，可知

$$2^k=a_{2k-1}+a_{2k}\leq a_{2k+1}\leq\frac{a_{2k+1}+a_{2k+2}}{2}=2^k,$$

于是不等号均为等号，这表明$l=2k-1$，$a_{2k+1}=a_{2k+2}=2^k$，符合结论．

当$l=2k$时，$a_{2k+1}=a_{2k}$，$a_{2k+2}=2^{k+1}-a_{2k}$．

若$a_{2k}=2^{k-1}$，则$a_{2k+2}=3\times 2^{k-1}$，符合结论；

若$a_{2k}=3\times 2^{k-2}$，则$a_{2k+1}=3\times 2^{k-2}$，$a_{2k+2}=5\times 2^{k-2}$，此时

$$a_{2k+1}<a_{2k+2}<a_{2k}+a_{2k+1},$$

故对任意正整数$l_1\leq 2k+1$，总有$a_{2k+2}\neq\sum_{i=l_1}^{2k+1}a_i$，与(ii)矛盾，即该情形不会发生．

综上，$k+1$时结论也成立．从而由数学归纳法知结论成立．

……………10分

从上述证明进一步可见，对任意正整数$k\geq 2$，$a_{2k}=3\times 2^{k-2}$与$a_{2k+2}=3\times 2^{k-1}$不能同时成立．因此，对任意正整数t，均有

$$a_{4t}+a_{4t+2}\leq\max\{3\times 2^{2t-2}+2^{2t},2^{2t-1}+3\times 2^{2t-1}\}=2^{2t+1}$$

所以

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}\le a_2+\sum_{t=1}^{505}2^{2t+1}=1+8\cdot\frac{2^{1010}-1}{4-1}=\frac{2^{1013}-5}{3}. \quad ①$$

………………15 分

当 $a_1=a_2=1$，且对任意正整数 t，取 $a_{4t-1}=a_{4t}=a_{4t+1}=2^{2t-1}$, $a_{4t+2}=3\times2^{2t-1}$ 时，易验证数列 $\{a_n\}$ 具有性质 (i)、(ii)，并且①取到等号.

从而 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2022}$ 的最大值为 $\frac{2^{1013}-5}{3}$. ………………20 分

一．（本题满分 40 分）设实数 a,b,c,d 满足 $a\ge b, c\ge d$，且

$$|a|+2|b|+3|c|+4|d|=1.$$

记 $P=(a-b)(b-c)(c-d)$．求 P 的最小值与最大值．

解： 先求 P 的最小值．根据条件，得

$$|P|\le(|a|+|b|)(|b|+|c|)(|c|+|d|)=\frac{1}{2}(|a|+|b|)(|b|+|c|)(2|c|+2|d|)$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{(|a|+|b|)+(|b|+|c|)+(2|c|+2|d|)}{3}\right)^3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{|a|+2|b|+3|c|+2|d|}{3}\right)^3\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{54}. \quad ①$$

……………10 分

当 $d=0, a=-b=c>0$，且 $a-2b+3c=1$，即 $(a,b,c,d)=\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},0\right)$ 时，①中各处不等式均取等，且此时 $P<0$，所以 P 的最小值为 $-\frac{1}{54}$．

……………20 分

再求 P 的最大值．仅需考虑 $b\ge c$ 的情况（否则，若 $b<c$，则有 $P\le0$）．

令 $x=a-b, y=b-c, z=c-d\ (x,y,z\ge0)$，则 $P=xyz$．

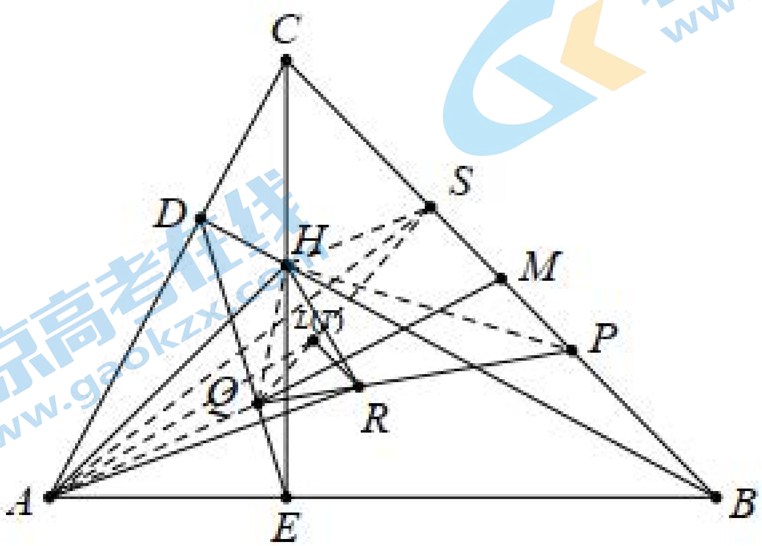
由于

$$\begin{aligned}1&=|a|+2|b|+3|c|+4|d|\\&\ge(|a|+|d|)+2(|b|+|d|)+(|c|+|d|)\\&\ge|a-d|+2|b-d|+|c-d|\\&=(x+y+z)+2(y+z)+z=x+3y+4z\\&\ge3\sqrt[3]{x\cdot3y\cdot4z}=3\sqrt[3]{12P}, \quad ②\end{aligned}$$

即有 $P\le\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{1}{324}$．……………30 分

当 $c=0$ 且 $x=3y=4z=\frac{1}{3}$，即 $(a,b,c,d)=\left(\frac{4}{9},\frac{1}{9},0,-\frac{1}{12}\right)$ 时，②中各处不等式均取等，所以 P 的最大值为 $\frac{1}{324}$．……………40 分

二.（本题满分 40 分） 如图，在锐角$\triangle ABC$中，H为垂心，BD, CE为高，M为边BC的中点，在线段BM, DE上各取一点P, Q，并在线段PQ上取一点R，使得$\dfrac{BP}{EQ}=\dfrac{CP}{DQ}=\dfrac{PR}{QR}$．设$L$为$\triangle AHR$的垂心．证明：直线$QM$平分线段$RL$．



证明： 由垂心的性质易知$\triangle HBC \backsim \triangle HED$，又$\dfrac{BP}{EQ}=\dfrac{CP}{DQ}$，故$P, Q$为这两个相似三角形的对应点，所以$\dfrac{HP}{HQ}=\dfrac{BC}{DE}$，且$\angle BHP=\angle EHQ$．

由条件及比例性质知

$$\frac{PR}{QR}=\frac{BP+CP}{EQ+DQ}=\frac{BC}{DE}=\frac{HP}{HQ},$$

故HR平分$\angle PHQ$，从而HR也平分$\angle BHE$．　　……………10 分

在线段CM上取点S，使得$MS=MP$，过点R作BC的平行线，与QS相交于点T，下证T与L重合．

因为$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，且$\dfrac{BS}{CS}=\dfrac{CP}{BP}=\dfrac{DQ}{EQ}$，故$S, Q$是相似的对应点．

……………20 分

所以$\dfrac{AS}{AQ}=\dfrac{BC}{DE}$，且$\angle CAS=\angle EAQ$．

注意到$RT \parallel PS$，有

$$\frac{AS}{AQ}=\frac{BC}{DE}=\frac{PR}{QR}=\frac{ST}{QT},$$

故 AT 平分 $\angle SAQ$，从而 AT 也平分 $\angle BAC$． ……………30 分

所以

$$\angle AHR+\angle HAT=\left(\angle AHE+\frac{1}{2}\angle BHE\right)+\left(\angle HAE-\frac{1}{2}\angle DAE\right)$$

$$=\angle AHE+\angle HAE=90^{\circ},$$

故 $AT\perp HR$．又由 $RT\parallel BC$ 及 $BC\perp AH$，得 $RT\perp AH$，故 T 为 $\triangle AHR$ 的垂心，从而 T 与 L 重合．

最后，由 $\triangle QRL\backsim\triangle QPS$，且 M 是 SP 的中点，可知 QM 平分线段 RL．

……………40 分

三.（本题满分 50 分）是否存在一个无限正整数集合 S，具有下述性质：对任意 $x, y, z, w \in S$, $x<y$, $z<w$，若有序对 $(x, y) \neq (z, w)$，则 $xy+2022$ 与 $zw+2022$ 互素？

解：存在.

记 $k=2022$．对任意整数 $n \geq 2$，若正整数 $x_1<x_2<\cdots<x_n$， $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均与 k 互素，且 C_n^2 个数 $x_i x_j+k(1 \leq i<j \leq n)$ 两两互素，则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 具有性质 $\mathbf{P}_n$.

我们归纳地构造一列正整数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$，使得对任意整数 $n \geq 2$，该数列的前 n 项具有性质 $\mathbf{P}_n$，这样取 $S=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ 即满足条件. ················10 分

令 $a_1=1, a_2=k+1$，显然 a_1, a_2 具有性质 $\mathbf{P}_2$.

假设已经取了 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 具有性质 $\mathbf{P}_n$，则令

$$a_{n+1}=\prod_{1 \leq i<j \leq n} f(a_j-a_i) \cdot(a_i a_j+k),$$

其中对任意正整数 N， $f(N)$ 定义为 N 的与 k 互素的最大正约数.

················20 分

以下验证 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 具有性质 $\mathbf{P}_{n+1}$.

显然 $a_{n+1} \geq a_1 a_n+k>a_n$.

对任意 $i, j(1 \leq i<j \leq n)$， $f(a_j-a_i)$ 与 k 互素，又由 a_i, a_j 与 k 互素知 $a_i a_j+k$ 与 k 互素．所以 a_{n+1} 与 k 互素.

对任意 $i, j(1 \leq i<j \leq n)$ 及 $l(1 \leq l \leq n)$，由于 $(a_i a_j+k) \mid a_{n+1}$，由最大公约数的性质可知

$$\gcd(a_i a_j+k, a_l a_{n+1}+k)=\gcd(a_i a_j+k, k)=\gcd(a_i a_j, k)=1,$$

这里用到 $a_i a_j$ 与 k 互素. ················30 分

对任意 $1 \leq i<j \leq n$，由最大公约数的性质可知

$$\begin{aligned}
&\gcd(a_i a_{n+1}+k, a_j a_{n+1}+k)=\gcd\left(a_i a_{n+1}+k, (a_j-a_i) a_{n+1}\right) \\
&=\gcd(a_i a_{n+1}+k, a_j-a_i) \text{（由于 } a_{n+1} \text{ 与 } k \text{ 互素，故 } a_i a_{n+1}+k \text{ 与 } a_{n+1} \text{ 互素）} \\
&=\gcd\left(a_i a_{n+1}+k, f(a_j-a_i)\right)
\end{aligned}$$

（由于$a_ia_{n+1}+k$与k互素，可从a_j-a_i中去掉k的素因子）

$=\gcd\left(k, f(a_j-a_i)\right)=1$（用到$f(a_j-a_i)|a_{n+1}$）.

又结合$a_1,a_2,\cdots,a_n$具有性质$\mathbf{P}_n$，可知$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$具有性质$\mathbf{P}_{n+1}$.

这样归纳地得到无限序列$a_1,a_2,a_3,\cdots$，从而集合$S=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$满足要求.

………………50 分

四．（本题满分 50 分） 给定实数r，甲、乙两人玩如下的游戏.

黑板上写着一个含有三个绝对值的算式：

$$S=|\square-\square|+|\square-\square|+|\square-\square|,$$

其中 6 个空格"□"中尚未填数．每一回合，甲选取区间$[0,1]$中的一个实数（不同回合中可以选相同的数），乙将该数填在某个空格之中．经过六个回合之后所有 6 个空格中均填了数，S的值也随之确定．若$S\geq r$，则甲胜，否则乙胜.

求所有的实数r，使得甲有获胜策略.

解：当$r\le\frac{15}{8}$时，甲有获胜策略；当$r>\frac{15}{8}$时，乙有获胜策略.

首先讨论 4 个空格的情况：$T=|\square-\square|+|\square-\square|$.

甲有策略使得$T\ge\frac{3}{2}$：甲先选 0（选 1 也可以），乙第一步选择无实际意义，$T=|0-\square|+|\square-\square|$. 甲再选 1. 若乙将其与 0 填在同一个绝对值中，甲再依次选 0、1，可使$T=2$；若乙将其填在另一个绝对值中，$T=|0-\square|+|1-\square|$，甲再选$\frac{1}{2}$，则某个绝对值得到$\frac{1}{2}$，最后一个数甲可以使另一个绝对值为1，此时$T=\frac{3}{2}$.

乙有策略使得$T\le\frac{3}{2}$：若甲选的前两个数相差不超过$\frac{1}{2}$，则乙将它们填在同一个绝对值中，这样一个绝对值不超过$\frac{1}{2}$，而另一个绝对值不超过1，从而$T\le\frac{3}{2}$. 若甲选的前两个数相差超过$\frac{1}{2}$，设它们为a,b，且$b-a>\frac{1}{2}$，则乙将它们填在不同的绝对值中，设$T=|a-\square|+|b-\square|$. 易知$a\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$b\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，故甲选的第三个数$c$必满足$|a-c|\le\frac{1}{2}$（当$c\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时）或$|b-c|\le\frac{1}{2}$（当$c\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时），于是乙可以使一个绝对值不超过$\frac{1}{2}$，而另一个绝对值不超过1，从而$T\le\frac{3}{2}$.

……………10 分

回到原问题.

甲有策略使得$S\ge\frac{15}{8}$：

甲依次选 0、1，若乙将它们填在同一个绝对值中，由T的讨论知甲可以使得$S \ge 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}>\frac{15}{8}$．以下不妨设乙将它们填在了不同的绝对值中．

甲再选$\frac{3}{8}$．若乙将$\frac{3}{8}$填在和 0 或 1 同一个绝对值中，则由T的讨论知甲可以使得$S \ge \frac{3}{8}+\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$．以下不妨设乙将$\frac{3}{8}$填在了第三个绝对值中，则

$$S=|0-\square|+|1-\square|+\left|\frac{3}{8}-\square\right|.$$

甲选$\frac{6}{8}$．若乙放在第一个绝对值中，则甲选 0、0，得$S=\frac{6}{8}+1+\frac{3}{8}=\frac{17}{8}>\frac{15}{8}$；若乙放在第二个绝对值中，则甲选 1、1，得$S=1+\frac{2}{8}+\frac{5}{8}=\frac{15}{8}$；若乙放在第三个绝对值中，由$T$的讨论，甲可使前两个绝对值之和不小于$\frac{3}{2}$，故$S \ge \frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$．

……………30 分

乙有策略使得$S \le \frac{15}{8}$：

若甲选的前两个数相差不超过$\frac{3}{8}$，或所选的第三个数与前两个数之一相差不超过$\frac{3}{8}$，则乙可在前三回合内将两个相差不超过$\frac{3}{8}$的数填在同一个绝对值中，由T的讨论知乙可使$S\le\frac{3}{8}+\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$．

若甲选的前三个数两两相差均大于$\frac{3}{8}$，则乙将三个数填在不同的绝对值中，现假设$S=|a-\square|+|b-\square|+|c-\square|$，$b-a>\frac{3}{8}$，$c-b>\frac{3}{8}$．由对称性，不妨设$b\le\frac{1}{2}$．

设甲选的第四个数为d．

情形一：$d\in\left[c-\frac{2}{8},1\right]$．乙将$d$与$c$放在同一个绝对值中，由于$c>\frac{6}{8}$，故$|c-d|\le\frac{2}{8}$，而前两个绝对值之和不超过$(1-a)+(1-b)=2-(a+b)\le 2-\frac{3}{8}=\frac{13}{8}$，故$S\le\frac{2}{8}+\frac{13}{8}=\frac{15}{8}$．

情形二：$d\in\left[b-\frac{3}{8},b+\frac{3}{8}\right]$，乙将$d$与$b$放在同一个绝对值中，则$|b-d|\le\frac{3}{8}$．

由于$a\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$c\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，由$T$的讨论知乙可以使剩下两个绝对值之和不超过$\frac{3}{2}$，从而$S\le\frac{3}{8}+\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$．

情形三：$d\in\left[0, a+\frac{3}{8}\right]$．乙将 d 与 a 放在同一个绝对值中，由于 $a<\frac{2}{8}$，则 $|a-d|\le\frac{3}{8}$．由于 $b\in\left[0, \frac{1}{2}\right]$，$c\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$，同情形二知乙可以使 $S\le\frac{15}{8}$．

最后注意到 $\left[0, a+\frac{3}{8}\right]\cup\left[b-\frac{3}{8}, b+\frac{3}{8}\right]\cup\left[c-\frac{2}{8}, 1\right]=[0, 1]$，上述三种情形包括了 d 的所有可能性（有可能会重叠，此时可以任意选择某个情形来做）．

综上所述，使甲有获胜策略的 r 是不超过 $\frac{15}{8}$ 的所有实数．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。