2023年“三新”协同教研共同体高三联考

数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z_1=2-3\mathrm{i}$，$z_2=\mathrm{i}z_1$，则 z_1+z_2 的实部为

A. -1　　B. 5　　C. 1　　D. -5

2. 抛物线 $y^2=\frac{1}{3}x$ 的准线方程为

A. $y=-\frac{1}{12}$　　B. $x=-\frac{1}{6}$　　C. $x=-\frac{1}{12}$　　D. $y=-\frac{1}{6}$

3. 若奇函数 $f(x)=\begin{cases}g(x)+1, x<0,\\ x^2+\lg x, x>0,\end{cases}$ 则 $g(-10)=$

A. -102　　B. 102　　C. -101　　D. 101

4. 现有一个圆台形的杯子，杯口的内径为8 cm，杯底的内径与杯中盛满溶液时的液面高度均为10 cm，当杯中盛满溶液，且该溶液的密度 $\rho=1\ \mathrm{g/cm^3}$ 时，杯中溶液的质量为

A. $\frac{2440\pi}{3}$ g　　B. $\frac{800\pi}{3}$ g

C. $\frac{610\pi}{3}$ g　　D. $\frac{650\pi}{3}$ g

5. 现有6个不同的生肖吉祥物，分1个给老师，其他5个分给3位学生，每位学生至少分到1个，则这6个生肖吉祥物的分配方法共有

A. 360种　　B. 900种　　C. 720种　　D. 1800种

6. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}|$ 的最大值为

A. $2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 4

7. 已知函数 $f(x)=4\sin x\cos x$，$g(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，则

A. 当 $f(x)$ 取得最大值时，$g(x)$ 取得最小值

B. 当 $g(x)$ 取得最大值时，$f(x)=-1$

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称

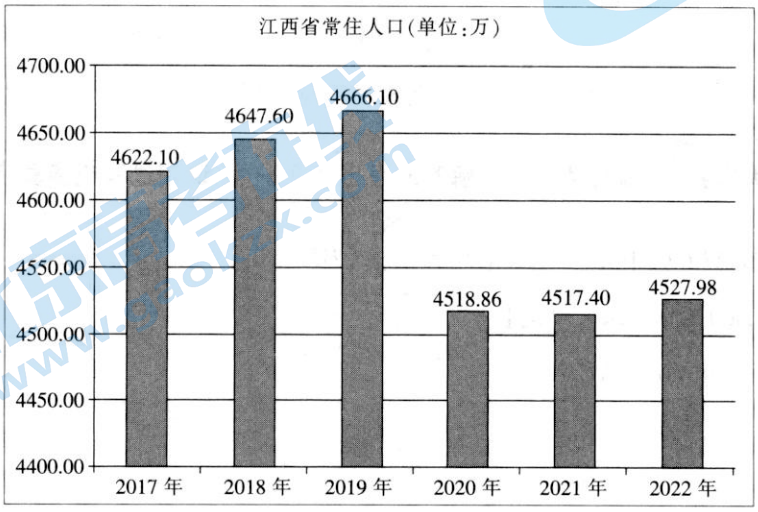
D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

8. 已知函数 $f(x)=x^3(\ln x)^2-m(x^2+x)\ln x+m^2$ 恰有 4 个零点，则 m 的取值范围是

A. $(-\frac{1}{e},0)$　　B. $(-\frac{1}{2e},0)$　　C. $(-\frac{1}{e},-\frac{1}{2e})$　　D. $(-\frac{1}{2e},+\infty)$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 江西省 2017 年到 2022 年常住人口变化图如图所示，则



A. 江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口在 2019 年取得最大值

B. 江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口的极差为 148.70 万

C. 江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口的中位数为 4527.98 万

D. 江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口的第 80 百分位数为 4647.60 万

10. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_8=15$，下列结论正确的是

A. a_5 是定值　　B. $\{a_n\}$的前 9 项和为 54

C. a_2a_8 的最大值为 25　　D. 若 $a_2a_8>0$，则$\frac{1}{a_2}+\frac{4}{a_8}$的最小值为$\frac{9}{10}$

11. 已知曲线 C：$y=\sqrt{1-(|x|-1)^2}$，斜率为 k 的直线 l 经过点 $A(3,3)$，下列结论正确的是

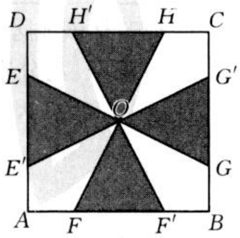
A. C 的周长为 π

B. 若 l 与 C 恰有 3 个公共点，则 k 的取值范围为$(\frac{6-2\sqrt{3}}{3},1)$

C. 若 l 与 C 恰有 2 个公共点，则 k 的取值范围为$(\frac{12-2\sqrt{6}}{15},\frac{3}{5}]\cup\{1,\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\}$

D. 若 l 与 C 恰有 1 个公共点，则 k 的取值范围为$(\frac{3}{5},\frac{6-2\sqrt{3}}{3})\cup(1,3)\cup\{\frac{12-2\sqrt{6}}{15}\}$

12. 如图，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中剪掉四个阴影部分的等腰三角形，其中 O 为正方形对角线的交点，$OE=OE'=OF=OF'=OG=OG'=OH=OH'$，将其余部分折叠围成一个封闭的正四棱锥，若该正四棱锥的内切球半径为$\frac{1}{2}$，则该正四棱锥的表面积可能为



A. 12　　B. $4+4\sqrt{5}$

C. 8　　D. $5+2\sqrt{5}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若集合 $A=\{x\mid x^2-2x-24\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid m^2<x<m^2+2\}$，$A\cap B=\varnothing$，则 m^2 的最小值为 ▲ .

14. 若随机变量 $X\sim B(100,p)(0<p<\frac{1}{2})$，且 $D(X)=16$，则 $E(X)=$ ▲ .

15. 请写出一个同时满足下列两个条件的函数：$f(x)=$ ▲ .

①$f(x)\cdot f(-x)=-x^2$；②函数 $y=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

16. 已知双曲线 C 的两个焦点为 F_1,F_2，P 为 C 上一点，$|PF_1|=|F_1F_2|$，$\angle PF_1F_2=36°$，则 C 的离心率为 ▲ .

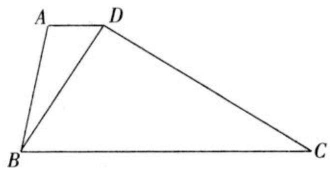
四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$BD=5$，$\angle CBD=60°$.

(1)若 $\sin\angle BCD=\frac{1}{4}$，求 CD 的长；

(2)若 $AD=2$，求 $\cos\angle ABD$.

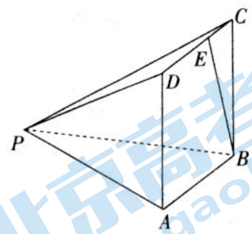


18.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=3$，$PD=4$，$PC=5$.

(1)证明：平面 $PCD\perp$ 平面 PAD.

(2)若 $AD\perp PA$，$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$，求直线 BE 与平面 PCD 所成角的正弦值.



19.（12 分）

已知某地居民中青少年、中年人、老年人的人数比例为 3 : 4 : 3，假设该地居民选择寒假旅游地相互独立，且他们寒假去江西庐山、三清山旅游的概率如下表所示：

	青少年	中年人	老年人
只去庐山旅游	0.1	0.3	0.2
只去三清山旅游	0.2	0.2	0.3
庐山、三清山都去旅游	0.05	0.1	0.1

(1)若从该地居民（仅指青少年、中年人、老年人）中任选一人，求此人寒假去庐山旅游的概率；

(2)若甲、乙分别是该地居民中的一位中年人、老年人，记这两人中寒假去三清山旅游的人数为 X，求 X 的分布列.

20.(12 分)

已知点 $A_1(1,2)$,$A_2(2,3)$,设 $A_n(a_n,b_n)(n\in\mathbf{N}^*)$,当 $n\geqslant 3$ 时,线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点为 B_n,B_n 关于直线 $y=x$ 的对称点为 A_n. 例如,B_3 为线段 A_1A_2 的中点,则 $B_3(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$,$A_3(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$.

(1)设 $c_n=a_{n+1}+b_{n+1}-a_n-b_n$,证明:$\{c_n\}$是等比数列.

(2)求数列$\{a_n+b_n\}$的通项公式.

21.(12 分)

过点 P 作 x 轴的垂线,垂足为 E,且该垂线与抛物线 $x^2=-4y$ 交于点 F,$|PE|^2+|EF|=1$. 记动点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)试问 C 为何种圆锥曲线?说明你的理由.

(2)圆 Q 是以点 $Q(1,0)$ 为圆心,$r(0<r<1)$为半径的圆,过点 $B(0,-1)$作圆 Q 的两条切线,这两条切线分别与 C 相交于点 M,N(异于点 B). 当 r 变化时,是否存在定点 G,使得直线 MN 恒过点 G?若存在,求 G 的坐标;若不存在,请说明理由.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=(1+x)^m-mx-1$,$x\in(-1,+\infty)$,$m>0$ 且 $m\neq 1$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若 $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$,$a\sin x<(1+\cos^2 x)^{\sin x}$,求 a 的取值范围;

(3)证明:当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$,且 $n\in\mathbf{N}$,$n\geqslant 2$ 时,$\frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}>\frac{1}{n!}$恒成立.