湖南省2024届高三九校联盟第一次联考

数学参考答案

命题学校：湖南师大附中　审题学校：武冈市一中

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	B	B	D	C	D

1．D　**【解析】**$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，而 $B=\{1,2\}$，若 $a=0$ 时，$A=\varnothing$，满足条件；若 $a\neq 0$ 时，$A=\left\{-\frac{1}{a}\right\}$，要使 $A\subseteq B$，只需 $-\frac{1}{a}=1$，或 $-\frac{1}{a}=2$，所以 $a=-1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$，所以满足条件的实数 a 有3个，故选D．

2．C　**【解析】**由复数 $z=m^2+m-2-(m-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数，得 $\begin{cases}m^2+m-2=0,\\m-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $m=-2$．故选C．

3．A　**【解析】**因为 $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)}=\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，即 $\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1}{4}$，两边平方可得 $\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=1-\sin 2\theta=\dfrac{1}{16}$，解得 $\sin 2\theta=\dfrac{15}{16}$．故选A．

4．B　**【解析】**设第 n 年的维修保养费为 a_n 万元，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，该机的年平均耗费为 p，据题意，数列 $\{a_n\}$ 是首项为12，公差为4的等差数列．则 $p=\dfrac{S_n+98}{n}=\dfrac{1}{n}\left[12n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 4+98\right]=2n+\dfrac{98}{n}+10\geqslant 2\sqrt{2n\cdot\dfrac{98}{n}}+10=38$．当且仅当 $2n=\dfrac{98}{n}$，即 $n=7$ 时 p 取最小值38．所以这台冰激凌机的使用年限是7年，故选B．

5．B　**【解析】**在 $y=g(x)$ 的图象上任取一点 $(x,g(x))$，它关于 $x=1$ 的对称点为 $(2-x,g(x))$．故点 $(2-x,g(x))$ 在 $y=f(x)$ 的图象上，从而 $g(x)=f(2-x)=\sqrt{3}\sin\left[\frac{\pi}{4}(2-x)-\frac{\pi}{3}\right]=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)$．当 $0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$ 时，$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，由 $y=\cos t$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减可知，$y=g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{4}{3}\right]$ 上的最大值为 $g(x)_{\max}=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选B．

6．D　**【解析】**由题意知正八面体的棱为原正四面体每个侧面三角形的中位线，故正八面体由棱长为2的两个正四棱锥构成，正四棱锥的底面是边长为2的正方形，取正方形一组对边中点，作出轴截面，利用相似或者等面积可算出内切球半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故内切球体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3=\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi$，故选D．

7．C　**【解析】**$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{n}+\frac{2}{9}\cdot(-\boldsymbol{m})+\frac{1}{9}\cdot(-\boldsymbol{n})+\frac{1}{3}\cdot(-\boldsymbol{m})=-\frac{5}{9}\boldsymbol{m}+\frac{8}{9}\boldsymbol{n}$，故选C．

8．D　**【解析】**设 $AB=x$，内切圆圆心为 I，内切圆在 BF_2，AF_2 上的切点分别为 U，V，由 $|BF_1|=a$ 及双曲线的定义可知，$|BF_2|=3a$，$|AF_2|=x-a$，$|F_2U|=|F_2V|=\frac{1}{2}(|BF_2|+|AF_2|-|AB|)=a=r$，故四边形 IUF_2V 是正方形，得 $AF_2\perp BF_2$，于是 $|BF_2|^2+|AF_2|^2=|AB|^2$，故 $x^2=9a^2+(x-a)^2$，所以 $x=5a$，于是 $\cos\angle F_1BF_2=-\frac{3}{5}$，在 $\triangle F_1BF_2$ 中，由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1|\cdot|BF_2|\cdot\cos\angle F_1BF_2=\frac{68}{5}a^2$，从而 $4c^2=\frac{68}{5}a^2$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{85}}{5}$．故选D．

二、选择题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

题 号	9	10	11	12
答 案	BC	AD	AC	ACD

9. BC 【解析】对于 A,易知 $D(\xi)=8\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$,而 $\eta=2\xi+1$,所以 $D(\eta)=2^2\times D(\xi)=6$,A 错误;对于 B,共有 7 个数据,而 $7\times60\%=4.2$,故第 60 百分位数为 9,B 正确;对于 C,若样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 2,则 $3x_1+2,3x_2+2,\cdots,3x_n+2$ 的平均数为 $3\times2+2=8$,C 正确;对于 D,由古典概型可知:从 51 个体中抽取 2 个个体,每个个体被抽到的概率都是 $\frac{2}{51}$,D 错误.

10. AD 【解析】由题意知,与两圆均有公共点,且斜率最大的直线恰为那条两圆斜率为正的内公切线,由相似比可知其与 x 轴交于 $\left(\frac{5}{4},0\right)$,进而可求得其斜率为 $\frac{4}{3}$,选项 A 正确. 与 I_1,I_2 均有公共点的圆的半径可以任意大(无最大值),选项 B 错误. 向 I_1,I_2 引切线,切线长相等的点的轨迹是直线 $x=\frac{17}{10}$,选项 C 错误. 设 I_1,I_2 的圆心分别为 O_1,O_2,点 P 对 I_1 切线的夹角等于点 P 对 I_2 切线的夹角,于是由相似三角形知 $\frac{PO_1}{PO_2}=\frac{1}{3}$,可得到点 P 的轨迹是一个圆,选项 D 正确.

11. AC 【解析】因为 $f(2\pi-x)=\cos(2\pi-x)+\frac{1}{\cos(4\pi-2x)}=\cos x+\frac{1}{\cos 2x}=f(x)$,故 A 正确. 因为 $f(0)=2$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$,故 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 中心对称,B 错误. 由 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2\cos^2x-1}=\frac{2\cos^3x-\cos x+1}{2\cos^2x-1}=\frac{(\cos x+1)(2\cos^2x-2\cos x+1)}{2\cos^2x-1}=0$,得 $\cos x=-1$,即 $x=(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$,故 $f(x)$ 的所有零点为 $(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$. C 正确. 因为 $f(x+\pi)=\cos(x+\pi)+\frac{1}{\cos(2x+2\pi)}=-\cos x+\frac{1}{\cos 2x}$,故 $f(x+\pi)=f(x)$ 不恒成立,故 D 错误.

12. ACD 【解析】$f'(x)=2x-1$,所以 $f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线方程为:$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$,令 $y=0$,得 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-x_n-6}{2x_n-1}=\frac{x_n^2+6}{2x_n-1}$,故 A 正确. $\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-3}=\frac{\frac{x_n^2+6}{2x_n-1}+2}{\frac{x_n^2+6}{2x_n-1}-3}=\left(\frac{x_n+2}{x_n-3}\right)^2$,故 $\ln\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-3}=2\ln\frac{x_n+2}{x_n-3}$,即 $a_{n+1}=2a_n$,所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项,2 为公比的等比数列,故 B 错误,C 正确,所以 $S_{2023}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^{2023}-1$,D 正确.

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. $-\frac{1}{2}$ 【解析】$f(-x)=\log_4(4^{-x}+1)-mx=\log_4\left(\frac{1}{4^x}+1\right)-mx=\log_4\frac{4^x+1}{4^x}-mx=\log_4(4^x+1)-(m+1)x$,因为 $f(x)$ 为偶函数,则 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=f(x)$ 恒成立,从而 $-(m+1)x=mx$ 恒成立,即 $(2m+1)x=0$ 恒成立,所以 $m=-\frac{1}{2}$.

14. $\sqrt{2}$ 【解析】由题意,$a+b=1$,则 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=1+2\sqrt{ab}$,$\because a+b\geqslant2\sqrt{ab}$,$\therefore 1\geqslant2\sqrt{ab}$,$\therefore(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant2$,$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$.

15. 20 【解析】公差为 -1 时,有 987,876,…,210 共 8 个;公差为 -2 时,975,864,…,420 共 6 个;公差为 -3 时,963,852,741,630 共 4 个;公差为 -4 时,951,840 共 2 个. 所以一共有 $8+6+4+2=20$ 个.

16. $\left(0,\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ 【解析】共有如下 6 种拼图方式，在图 2～图 6 中，图 4 表面积最小.

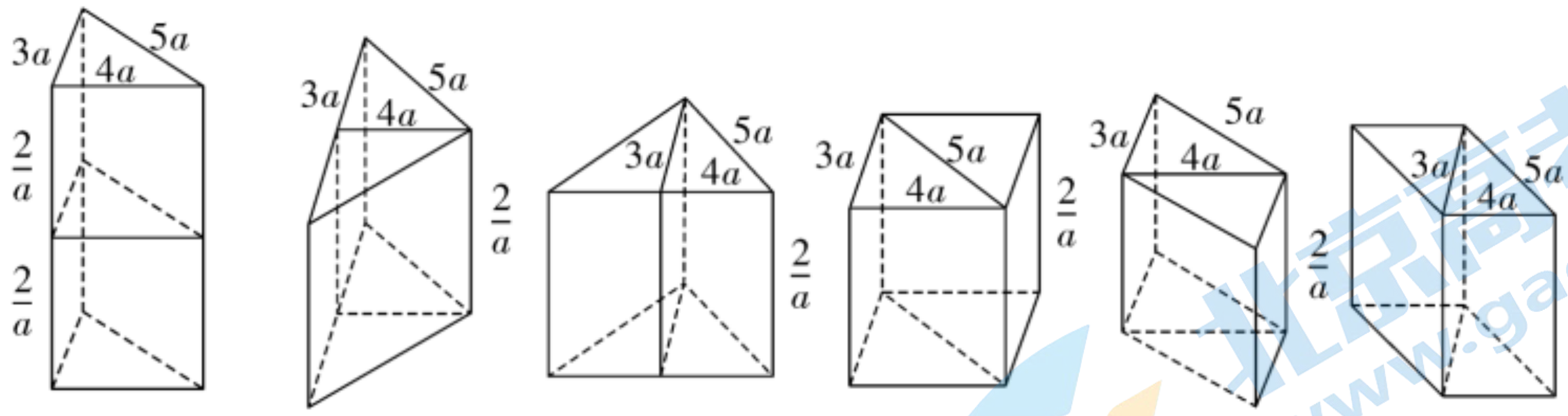
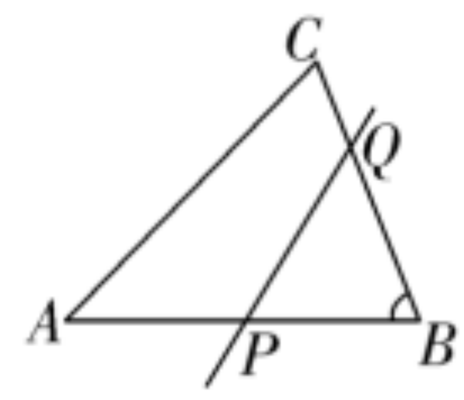


图1　图2　图3　图4　图5　图6

据题意，$S_4<S_1$，则 $14a\times\frac{2}{a}+12a^2\times2<12a\times\frac{4}{a}+12a^2$，解得 $0<a<\frac{\sqrt{15}}{3}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】(1)**方法一：** 由已知 $2\sin A\cos B=\sin C\cos B+\sin B\cos C$，



即 $2\sin A\cos B=\sin A$， ………………………………………… 2 分

$\because \sin A\neq0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$，

又 $\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 4 分

方法二： $\because b\cos C+c\cos B=a$，$\therefore 2a\cos B=a$， ………………………… 2 分

即 $\cos B=\frac{1}{2}$，$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………… 4 分

(2) $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$， ………………… 6 分

$\therefore S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}PB\cdot BQ\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore PB\cdot BQ=3$. ………………………………………… 8 分

在 $\triangle BPQ$ 中，$PQ^2=PB^2+QB^2-2\cdot PB\cdot QB\cos B=PB^2+QB^2-PB\cdot QB\geqslant2PB\cdot QB-PB\cdot QB=PB\cdot QB=3$，

当且仅当 $PB=QB=\sqrt{3}$ 时上式等号成立，

$\therefore |PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$. ………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)连接 AC，AC 交 BD 于点 O.

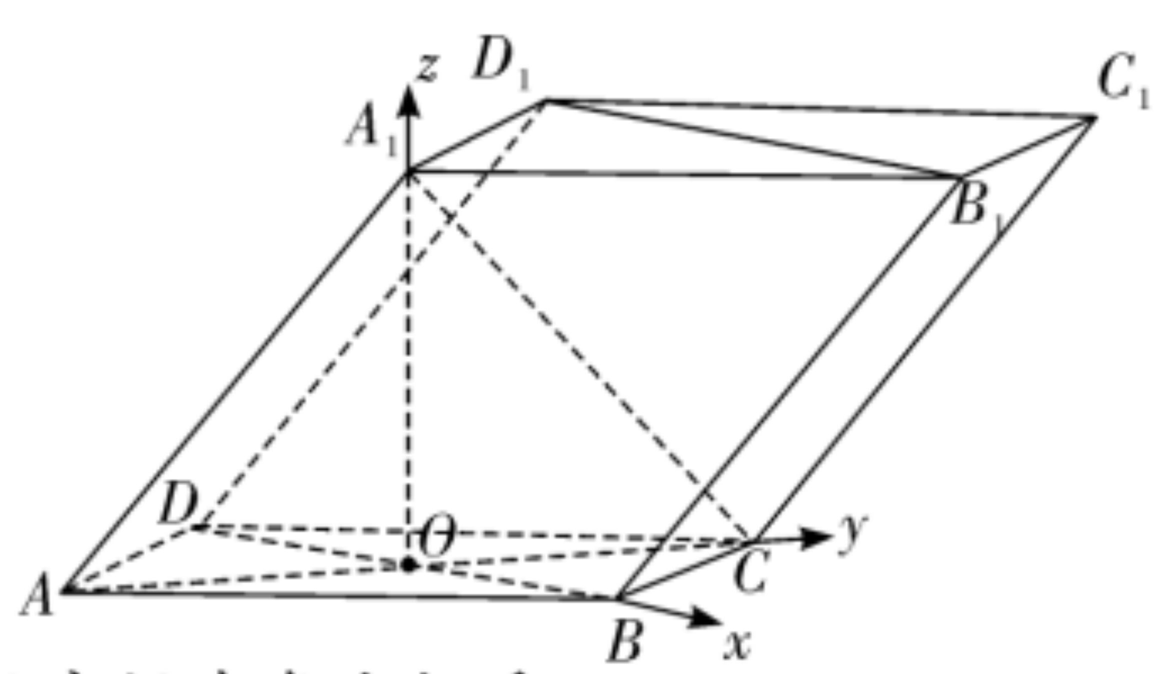
因为 $A_1C\perp$ 平面 BB_1D_1D，所以 $A_1C\perp BD$， …………………………… 1 分

又 $BD\perp AC$，$A_1C\cap AC=C$，所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C. ……………………… 2 分

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $AA_1C\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $A_1C\perp$ 平面 BB_1D_1D，所以 $A_1C\perp BB_1$，

又 $BB_1/\!/AA_1$，所以 $A_1C\perp AA_1$. ………………………… 3 分



在 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1C$ 中，$AA_1=\sqrt{2}$，$AC=2$，所以 $A_1C=\sqrt{2}$.

又 O 为 AC 的中点，所以 $A_1O\perp AC$ 且 $A_1O=1$，……………… 4 分

又平面 $AA_1C\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$. ………… 5 分

故点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离为 $A_1O=1$. ……………………… 6 分

(2)以 O 为原点，分别以 OB,OC,OA_1 所在直线为 x,y,z 轴建立如图所示空间直角坐标系，

则 $B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B_1(1,1,1)$，$A(0,-1,0)$，

$\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$， ………………………………… 8 分

由(1)知，平面 BB_1D_1D 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-1)$， ………………… 9 分

设$\frac{BM}{BB_1}=\lambda(0<\lambda<1)$，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BB_1}=(0,\lambda,\lambda)$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=(1,\lambda+1,\lambda)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，

设$\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$为平面MAC的一个法向量，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x+(\lambda+1)y+\lambda z=0,\\ y=0,\end{cases}$

取$\boldsymbol{n}_2=(\lambda,0,-1)$，…………………………………………………………… 10 分

设平面MAC与平面BB_1D_1D的夹角为θ，

则有$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，…………………………………………… 11 分

解得$\lambda=\frac{1}{2}$，即$\frac{BM}{BB_1}=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由已知$a_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}(n\geqslant2)$，故有$\frac{2}{b_n}+\frac{b_{n-1}}{b_n}=1$，从而$b_n-b_{n-1}=2$， ………………… 2 分

且$b_1=a_1$，$\frac{2}{b_1}+\frac{1}{b_1}=1$，所以$b_1=3$，……………………………………………………………… 3 分

从而$\{b_n\}$是首项为3，公差为2的等差数列. ……………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知，$b_n=2n+1$，所以$c_n=1+\frac{8}{2n(2n+4)}=1+\frac{2}{n(n+2)}=1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. ………………… 7 分

所以$S_n=n+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=n+\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$. ……………………………………………………………………… 8 分

当$n=1$时，$S_1=2-\frac{1}{3}$，$[S_1]=1$. ……………………………………………………………… 9 分

当$n=2$时，$S_2=3-\frac{1}{12}$，$[S_2]=2$. …………………………………………………………… 10 分

当$n\geqslant3$时，$S_n=(n+1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\geqslant(n+1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=(n+1)+\frac{1}{2}-\frac{9}{20}$.

这时$[S_n]=n+1$.

所以$n\geqslant3$时，$T_n=[S_1]+[S_2]+[S_3]+\cdots+[S_n]=1+2+4+5+\cdots+(n+1)=\frac{(n-1)(n+4)}{2}$，

综上，$T_n=\begin{cases}1,n=1,\\ 3,n=2,\\ \frac{(n-1)(n+4)}{2},n\geqslant3.\end{cases}$ …………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)记事件M_1="第一项测试选择了项目A"，M_2="第一项测试选择了项目B"，M_3="第一项测试选择了项目C"，记事件N="第一项测试合格"，由题意知，

$N=M_1N+M_2N+M_3N$，$P(M_1)=P(M_2)=P(M_3)=\frac{1}{3}$，

$P(N|M_1)=\frac{3}{5}$，$P(N|M_2)=\frac{1}{2}$，$P(N|M_3)=\frac{1}{2}$，…………………………………………………… 2 分

又事件M_1N，M_2N，M_3N互斥，则$P(N)=P(M_1N)+P(M_2N)+P(M_3N)$，

即$P(N)=P(M_1)\cdot P(N|M_1)+P(M_2)\cdot P(N|M_2)+P(M_3)\cdot P(N|M_3)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{15}$，

……………………………………………………………………………………………………… 4 分

所以在居民甲第一项测试"合格"的条件下，他第一个项目选择了A的概率为：

$P(M_1|N)=\frac{P(M_1N)}{P(N)}=\frac{P(M_1)\cdot P(N|M_1)}{P(N)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{8}{15}}=\frac{3}{8}$，……………………………………………… 5 分

即已知居民甲第一项测试“合格”，他第一项测试选择的项目是 A 的概率是 $\frac{3}{8}$. ………………………………… 6 分

(2)由居民乙获一等奖的概率为 $\frac{1}{8}$，可知 $a^2b=\frac{1}{8}$. ………………………………………………………… 7 分

则 $P=a^2(1-b)+C_2^1a(1-a)b=a^2+2ab-\frac{3}{8}=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$. …………………………………………… 8 分

令 $P=f(a)=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$，$0<a\leqslant 1$. $f'(a)=2a-\frac{1}{4a^2}=\frac{8a^3-1}{4a^2}=\frac{(2a-1)(4a^2+4a+1)}{4a^2}$. ………………… 9 分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f'(a)<0$；当 $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ 时，$f'(a)>0$.

所以 $f(a)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上是减函数，在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上是增函数. ………………………………………… 10 分

所以 $f(a)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$. 所以 P 的最小值为 $\frac{3}{8}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$，直线 l_{AB}：$y=kx+m$，

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+m\end{cases}$ 可得 $x^2-4kx-4m=0$，$\Delta=16k^2+16m$. ………………………………………………… 1 分

$\because A,B$ 在 y 轴两侧，$\therefore x_1x_2<0$，$\therefore m>0$，$\therefore \Delta>0$，

$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4m$，………………………………………………………………………………………………… 2 分

A 点处的切线方程为 $y=\frac{x_1x}{2}-\frac{x_1^2}{4}$，……………………………………………………………………………… 4 分

同理 B 点处的切线方程为 $y=\frac{x_2x}{2}-\frac{x_2^2}{4}$，

由 $\begin{cases}y=\frac{x_1x}{2}-\frac{x_1^2}{4},\\ y=\frac{x_2x}{2}-\frac{x_2^2}{4}\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2k,\\ y_0=\frac{x_1x_2}{4}=-m,\end{cases}$ ………………………………………………… 5 分

又 $\because Q$ 在直线 $y=-2$ 上，$\therefore -m=-2$，$\therefore m=2$.

$\therefore$ 直线 AB 过定点 $(0,2)$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可得 $Q(2k,-m)$，$\because Q$ 在曲线 $x^2=-2y-2$ 上，

$\therefore 4k^2=2m-2$，$\therefore m\geqslant 1$. …………………………………………………………………………………… 7 分

由(1)可知 $M\left(\frac{x_1}{2},0\right)$，$N\left(\frac{x_2}{2},0\right)$，$\because S_{\triangle MNQ}=\frac{1}{2}m\cdot\frac{|x_1-x_2|}{2}$，…………………………………………… 8 分

$S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}(2k^2+2m)|x_1-x_2|=|k^2+m||x_1-x_2|$，

$\therefore S_{四边形AMNB}=S_{\triangle QAB}-S_{\triangle MNQ}=\frac{1}{4}(4k^2+3m)\cdot|x_1-x_2|=\frac{1}{2}(5m-2)\cdot\sqrt{6m-2}=\frac{1}{2}\sqrt{(5m-2)^2(6m-2)}$，

…… 10 分

令 $f(x)=(5x-2)^2(6x-2)(x\geqslant 1)$，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore f(x)\geqslant 36$，$\therefore S_{四边形AMNB}\geqslant 3$，$\therefore$ 四边形 $AMNB$ 的面积的范围为 $[3,+\infty)$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，直线 l_1 的斜率 $k_1=f'(1)=0$，……………………………………………… 1 分

$g'(x)=a\cos x$，直线 l_2 的斜率 $k_2=f'(0)=a$，直线 l_2 的方程为 $y=ax$，………………………………………… 2 分

又两直线 l_1,l_2 夹角的正切值为 2，故 $a=\pm 2$，…………………………………………………………………… 3 分

令 $\varphi(x)=a\sin x-ax=a(\sin x-x)$，$\varphi'(x)=a(\cos x-1)$，

当 $a=2$，$\varphi'(x)\leqslant 0$，$y=\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，不满足题意；

当 $a=-2$，$\varphi'(x)\geqslant 0$，$y=\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，满足题意.

故 $a=-2$. ……… 5 分

(2)由(1)知 $a=-2$，故 $F(x)=\frac{e^x}{x}-2\sin x, x\in(-\pi,0)$.

$F'(x)=\frac{(x-1)e^x-2x^2\cos x}{x^2}$. …………………………………………………………………………… 6 分

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$F'(x)<0$，故 $F(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，…………………………………………… 7 分

当 $x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 时，令 $h(x)=(x-1)e^x-2x^2\cos x, x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，

$h'(x)=xe^x-4x\cos x+2x^2\sin x=x(e^x-4\cos x+2x\sin x)$， ………………………………………… 8 分

$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

$h(-\pi)=2\pi^2-\frac{\pi+1}{e^\pi}>0, h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)e^{-\frac{\pi}{2}}<0$，

$h(-\pi)h\left(-\frac{\pi}{2}\right)<0$，由零点存在性定理知：$h(x)$ 在 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点，

即 $F'(x)$ 在 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点，该零点即为 x_0，………………………………………………… 9 分

$x\in(-\pi,x_0)$ 时，$h(x)>0$，即 $F'(x)>0$，

$x\in\left(x_0,-\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h(x)<0$，即 $F'(x)<0$，

又 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$F'(x)<0$，故 $F(x)$ 在 $(-\pi,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,0)$ 单调递减，……………………… 10 分

$\because x_0\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore F(x_0)>F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2-\frac{2}{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}=\frac{2(\pi e^{\frac{\pi}{2}}-1)}{\pi e^{\frac{\pi}{2}}}>0$， ……………………………… 11 分

$\because x_0\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore F(x_0)=\frac{e^{x_0}}{x_0}-2\sin x_0<-2\sin x_0<2$，

故 x_0 是函数 $F(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上的唯一的极大值点，且 $0<F(x_0)<2$. ……………………………… 12 分