★启用前注意保密

2024 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数　学

本试卷共 5 页，19 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己所在的市(县、区)、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 记复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，若 $z(1+i)=2-2i$，则 $|\bar{z}|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A=\left\{x\left|x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right.\right\}$，则

A. $A=B$　　B. $A\cap B=\varnothing$　　C. $A\subseteq B$　　D. $A\supseteq B$

3. 双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的顶点到其渐近线的距离为

A. $\sqrt{3}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 过 $A(-1,0)$，$B(0,3)$，$C(9,0)$ 三点的圆与 y 轴交于 M，N 两点，则 $|MN|=$

A. 3　　B. 4　　C. 8　　D. 6

5. 假设甲和乙刚开始的“日能力值”相同，之后甲通过学习，“日能力值”都在前一天的基础上进步 2%，而乙疏于学习，“日能力值”都在前一天的基础上退步 1%．那么，大约需要经过(　　)天，甲的“日能力值”是乙的 20 倍．（参考数据：$\lg 102\approx 2.0086$，$\lg 99\approx 1.9956$，$\lg 2\approx 0.3010$）

A. 23　　B. 100　　C. 150　　D. 232

6. “$\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$”是“$\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{3}+1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 分别以锐角三角形 ABC 的边 AB，BC，AC 为旋转轴旋转一周后得到的几何体体积之比为$\sqrt{3}:\sqrt{6}:2$，则 $\cos B=$

A. $\frac{5\sqrt{3}}{12}$　　B. $\frac{5\sqrt{2}}{12}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{12}$

8. 已知集合 $A=\left\{-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 2,\ 3\right\}$，若 a，b，$c\in A$ 且互不相等，则使得指数函数 $y=a^x$，对数函数 $y=\log_b x$，幂函数 $y=x^c$ 中至少有两个函数在$(0,\ +\infty)$上单调递增的有序数对$(a,\ b,\ c)$的个数是

A. 16　　B. 24　　C. 32　　D. 48

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，则下列结论正确的是

A. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$

B. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3$

D. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的坐标是$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10. 已知偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$为奇函数，且 $f(x)$ 在$[0,\ 1]$上单调递增，则下列结论正确的是

A. $f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$　　B. $f\left(\frac{4}{3}\right)>0$　　C. $f(3)<0$　　D. $f\left(\frac{2\,024}{3}\right)>0$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个顶点都在表面积为 3π 的球面上，点 P 为该球面上的任意一点，则下列结论正确的是

A. 有无数个点 P，使得 $AP/\!/$平面 BDC_1

B. 有无数个点 P，使得 $AP\perp$平面 BDC_1

C. 若点 $P\in$平面 BCC_1B_1，则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积的最大值为$\frac{\sqrt{2}+1}{6}$

D. 若点 $P\in$平面 BCC_1B_1，则 $AP+PC_1$ 的最大值为$\sqrt{6}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 随机变量 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，若 $P(X\geqslant 70)=P(X\leqslant 90)$ 且 $P(72\leqslant X\leqslant 80)=0.3$，则随机变量 X 的第 80 百分位数是________.

13. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调，且满足 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-1$，$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$，则 $\omega=$________.

14. 已知直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 在第一象限交于 P，Q 两点，l 与 x 轴，y 轴分别交于 M，N 两点，且满足 $\frac{|PM|}{|QM|}+\frac{|QM|}{|PM|}=\frac{|PN|}{|QN|}+\frac{|QN|}{|PN|}$，则 l 的斜率为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知 $0<a<1$，函数 $f(x)=\frac{ae^{x-a}}{x}(x\neq 0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.

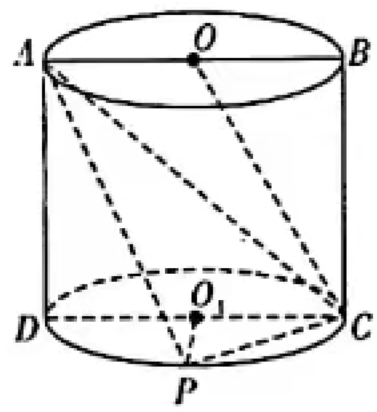
(2) 讨论方程 $f(x)=a$ 的根的个数.

16. (15 分)

如图，已知圆柱 OO_1 的轴截面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，点 P 是圆 O_1 上异于点 C，D 的任意一点.

(1) 若点 D 到平面 ACP 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，证明：$O_1P\perp CD$.

(2) 求 OC 与平面 ACP 所成角的正弦值的取值范围.

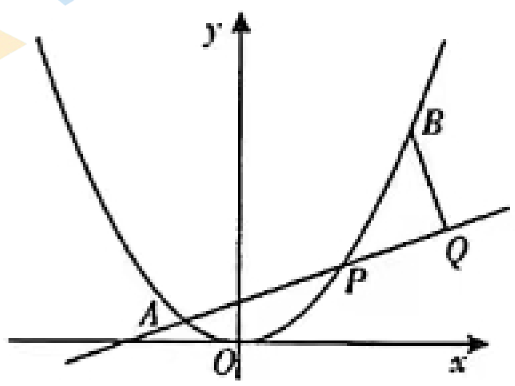


17. (15 分)

如图，已知抛物线 C：$x^2=4y$，其上有定点 $A(-2,1)$，$B(6,9)$，动点 P 在抛物线上，且点 P 位于点 A，B 之间的曲线段上（不与点 A，B 重合），过点 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q.

(1)若点 P 是 AQ 的中点，求点 P 的坐标.

(2)求 $|BQ|$ 的最大值.



18. (17 分)

某单位进行招聘面试，已知参加面试的 N 名学生全都来自 A，B、C 三所学校，其中来自 A 校的学生人数为 $n(n>1)$. 该单位要求所有面试人员面试前到场，并随机给每人安排一个面试号码 $k(k=1, 2, 3, \cdots, N)$，按面试号码 k 由小到大依次进行面试，每人面试时长 5 分钟，面试完成后自行离场.

(1)求面试号码为 2 的学生来自 A 校的概率.

(2)若 $N=40$，$n=10$，且 B，C 两所学校参加面试的学生人数比为 $1:2$，求 A 校参加面试的学生先于其他两校学生完成面试（A 校所有参加面试的学生完成面试后，B，C 两校都还有学生未完成面试）的概率.

(3)记随机变量 X 表示最后一名 A 校学生完成面试所用的时长（从第 1 名学生开始面试到最后一名 A 校学生完成面试所用的时间），$E(X)$ 是 X 的数学期望，证明：$E(X)=\dfrac{5n(N+1)}{n+1}$.

19. (17 分)

数值线性代数又称矩阵计算，是计算数学的一个重要分支，其主要研究对象包括向量和矩阵. 对于平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，其模定义为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$. 类似地，对于 n 行 n 列的矩阵 $A_{nn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，其模可由向量模拓展为 $\|A\|=(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$（其中 a_{ij} 为矩阵中第 i 行第 j 列的数，Σ 为求和符号），记作 $\|A\|_F$，我们称这样的矩阵模为弗罗贝尼乌斯范数. 例如对于矩阵 $A_{22}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，其矩阵模 $\|A\|_F=(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2^2+4^2+3^2+5^2}=3\sqrt{6}$. 弗罗贝尼乌斯范数在机器学习等前沿领域有重要的应用.

(1) $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，矩阵 $B_{nn}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{n} \end{pmatrix}$，求使 $\|B\|_F>3\sqrt{5}$ 的 n 的最小值.

(2) $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，矩阵 $C_{nn}=$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\theta & \cos\theta & \cdots & \cos\theta & \cos\theta \\ 0 & -\sin\theta & -\sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cdots & -\sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & \sin^2\theta & \sin^2\theta\cos\theta & \cdots & \sin^2\theta\cos\theta & \sin^2\theta\cos\theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-2}\sin^{n-2}\theta & (-1)^{n-2}\sin^{n-2}\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}\sin^{n-1}\theta \end{pmatrix},$$

求 $\|C\|_F$.

(3) 矩阵 $D_{nn}=\begin{pmatrix} \ln\frac{n+2}{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} & \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ln\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}} & \ln\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}} & \ln\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}} & \cdots & 0 \\ \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} & \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} & \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} & \cdots & \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} \end{pmatrix}$，证明：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 3$，$\|D\|_F>\sqrt{\frac{n}{3n+9}}$.

★启用前注意保密

2024 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	C	D	B	A	C	B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	ABD	BD	ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 88　　13. $\dfrac{6}{7}$　　14. $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。

15. 解：(1)求导得 $f'(x)=\dfrac{a(e^{x-a}x-e^{x-a})}{x^2}=\dfrac{ae^{x-a}(x-1)}{x^2}$. ………………………… 3 分

因为 $a>0$，$e^{x-a}>0$，…………………………………………………………………… 4 分

所以当 $f'(x)<0$ 时，$x<1$ 且 $x\neq0$；当 $f'(x)>0$ 时，$x>1$. ……………………… 6 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. …… 7 分

(2)①当 $x<0$ 时，因为 $a>0$，$e^{x-a}>0$，所以 $f(x)=\dfrac{ae^{x-a}}{x}<0<a$. ………… 8 分

所以 $f(x)=a$ 在 $(-\infty,0)$ 上有 0 个根. ……………………………………………… 9 分

②当 $x>0$ 时，由(1)得，$x>0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(1)=ae^{1-a}$. ………… 10 分

因为 $0<a<1$，所以 $0<1-a<1$. 所以 $e^{1-a}>1$.

所以 $f(1)=ae^{1-a}>a$. ………………………………………………………… 11 分

所以 $f(x)=a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 0 个根. ………………………………………… 12 分

综上所述，方程 $f(x)=a$ 有 0 个根. ……………………………………………… 13 分

16. (1)证明：如图 1，连接 DP，过点 D 作 $DH\perp AP$，垂足为 H. ………………… 1 分

因为 CD 是圆 O_1 的直径，所以 $CP\perp DP$. ………………………………………… 2 分

因为 AD 是圆柱侧面的母线，所以 $AD\perp$ 平面 CDP.

因为 $CP\subset$ 平面 CDP，所以 $AD\perp CP$. …………………………………………… 3 分

又因为 AD，$DP\subset$ 平面 ADP，$AD\cap DP=D$，所以 $CP\perp$ 平面 ADP. …………… 4 分

因为 $DH\subset$ 平面 ADP，所以 $DH\perp CP$.

又因为 $DH\perp AP$，AP，$PC\subset$ 平面 ACP，$AP\cap PC=P$，所以 $DH\perp$ 平面 ACP. … 5 分

所以点 D 到平面 ACP 的距离为 DH，即 $DH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

设 $DP=a(a>0)$，则 $AP=\sqrt{a^2+4}$.

由 $AD\cdot DP=AP\cdot DH$，得 $2\cdot a=\sqrt{a^2+4}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}$，解得 $a=\sqrt{2}$. ……………… 6 分

因为 $CD=2$，所以 $DP=PC=\sqrt{2}$.

因为 O_1 是 CD 的中点，所以 $O_1P\perp CD$. …………………………………………… 7 分

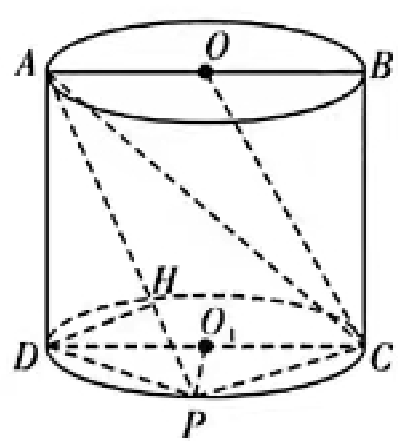


图 1

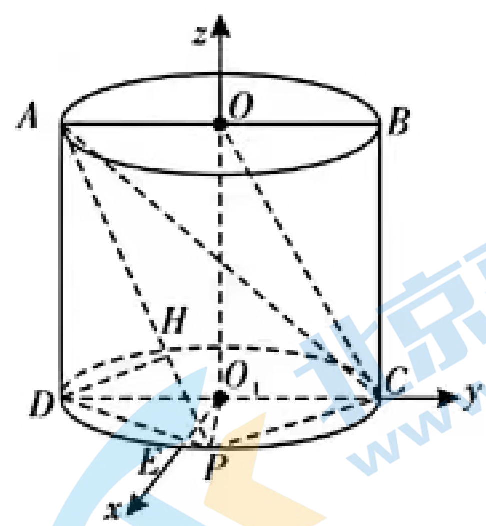


图 2

(2)解：(方法一)如图 2，在平面 PCD 内，过点 O_1 作 $O_1E\perp O_1C$ 交圆 O_1 于点 E，连接 OO_1，

因为 $OO_1\perp$ 平面 PCD，所以 O_1E，O_1C，O_1O 两两相互垂直，以 O_1 为原点，分别以 O_1E，O_1C，O_1O 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系， …………… 8 分

则 $O(0,0,2)$，$C(0,1,0)$，$A(0,-1,2)$.

设点 $P(m,n,0)$，因为点 P 在圆 O_1 上，所以 $m^2+n^2=1$，且 $n\in(-1,1)$.

则 $\overrightarrow{OC}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{CP}=(m,n-1,0)$. …………… 9 分

设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y-2z=0,\\ mx+(n-1)y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y=z,\\ y=-\frac{m}{(n-1)}x.\end{cases}$

取 $x=n-1$，得 $\boldsymbol{n}=(n-1,\ -m,\ -m)$. ………………………………… 10 分

设 OC 与平面 ACP 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{OC},\ \boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OC}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|m|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2m^2+(n-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2+\dfrac{(n-1)^2}{m^2}}}=$

$\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2+\dfrac{(n-1)^2}{1-n^2}}}$. ………………………………………………………… 12 分

因为$\dfrac{(n-1)^2}{1-n^2}=\dfrac{(n-1)(n-1)}{(1-n)(1+n)}=-\dfrac{n-1}{1+n}=-1+\dfrac{2}{1+n}$，且 $n\in(-1,\ 1)$，

所以 $-1+\dfrac{2}{1+n}\in(0,\ +\infty)$.

所以$\sqrt{2+\dfrac{(n-1)^2}{1-n^2}}=\sqrt{2+\left(-1+\dfrac{2}{1+n}\right)}\in(\sqrt{2},\ +\infty)$. ………………………… 14 分

所以 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2+\dfrac{(n-1)^2}{1-n^2}}}\in\left(0,\ \dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

所以 OC 与平面 ACP 所成角的正弦值的取值范围是$\left(0,\ \dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$. ……………… 15 分

(方法二)由(1)知，点 D 到平面 ACP 的距离为 DH.

连接 OD 交 AC 于点 F，如图 3.

因为 $OA/\!/CD$，且 $OA=\dfrac{1}{2}CD$，所以 $OF=\dfrac{1}{2}DF$.

所以点 O 到平面 ACP 的距离为$\dfrac{1}{2}DH$. …………………… 9 分

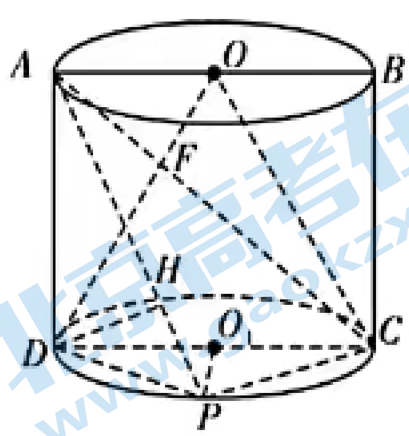


图 3

在 Rt$\triangle ADP$ 中，由等面积法得 $DH=\dfrac{AD\cdot DP}{AP}=\dfrac{2DP}{\sqrt{4+DP^2}}$，

$DP\in(0,\ 2)$. ……………………………………………………………………………… 11 分

所以 $DH=\dfrac{2DP}{\sqrt{4+DP^2}}=2\sqrt{\dfrac{DP^2}{4+DP^2}}=2\sqrt{1-\dfrac{4}{4+DP^2}}\in(0,\ \sqrt{2})$. ……………… 13 分

设 OC 与平面 ACP 所成角为 θ，

所以 OC 与平面 ACP 所成角的正弦值 $\sin\theta=\dfrac{\frac{1}{2}DH}{OC}=\dfrac{DH}{2\sqrt{5}}$. ………………… 14 分

所以 $\sin\theta=\dfrac{DH}{2\sqrt{5}}\in\left(0,\ \dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

所以 OC 与平面 ACP 所成角的正弦值的取值范围是$\left(0,\ \dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$. ……………… 15 分

17. 解：(1)由点 P 在抛物线上，设点 P 的坐标为$\left(x_0, \frac{x_0^2}{4}\right)$，$-2<x_0<6$， …… 1 分

由点 P 是 AQ 的中点，且点 A 的坐标为$(-2, 1)$，得点 Q 的坐标为$\left(2x_0+2, \frac{x_0^2}{2}-1\right)$.

…… 2 分

故$\overrightarrow{AP}=\left(x_0+2, \frac{x_0^2}{4}-1\right)$，$\overrightarrow{BQ}=\left(2x_0+2-6, \frac{x_0^2}{2}-1-9\right)=\left(2x_0-4, \frac{x_0^2}{2}-10\right)$.

…… 4 分

因为 $AP\perp BQ$，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$，即$(x_0+2)(2x_0-4)+\left(\frac{x_0^2}{4}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{2}-10\right)=0$.

…… 5 分

整理得$\frac{1}{16}(x_0+2)^2(x_0-2)^2=0$. …… 6 分

解得 $x_0=2$，或 $x_0=-2$(舍).

所以点 P 的坐标为$(2, 1)$. …… 7 分

(2)当直线 AP 的斜率为 0 时，直线 BQ 的斜率不存在，此时点 P 的坐标为$(2, 1)$，点 Q 的坐标为$(6, 1)$，得$|BQ|=8$. …… 8 分

显然直线 AP 的斜率存在，当直线 AP 的斜率不为 0 时，设直线 AP 的斜率为 $k(k\neq0)$，

则直线 BQ 的斜率为$-\frac{1}{k}$，则直线 l_{AP}：$y-1=k(x+2)$，l_{BQ}：$y-9=-\frac{1}{k}(x-6)$，

…… 9 分

解得 l_{AP}，l_{BQ}的交点 Q 的横坐标为 $x_Q=\frac{-2k^2+8k+6}{k^2+1}$， …… 10 分

所以$|BQ|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|x_Q-x_B|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{-2k^2+8k+6}{k^2+1}-6\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{-8k^2+8k}{k^2+1}\right|=$

$\frac{8|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}(k\neq0)$. …… 12 分

因为$\frac{8|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=8\sqrt{\frac{k^2-2k+1}{k^2+1}}=8\sqrt{1-\frac{2k}{k^2+1}}=8\sqrt{1-\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}$，$k\neq0$， …… 13 分

由 $k+\frac{1}{k}\in(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$，得$|BQ|=\frac{8|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant8\sqrt{2}$，

当且仅当 $k+\frac{1}{k}=-2$，即 $k=-1$ 时等号成立. …… 14 分

综上所述，$|BQ|$的最大值为 $8\sqrt{2}$. …… 15 分

18. 解：(1)记“面试号码为2的学生来自A校”为事件A， ………………………… 1分

将A校n名学生面试号码的安排情况作为样本空间，则样本点总数为C_N^n，…… 2分

事件A表示A校有1名学生的面试号码为2，其他$n-1$名学生的面试号码在剩余$N-1$个面试号码中随机安排，则事件A包含的样本点数为$C_{N-1}^{n-1}C_1^1$. ………… 3分

故$P(A)=\dfrac{C_{N-1}^{n-1}C_1^1}{C_N^n}=\dfrac{\dfrac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}=\dfrac{n}{N}$. ………………………………… 4分

(说明：根据每名参加面试的学生在任意次序面试都等可能，直接写出概率$\dfrac{n}{N}$给2分)

(2)设B校参加面试的学生有x名，由题意得$\dfrac{x}{40-10-x}=\dfrac{1}{2}$，解得$x=10$.

所以B校参加面试的学生有10名，C校参加面试的学生有20名. ………… 5分

记“最后面试的学生来自B校”为事件B，“最后面试的学生来自C校”为事件C，显然事件B，C互斥. 记“A校参加面试的学生先于其他两校学生完成面试”为事件D，则$D=BD+CD$. ……………………………………………………… 7分

当事件B发生时，只需考虑A，C两所学校所有参加面试的学生中最后面试的那位来自C校，

则$P(BD)=P(B)P(D\mid B)=\dfrac{10}{40}\times\dfrac{20}{30}=\dfrac{1}{6}$. ………………………………… 8分

当事件C发生时，只需考虑A，B两所学校所有参加面试的学生中最后面试的那位来自B校，

则$P(CD)=P(C)P(D\mid C)=\dfrac{20}{40}\times\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{4}$. ………………………………… 9分

所以$P(D)=P(BD)+P(CD)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$. ………………………………… 10分

(3)由题知随机变量X的取值为$5n$，$5(n+1)$，…，$5N$， ……………………… 11分

则随机变量X的分布列为$P(X=5k)=\dfrac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}$，$k=n$，$n+1$，…，$N$. ……… 12分

所以随机变量X的期望$E(X)=\sum\limits_{k=n}^{N}5k\cdot\dfrac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}$

$=\dfrac{5}{C_N^n}\sum\limits_{k=n}^{N}kC_{k-1}^{n-1}$ ……………………………………………………… 13分

$=\dfrac{5}{C_N^n}\sum\limits_{k=n}^{N}k\cdot\dfrac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}=\dfrac{5}{C_N^n}\sum\limits_{k=n}^{N}n\cdot\dfrac{k!}{n!(k-n)!}=\dfrac{5n}{C_N^n}\sum\limits_{k=n}^{N}C_k^n$ ……………… 15分

$=\dfrac{5n}{C_N^n}(C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\cdots+C_N^n)=\dfrac{5n}{C_N^n}(C_{n+1}^{n+1}+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\cdots+C_N^n)=\dfrac{5n}{C_N^n}C_{N+1}^{n+1}$ … 16分

$$=\frac{5n}{\frac{N!}{n!\ (N-n)!}}\cdot\frac{(N+1)!}{(n+1)!\ (N-n)!}=\frac{5n(N+1)}{n+1}.$$

所以 $E(X)=\dfrac{5n(N+1)}{n+1}$. ………………………………………………………… 17 分

19. 解：(1) 由题意得 $\|B\|_F^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}^2=\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

……………………………………………………………………………………… 3 分

若 $\|B\|_F>3\sqrt{5}$，则 $\dfrac{n(n+1)}{2}>45$，即 $n^2+n-90>0$. ……………………… 4 分

因式分解得 $(n-9)(n+10)>0$. 因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n>9$.

所以使 $\|B\|_F>3\sqrt{5}$ 的 n 的最小值是 10. ………………………………………… 5 分

(2) 由题得第 1 对角线上的平方和为 $1+\sin^2\theta+\sin^4\theta+\cdots+\sin^{2n-2}\theta=\dfrac{1-\sin^{2n}\theta}{1-\sin^2\theta}$,

第 2 对角线上的平方和为

$\cos^2\theta(1+\sin^2\theta+\cdots+\sin^{2n-4}\theta)=\cos^2\theta\cdot\dfrac{1-\sin^{2n-2}\theta}{1-\sin^2\theta}=1-\sin^{2n-2}\theta$,

……

第 k 对角线上的平方和为

$\cos^2\theta(1+\sin^2\theta+\cdots+\sin^{2n-2k}\theta)=\cos^2\theta\cdot\dfrac{1-\sin^{2n-2k+2}\theta}{1-\sin^2\theta}=1-\sin^{2n-2k+2}\theta$,

……

第 n 对角线上的平方和为 $\cos^2\theta$, ……………………………………………………… 8 分

所以 $\|C\|_F^2=\dfrac{1-\sin^{2n}\theta}{1-\sin^2\theta}+(1-\sin^{2n-2}\theta)+\cdots+(1-\sin^{2n-2k+2}\theta)+\cdots+(1-\sin^4\theta)+$ $\cos^2\theta=1+\sin^2\theta+\sin^4\theta+\cdots+\sin^{2n-2}\theta+(n-2)-\sin^{2n-2}\theta-\cdots-\sin^{2n-2k+2}\theta-\cdots-$ $\sin^4\theta+\cos^2\theta=1+(n-2)+\sin^2\theta+\cos^2\theta=1+(n-2)+1=n$. ……………… 10 分

所以 $\|C\|_F=\sqrt{n}$. ……………………………………………………………………… 11 分

(3) 由题意知，证明 $\|D\|_F>\sqrt{\dfrac{n}{3n+9}}$ 等价于证明 $\ln^2\dfrac{3}{2}+\ln^2\dfrac{4}{3}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+2}{n+1}>$ $\dfrac{n}{3n+9}$, ……………………………………………………………………………… 12 分

注意到左侧求和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2\dfrac{k+2}{k+1}=\ln^2\dfrac{3}{2}+\ln^2\dfrac{4}{3}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+2}{n+1}$，将右侧含有 n 的表达式表示为求和式有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k+3}\right)=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)+$

$\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}=\frac{n}{3n+9}$， ………………………………………… 13 分

故只需证$\ln^2\frac{n+2}{n+1}>\frac{1}{(n+2)^2}>\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$，$\forall n\geqslant 1$，$n\in\mathbf{N}^*$成立，………………………………………………………… 14 分

即证 $\ln\frac{n+2}{n+1}>\frac{1}{n+2}$，$\forall n\geqslant 1$，$n\in\mathbf{N}^*$成立， ………………………… 15 分

令$x=1+\frac{1}{n+1}$，则需证 $\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$，$x\in\left(1,\ \frac{3}{2}\right]$成立， ……………… 16 分

记$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，$x\in\left(1,\ \frac{3}{2}\right]$，则$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}>0$在$\left(1,\ \frac{3}{2}\right]$上恒成立，

所以$f(x)$在$\left(1,\ \frac{3}{2}\right]$上单调递增，

所以$f(x)>f(1)=\ln 1+1-1=0$，

所以 $\ln x>1-\frac{1}{x}$在$\left(1,\ \frac{3}{2}\right]$上恒成立，即 $\ln\frac{n+2}{n+1}>\frac{1}{n+2}$，$\forall n\geqslant 1$，$n\in\mathbf{N}^*$成立，

所以原不等式成立. ………………………………………………………… 17 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！