

数 学

本试卷分第 I 卷和地 II 卷两部分，考生务必将两卷的答案按要求答在答题卡相应题的后面。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

- “ $x < 1$ ”是“ $x < 2$ ”的（ ）

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 如果方程 $x^2 + ky^2 = 2$ 表示焦点在y轴上的椭圆，那么实数k的取值范围是（ ）

A. $(1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(1, 2)$
- 已知 $a < b < 0$ ，则下列不等式中成立的是（ ）

A. $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$ B. $|a| < |b|$ C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ D. $ac > bc$
- 已知 $M(-2, 0)$ ， $N(2, 0)$ ， $|PM| - |PN| = 4$ ，则动点P的轨迹是（ ）

A. 双曲线 B. 双曲线左支 C. 双曲线右支 D. 一条射线
- 函数 $y = \log_2(x + \frac{1}{x-1} + 5)$ ($x > 1$)的最小值为（ ）

A. 3 B. -3 C. 4 D. -4
- 若椭圆的对称轴为坐标轴，长轴长与短轴长的和为 18，焦距为 6，则椭圆的方程为（ ）

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 或 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ D. 以上都不对
- 把数列 $\{2n+1\}$ ，依次按第一个括号一个数，第二个括号两个数，第三个括号三个数，第四个括号四个数，第五个括号一个数.....循环分为： (3) ， $(5, 7)$ ， $(9, 11, 13)$ ， $(15, 17, 19, 21)$ ， (23) ， $(25, 27)$ ， $(29, 31, 33)$ ， $(35, 37, 39, 41)$ ， (43)，则第 104 个括号内各数之和为（ ）。

A. 2036 B. 2048 C. 2072 D. 2060
- 设 $f(n) = 2+2^4+2^7+2^{10}+\dots+2^{3n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) 则 $f(n) =$ （ ）

A. $\frac{2}{7}(8^n - 1)$ B. $\frac{2}{7}(8^n + 1)$
C. $\frac{2}{7}(8^{n+1} + 1)$ D. $\frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$

第 II 卷（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，把答案填在答题卡上。

- 已知命题P：“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ”，则 $\neg P$ ：_____。
- 已知椭圆的短轴长是焦距的 2 倍，则椭圆的离心率 e 为_____。

11. $a > 0, b > 0$, 若 $\sqrt{3}$ 是 3^a 与 3^b 的等比中项, 则 $a + b =$ _____, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____.

12. 若曲线 $\frac{x^2}{4+k} + \frac{y^2}{1-k} = 1$ 表示双曲线, 则 k 的取值范围是 _____.

13. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 若 $a_3 - a_1 = 6$, 则 $a_1 =$ _____, $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} =$ _____.

14. 已知动点 P 与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的两个焦点 F_1, F_2 的距离之和为定值, 且 $\cos \angle F_1 P F_2$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$, 则动点 P 的轨迹方程为 _____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分。解答题应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

15. (本题满分 13 分)

解关于 x 的不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$

16. (本题满分 13 分)

已知椭圆的焦点为 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$, P 是椭圆上的一点, 且 $|F_1 F_2|$ 是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项。

(I) 求椭圆的方程、长轴长、短轴长、离心率;

(II) 若双曲线 $x^2 - y^2 = 2m$ 与该椭圆有相同的焦点, 求 m 的值。

17. (本题满分 14 分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 1, a_3 + b_5 = 21, a_5 + b_3 = 13$

(I) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 s_n .

18. (本题满分 13 分)

某货轮匀速行驶在相距 300 海里的甲乙两地间运输货物, 运输成本由燃料费用和其他费用组成, 已知该货轮每小时的燃料费用 w 与其航行速度 x 的平方成正比, 即 $w = kx^2$ 其中 k 为比例系数, 当航行速度为 30 海里/小时, 每小时的燃料费用为 450 元, 其他费用为每小时 800 元。且该货轮的最大航行速度为 50 海里/小时。

(I) 请将甲地到乙地的运输成本 y (元) 表示为航行速度 x (海里/小时) 的函数;

(II) 要使从甲地到乙地的运输成本最少, 该货轮应以多大的航行速度行驶?

19. (本题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$). 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 < 0$, $3b_n - b_{n-1} = n$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$)

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(II) 求证: 数列 $\{b_n - a_n\}$ 为等比数列.

20. (本题满分 14 分)

已知某椭圆的焦点是 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, 过点 F_2 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个焦点 B , 且 $|FB_1| + |F_2B| = 10$, 椭圆上不同的两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$ 满足条件 $|F_2A|$ 、 $|F_2B|$ 、 $|F_2C|$ 成等差数列. 求:

(I) 该椭圆的方程;

(II) 弦 AC 中点的横坐标.