清华附中 2019-2020 学年第一学期期末考试

高一数学试卷

一.选择题（每小题 4 分，共 40 分）.

1.（4 分）已知集合 $A=\{x\mid x^2<1\}$，且 $a\in A$，则 a 的值可能为(　　)

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

2.（4 分）下列函数在定义域内单调递增的是(　　)

A．$y=x^2$　　B．$y=\tan x$　　C．$y=0.5^x$　　D．$y=lgx$

3.（4 分）若点 $P(4,3)$ 在角 α 的终边上，则 $\cos\alpha=($　　$)$

A．$\frac{4}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

4.（4 分）在 $a=\log_3 0.1$，$b=\tan\frac{\pi}{4}$，$c=2^{-\frac{1}{2}}$，$d=\sin 2$ 中，最大的数为(　　)

A．a　　B．b　　C．c　　D．d

5.（4 分）“$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$”是“$\sin\alpha=\cos\beta$”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6.（4 分）下列区间包含函数 $f(x)=x+\log_2 x-5$ 零点的为(　　)

A．$(1,2)$　　B．$(2,3)$　　C．$(3,4)$　　D．$(4,5)$

7.（4 分）函数 $f(x)=\frac{1}{ln(x+1)}$ 的定义域为(　　)

A．$(-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$　　B．$[-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

C．$[-1,\ +\infty)$　　D．$(-1,+\infty)$

8.（4 分）某车间分批生产某种产品，每批的生产准备费用为 800 元．若每批生产 x 件，则平均仓储时间为 $\frac{x}{8}$ 天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元．为使平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品(　　)

A．60 件　　B．80 件　　C．100 件　　D．120 件

9.（4 分）已知 $\theta=(0,\frac{\pi}{4})$，$\sin 2\theta=\frac{1}{3}$，则 $\sin\theta-\cos\theta=($　　$)$

A．$\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$-\frac{\sqrt{6}}{3}$

10．（4 分）若函数 $f(x)$ 的图象上存在一点 $A(x_0$， $y_0)$，满足 $x_0+y_0=0$，且 $x_0y_0\neq 0$，称函数 $f(x)$ 为“可相反函数”．在：① $y=\sin x$；② $y=lnx$；③ $y=x^2+4x+1$；④ $y=-e^{-x}$ 中，为“可相反函数”的全部序号是(　　)

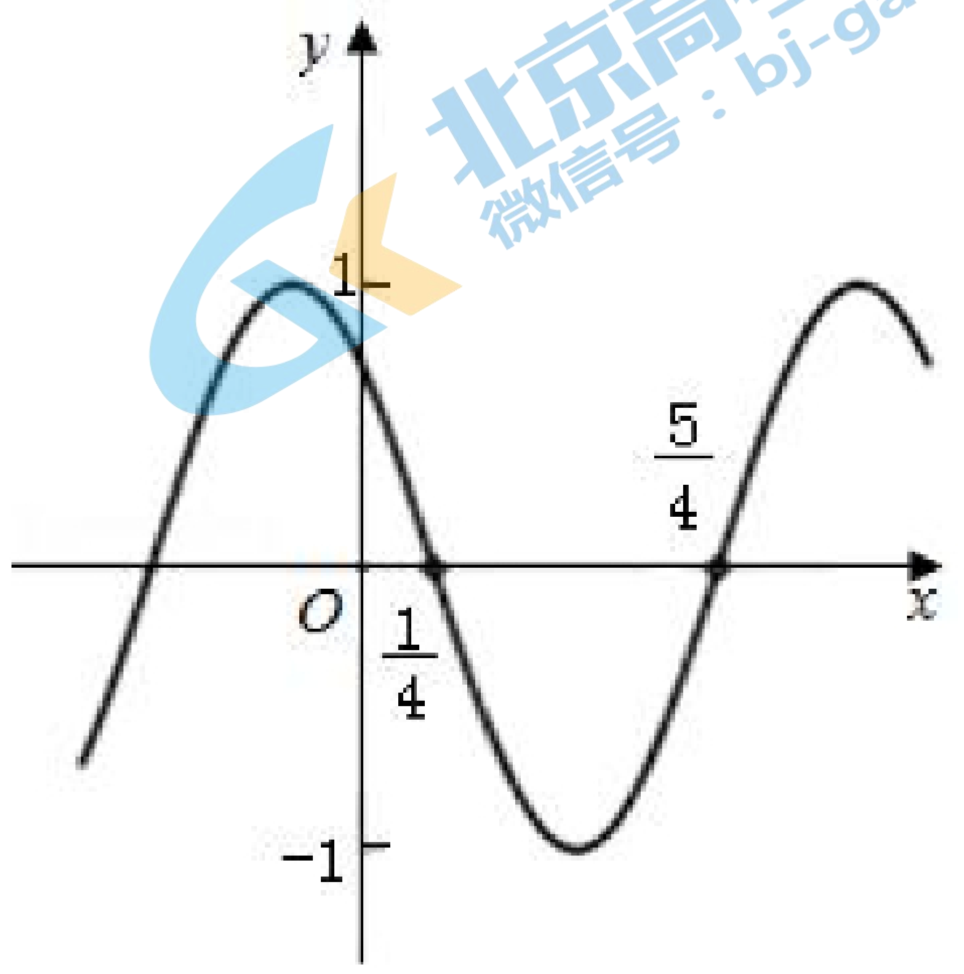
A．①②　　B．②③　　C．①③④　　D．②③④

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）．

11．（5 分）已知幂函数 $f(x)=x^m$ 经过点 $(2,\dfrac{1}{4})$，则 $f(\sqrt{2})=$____．

12．（5 分）已知 θ 为第二象限角，且 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$，则 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{2})=$____．

13．（5 分）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi)$ 的部分图象如图，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为____．



14．（5 分）关于函数 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\cos x$ 有下面三个结论：

①函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)$ 的图象平移得到；

②函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2}$， $\pi)$ 上均单调递减；

③若直线 $x=t$ 与这两个函数的图象分别交于不同的 A， B 两点，则 $|AB|\leqslant 1$．

其中全部正确结论的序号为____．

15．（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x\leqslant 1\\ x^{-1}, x>1\end{cases}$，若函数 $y=f(x)-k$ 恰有两个不同的零点．则实数 k 的取值范围为____．

16．（5 分）定义：如果函数 $y=f(x)$ 在定义域内给定区间 $[a$， $b]$ 上存在 $x_0(a<x_0<b)$，满足 $f(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 是 $[a$， $b]$ 上的“平均值函数”． x_0 是它的一个均值点，若函数 $f(x)=x^2+mx$ 是 $[-1$， $1]$ 上的平均值函数，则实数 m 的取值范围是____．

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）.

17.（13 分）计算：

（1）$\log_6 4 + 2\log_6 3$.

（2）$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$

（3）$\cos 120° + \tan 135°$.

18.（13 分）已知 $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{1}{2}$.

（1）若 α 为第三象限角，求 $\cos\alpha$ 的值；

（2）求 $\tan(\alpha + \dfrac{\pi}{4})$ 的值；

（3）求 $\cos 2\alpha$ 的值.

19.（13 分）已知函数 $f(x) = |\log_a x| (a > 0, a \neq 1)$.

（1）若 f（2）$= \dfrac{1}{2}$，求实数 a 的值；

（2）若 $0 < x_1 < x_2$，且 $f(x_1) = f(x_2)$，求 x_1x_2 的值；

（3）若函数 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2}$，$3]$ 的最大值与最小值之和为 2，求实数 a 的值.

20.（13 分）已知函数 $f(x) = 4\cos x \sin(x + \dfrac{\pi}{6})$.

（1）求 $f(\dfrac{\pi}{2})$ 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及其图象的对称轴方程；

（3）对于任意 $x \in [0$，$m]$ 均有 $f(x) \geqslant f(0)$ 成立，求实数 m 的取值范围.

21.（14 分）若函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且存在非零实数 T，使得对于任意 $x \in R$，$f(x+T) = Tf(x)$ 恒成立，称函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$.

（1）分别判断下列函数是否满足性质 P（1），并说明理由；

① $f(x) = \sin 2\pi x$；

② $g(x) = \cos \pi x$.

（2）若函数 $f(x)$ 既满足性质 P（2），又满足性质 P（3），求函数 $f(x)$ 的解析式；

（3）若函数 $f(x)$ 满足性质 $P(1.01)$. 求证：存在 $x_0 \in R$，使得 $|f(x_0)| < 0.001$.

22.（14 分）已知集合 A 为非空数集，定义 $A^+ = \{x \mid x = a + b$，a，$b \in A\}$，$A^- = \{x \mid x = |a - b|$，

a， $b \in A\}$.

（1）若集合 $A=\{-1, 1\}$，直接写出集合 A^{+} 及 A^{-}；

（2）若集合 $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$， $x_1<x_2<x_3<x_4$， 且 $A^{-}=A$，求证 $x_1+x_4=x_2+x_3$；

（3）若集 $A \subseteq \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2020, x \in N\}$，且 $A^{+} \cap A^{-}=\varnothing$，求集合 A 中元素的个数的最大值.

参考答案与试题解析

一.选择题（每小题 4 分，共 40 分）.

1.（4 分）已知集合 $A=\{x\mid x^{2}<1\}$，且 $a\in A$，则 a 的值可能为( )

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

【解答】解：集合 $A=\{x\mid x^{2}<1\}=\{x\mid -1<x<1\}$，

四个选项中，只有 $0\in A$，

故选：C.

2.（4 分）下列函数在定义域内单调递增的是( )

A. $y=x^{2}$　　B. $y=\tan x$　　C. $y=0.5^{x}$　　D. $y=lgx$

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A，$y=x^{2}$，是二次函数，在其定义域上不是单调函数，不符合题意；

对于 B，$y=\tan x$，是正切函数，在其定义域上不是单调函数，不符合题意；

对于 C，$y=0.5^{x}$，是指数函数，在定义域内单调递减，不符合题意；

对于 D，$y=lgx$，是对数函数，在定义域内单调递增，符合题意；

故选：D.

3.（4 分）若点 $P(4,3)$ 在角 α 的终边上，则 $\cos\alpha=$( )

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

【解答】解：$\because$ 点 $P(4,3)$ 在角 α 的终边上，则 $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{4^{2}+3^{2}}}=\frac{4}{5}$，

故选：A.

4.（4 分）在 $a=\log_{3}0.1$，$b=\tan\frac{\pi}{4}$，$c=2^{-\frac{1}{2}}$，$d=\sin 2$ 中，最大的数为( )

A. a　　B. b　　C. c　　D. d

【解答】解：$a=\log_{3}0.1<0$，$b=\tan\frac{\pi}{4}=1$，$c=2^{-\frac{1}{2}}\in(0,1)$，$d=\sin 2<1$，

则最大的是 $b=1$.

故选：B.

5.（4 分）“$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$”是“$\sin\alpha=\cos\beta$”的( )

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【解答】解：$\sin\alpha=\cos\beta\Rightarrow\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\beta$，

$\therefore\beta=2k\pi\pm((\dfrac{\pi}{2}-\alpha)$，$k\in Z$．

化为：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，或$\beta-\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

$\therefore$ “$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$ “是“$\sin\alpha=\cos\beta$ “的充分不必要条件．

故选：A．

6．（4 分）下列区间包含函数 $f(x)=x+\log_2x-5$ 零点的为(　　)

A．$(1,2)$　　B．$(2,3)$　　C．$(3,4)$　　D．$(4,5)$

【解答】解：经计算 f（1）$=1-5=-4<0$，f（2）$=2+1-5=-2<0$，f（3）$=3+\log_23-5=\log_23-2<0$，f（4）$=4+2-5=1>0$，

故函数的零点所在区间为$(3,4)$，

故选：C．

7．（4 分）函数 $f(x)=\dfrac{1}{ln(x+1)}$ 的定义域为(　　)

A．$(-1，0)\cup(0，+\infty)$　　B．$[-1，0)\cup(0，+\infty)$

C．$[-1，+\infty)$　　D．$(-1,+\infty)$

【解答】解：要使函数有意义，则 $ln(x+1)\neq0$，且 $x+1>0$，

即 $x>-1$ 且 $x\neq0$，

故函数的定义域为$\{x|x>-1$ 且 $x\neq0\}$，

故选：A．

8．（4 分）某车间分批生产某种产品，每批的生产准备费用为 800 元．若每批生产 x 件，则平均仓储时间为$\dfrac{x}{8}$天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元．为使平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品(　　)

A．60 件　　B．80 件　　C．100 件　　D．120 件

【解答】解：根据题意，该生产 x 件产品的生产准备费用与仓储费用之和是 $800+x\bullet\dfrac{x}{8}=800+\dfrac{1}{8}x^2$

这样平均每件的生产准备费用与仓储费用之和为$f(x)=\dfrac{800+\frac{1}{8}x^2}{x}=\dfrac{800}{x}+\dfrac{1}{8}x(x$为正整数）

由基本不等式，得$f(x)\geqslant 2\sqrt{\dfrac{800}{x}\cdot\dfrac{1}{8}x}=20$

当且仅当$\dfrac{800}{x}=\dfrac{1}{8}x=10$时，$f(x)$取得最小值、

可得$x=80$时，每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小

故选：B.

9.（4分）已知$\theta=(0,\dfrac{\pi}{4})$，$\sin 2\theta=\dfrac{1}{3}$，则$\sin\theta-\cos\theta=($　　$)$

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$-\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【解答】解：$\because\theta=(0,\dfrac{\pi}{4})$，$\sin 2\theta=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore\sin\theta-\cos\theta<0$，

$\therefore\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=-\sqrt{1-\sin 2\theta}=-\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故选：D.

10.（4分）若函数$f(x)$的图象上存在一点$A(x_0$，$y_0)$，满足$x_0+y_0=0$，且$x_0y_0\neq 0$，称函数$f(x)$为“可相反函数”．在：①$y=\sin x$；②$y=lnx$；③$y=x^2+4x+1$；④$y=-e^{-x}$中，为“可相反函数”的全部序号是(　　)

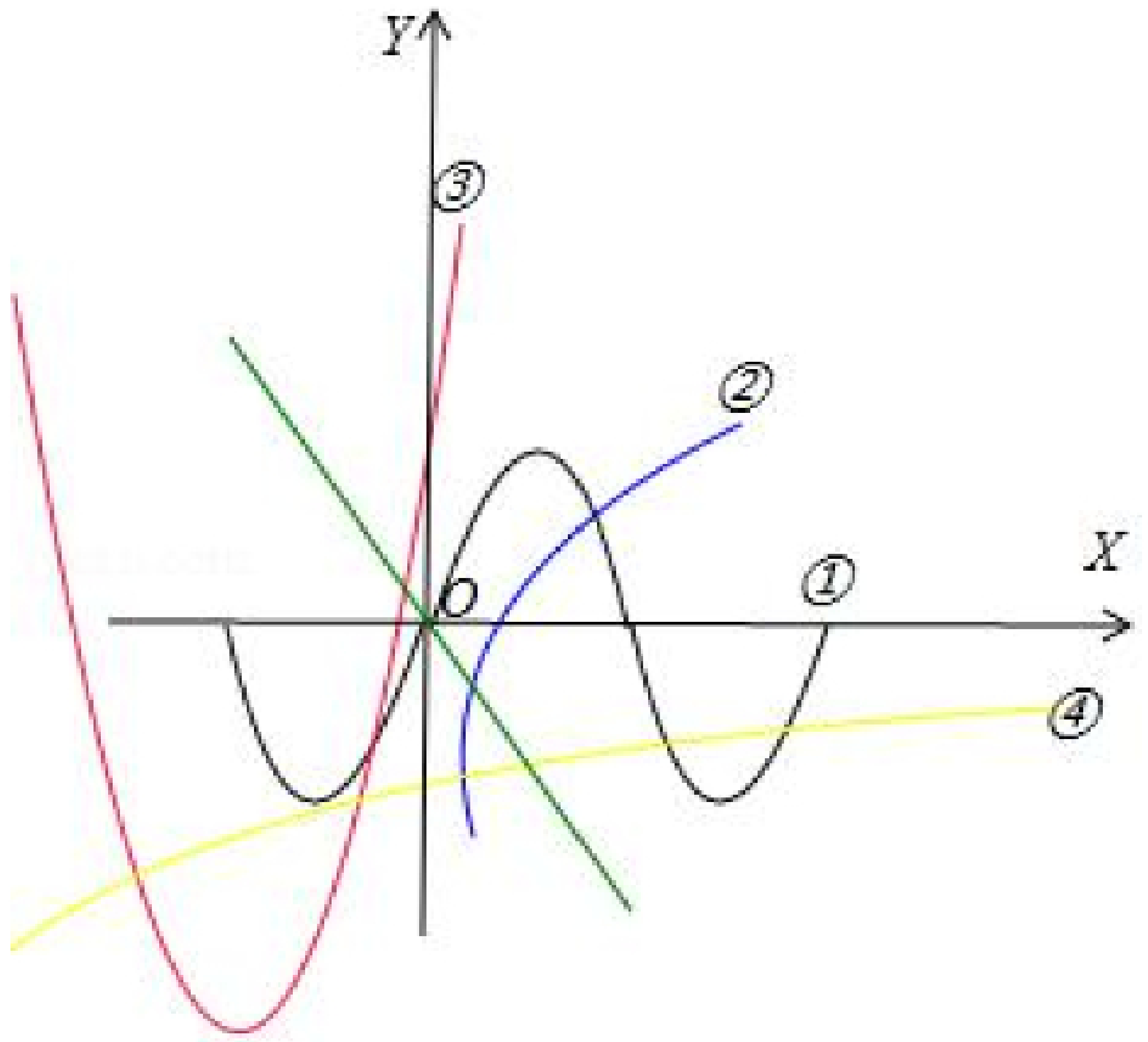
A．①②　　B．②③　　C．①③④　　D．②③④

【解答】解：由定义可得:；

函数$f(x)$为“可相反函数”，即函数$f(x)$与直线$y=-x$有交点且交点不在坐标原点．

结合图象可得：只有②③④符合要求；

故选：D.



二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）.

11.（5 分）已知幂函数 $f(x)=x^m$ 经过点 $(2,\frac{1}{4})$，则 $f(\sqrt{2})=$ __$\frac{1}{2}$__.

【解答】解：幂函数 $f(x)=x^m$ 经过点 $(2,\frac{1}{4})$，

即 $2^m=\frac{1}{4}$，解得 $m=-2$，

所以 $f(x)=x^{-2}$；

所以 $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^{-2}=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

12.（5 分）已知 θ 为第二象限角，且 $\sin\theta=\frac{2}{3}$，则 $\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=$ __$-\frac{\sqrt{5}}{3}$__.

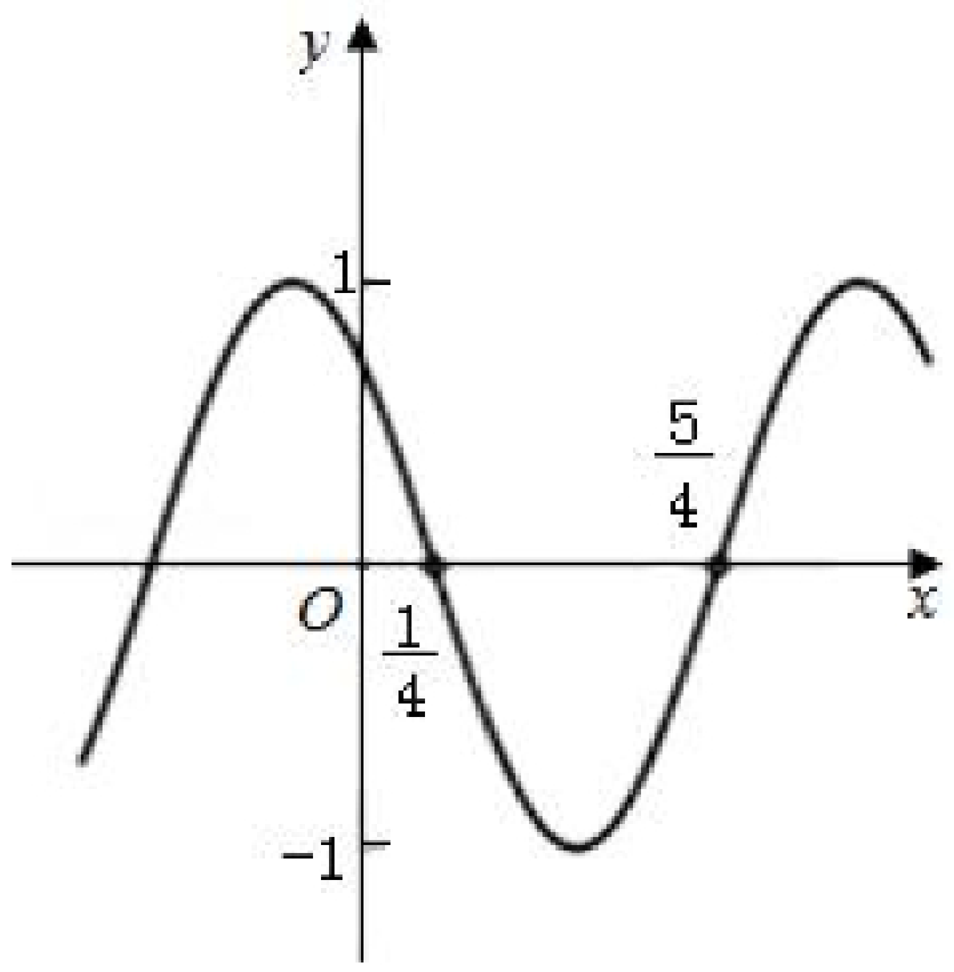
【解答】解：因为 θ 为第二象限角，且 $\sin\theta=\frac{2}{3}$，

所以 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

则 $\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{5}}{3}$

13.（5 分）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi)$ 的部分图象如图，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为__$[2k-\frac{5}{4}$，$2k-\frac{1}{4}]$，$k\in Z$__.



【解答】解：根据函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi)$ 的部分图象，

可得 $A=1$，$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$，$\therefore \omega=\pi$．

再根据五点法作图，可得 $\pi\times\frac{1}{4}+\varphi=\pi$，$\therefore \varphi=\frac{3\pi}{4}$，$f(x)=\sin(\pi\cdot x+\frac{3\pi}{4})$．

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi\cdot x+\frac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，求得 $2k-\frac{5}{4}\leqslant x\leqslant 2k-\frac{1}{4}$，

故函数的增区间为 $[2k-\frac{5}{4}$，$2k-\frac{1}{4}]$，$k\in Z$，

故答案为：$[2k-\frac{5}{4}$，$2k-\frac{1}{4}]$，$k\in Z$．

14．（5 分）关于函数 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\cos x$ 有下面三个结论：

①函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)$ 的图象平移得到；

②函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}$，$\pi)$ 上均单调递减；

③若直线 $x=t$ 与这两个函数的图象分别交于不同的 A，B 两点，则 $|AB|\leqslant 1$．

其中全部正确结论的序号为__①②__．

【解答】解：对于①，由于 $f(x)=\sin x=\cos(x+\frac{3\pi}{2})$，所以函数 $f(x)=\sin x$ 的图象可由函数 $g(x)=\cos x$ 的图象向左平移 $\frac{3\pi}{2}$ 个单位得到；①正确；

对于②，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(\frac{\pi}{2}$，$\pi)$ 上为减函数，函数 $g(x)=\cos x$ 在 $(\frac{\pi}{2}$，$\pi)$ 上为减函数；②正确；

对于③，若直线 $x=t$ 与这两个函数的图象分别交于不同的 A，B 两点，则 $|AB|=|\sin t-\cos t|=\sqrt{2}|\sin(t-\frac{\pi}{4})|\leqslant\sqrt{2}$．故③错误；

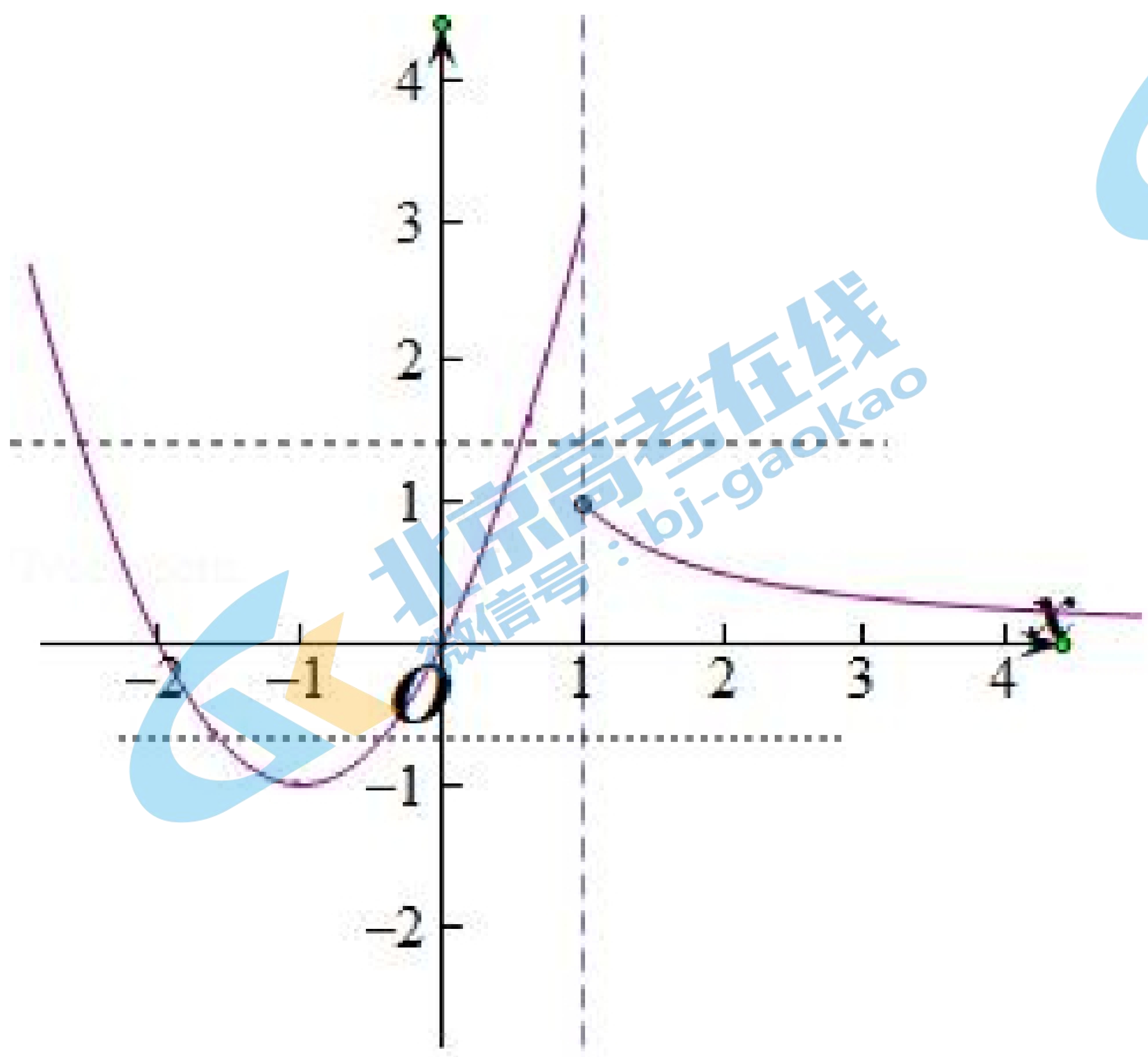
故正确结论序号为①②；

故答案为：①②．

15．（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leqslant 1\\x^{-1},x>1\end{cases}$，若函数 $y=f(x)-k$ 恰有两个不同的零点．则实数 k 的取值范围为__$(-1,0)\bigcup[1$，__$3]$__．

【解答】解：条件等价于方程 $f(x)=k$ 有 2 个不等实根，也即函数 $f(x)$ 与 $y=k$ 的图象有 2 个不同的交点，

作出函数 $f(x)$ 的图象如图：



由图象可知，$-1<k<0$ 或 $1\leqslant k\leqslant 3$，

故 $k\in(-1,0)\bigcup[1$， $3]$，

故答案为 $(-1,0)\bigcup[1$， $3]$．

16．（5 分）定义：如果函数 $y=f(x)$ 在定义域内给定区间 $[a$， $b]$ 上存在 $x_0(a<x_0<b)$，满足 $f(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 是 $[a$， $b]$ 上的"平均值函数"． x_0 是它的一个均值点，若函数 $f(x)=x^2+mx$ 是 $[-1$， $1]$ 上的平均值函数，则实数 m 的取值范围是__$[0$，__$+\infty)$__．

【解答】解：根据题意，若函数 $f(x)=x^2+mx$ 是 $[-1$， $1]$ 上的平均值函数，

则方程 $x^2+mx=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$，即 $x^2+mx-m=0$ 在 $(-1,1)$ 内有实数根，

若函数 $g(x)=x^2+mx-m$ 在 $(-1,1)$ 内有零点．

则△ $=m^2+4m\geqslant 0$，解得 $m\geqslant 0$，或 $m\leqslant -4$．

g（1）$=1>0$，$g(-1)=1-2m$．$g(0)=-m$．

对称轴：$x=-\dfrac{m}{2}$．

①$m\geqslant 0$时，$-\dfrac{m}{2}\leqslant 0$，$g(0)=-m\leqslant 0$，g（1）>0，因此此时函数$g(x)$在$(-1,1)$内一定有零点．$\therefore m\geqslant 0$满足条件．

②$m\leqslant -4$时，$-\dfrac{m}{2}\geqslant 2$，由于g（1）$=1>0$，因此函数$g(x)=x^2+mx-m$在$(-1,1)$内不可能有零点，舍去．

综上可得：实数m的取值范围是$[0$，$+\infty)$．

故答案为：$[0$，$+\infty)$．

三、解答题（共6小题，共80分）．

17．（13分）计算：

（1）$\log_6 4+2\log_6 3$．

（2）$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}$

（3）$\cos 120^\circ+\tan 135^\circ$．

【解答】解：（1）$\log_6 4+2\log_6 3=\dfrac{lg4}{lg6}+2\dfrac{lg3}{lg6}=\dfrac{lg4+lg9}{lg6}=\dfrac{lg36}{lg6}=lg6$；

（2）$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^1=2$．

（3）$\cos 120^\circ+\tan 135^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)+\tan(180^\circ-45^\circ)=-\cos 60^\circ-\tan 45^\circ=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$．

18．（13分）已知$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}$．

（1）若α为第三象限角，求$\cos\alpha$的值；

（2）求$\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$的值；

（3）求$\cos 2\alpha$的值．

【解答】解：（1）$\because$已知$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}$，$\therefore \tan\alpha=3=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$．

$\because\alpha$为第三象限角，$\therefore\cos\alpha<0$，$\sin\alpha<0$，且$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$．

求得$\sin\alpha=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

（2）由以上可得，$\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{3+1}{1-3}=-2$．

（3）$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\bullet\dfrac{1}{10}-1=-\dfrac{4}{5}$．

19.（13 分）已知函数 $f(x)=|\log_a x|(a>0,a\neq 1)$．

（1）若 f（2）$=\frac{1}{2}$，求实数 a 的值；

（2）若 $0<x_1<x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，求 x_1x_2 的值；

（3）若函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}$，3] 的最大值与最小值之和为 2，求实数 a 的值．

【解答】解：（1）依题意，$|log_a 2|=\frac{1}{2}$，即 $log_a 2=\frac{1}{2}$ 或 $log_a 2=-\frac{1}{2}$，

解得 $a=4$ 或 $a=\frac{1}{4}$；

（2）依题意，$|\log_a x_1|=|\log_a x_2|$，又 $0<x_1<x_2$，故 $\log_a x_1+\log_a x_2=0$，即 $\log_a(x_1x_2)=0$，

故 $x_1x_2=1$；

（3）显然当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=|\log_a x|$ 取得最小值为 0，则函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}$，3] 的最大值为 2，

若 $f(\frac{1}{2})=|log_a \frac{1}{2}|=2$，解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=\sqrt{2}$；

若 f（3）$=|\log_a 3|=2$，解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $a=\sqrt{3}$；

结合（2）可知，只有 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $a=\sqrt{3}$ 满足题意．

20.（13 分）已知函数 $f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})$．

（1）求 $f(\frac{\pi}{2})$ 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及其图象的对称轴方程；

（3）对于任意 $x\in[0$，$m]$ 均有 $f(x)\geqslant f(0)$ 成立，求实数 m 的取值范围．

【解答】解：（1）$f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})$．

$f(\frac{\pi}{2})=0$．

（2）依题意，得函数

$f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})=4\cos x\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1+1$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+1=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$．

它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$．

函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，求得 $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$．

（3）对于任意 $x\in[0,\ m]$ 均有 $f(x)\geqslant f(0)$ 成立，

$f(0)=4\cos 0\sin\frac{\pi}{6}=2$．

$2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1=2$，可得 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(\frac{\pi}{3})=2$，

所以 $0<m\leqslant\frac{\pi}{3}$．

21．（14 分）若函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且存在非零实数 T，使得对于任意 $x\in R$，$f(x+T)=Tf(x)$ 恒成立，称函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$．

（1）分别判断下列函数是否满足性质 P（1），并说明理由；

① $f(x)=\sin 2\pi x$；

② $g(x)=\cos\pi x$．

（2）若函数 $f(x)$ 既满足性质 P（2），又满足性质 P（3），求函数 $f(x)$ 的解析式；

（3）若函数 $f(x)$ 满足性质 $P(1.01)$．求证：存在 $x_0\in R$，使得 $|f(x_0)|<0.001$．

【解答】解：（1）令 $T=1$，则 $f(x+1)=f(x)$，即该函数的周期为 1，

$\because f(x)=\sin 2\pi x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$，故 $f(x)$ 满足性质 P（1），

② $g(x)=\cos\pi x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\pi}=2$，故 $g(x)$ 不满足性质 P（1），

（2）函数 $f(x)$ 既满足性质 P（2），又满足性质 P（3），

$\therefore f(x+2)=2f(x)$，$f(x+3)=3f(x)$，

$\therefore f(x+3)=f(x+1+2)=2f(x+1)=3f(x)$ ①

又 $f(x+2)=f(x-1+3)=3f(x-1)=2f(x)$ ②

结合 $f(x+1)=f(x-1+2)=2f(x-1)$ ③，联立①②③消去 $f(x+1)$、$f(x-1)$

解得 $f(x)=0$．

（3）因为 $f(x+1.01)=1.01f(x)$，所以 $f(x)=\frac{1}{1.01}f(x+1.01)$，

所以 $f(x-1.01)=\frac{1}{1.01}f(x)$，取 $x=0$，$f(0-1.01)=\frac{1}{1.01}f(0)$，

$f(0-2\times 1.01)=\frac{1}{1.01}f(-1.01)=\frac{1}{1.01^2}f(0)$，……，

$f(-n\times 1.01)=\frac{1}{1.01^n}f(0)$，$(n\in N^+)$

易知$|f(-n\times1.01)|=\dfrac{1}{1.01^n}|f(0)|<0.001$，且随着$n$的增大$|f(-n\times1.01)|$的值递减.

对$\dfrac{1}{1.01^n}|f(0)|<0.001$两边取常用对数得：$-nlg1.01+lg|f(0)|<-3$

整理后得$n>\dfrac{3+lg|f(0)|}{lg1.01}$，取大于$\dfrac{3+lg|f(0)|}{lg1.01}$的整数$n$时，对应的$x_0=-n\times1.01$满足$|f(x_0)|<0.001$.

所以，存在$x_0\in R$．使得$|f(x_0)|<0.001$.

22.（14分）已知集合A为非空数集，定义$A^+=\{x|x=a+b$，a，$b\in A\}$，$A^-=\{x|x=|a-b|$，a，$b\in A\}$.

（1）若集合$A=\{-1$，$1\}$，直接写出集合A^+及A^-；

（2）若集合$A=\{x_1$，x_2，x_3，$x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，且$A^-=A$，求证$x_1+x_4=x_2+x_3$；

（3）若集$A\subseteq\{x|0\leqslant x\leqslant2020$，$x\in N\}$，且$A^+\bigcap A^-=\varnothing$，求集合$A$中元素的个数的最大值.

【解答】解：（1）根据题意，由$A=\{-1$，$1\}$，则$A^+=\{-2$，0，$2\}$，$A^-=\{0$，$2\}$；

（2）由于集合$A=\{x_1$，x_2，x_3，$x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，且$A^-=A$，

所以A^-中也只包含四个元素，即$A^-=\{0$，x_2-x_1，x_3-x_1，$x_4-x_1\}$，

剩下的$x_3-x_2=x_4-x_3=x_2-x_1$，所以$x_1+x_4=x_2+x_3$；

（3）设$A=\{a_1$，a_2，$\ldots a_k\}$满足题意，其中$a_1<a_2<\ldots<a_k$，

则$2a_1<a_1+a_2<a_1+a_3<\ldots<a_1+a_k<a_2+a_k<a_3+a_k<\ldots<a_{k-1}+a_k<2a_k$，

$\therefore|A^+|\geqslant2k-1$，$a_1-a_1<a_2-a_1<a_3-a_1<\ldots<a_k-a_1$，$\therefore|A^-|\geqslant k$，

$\because A^+\bigcap A^-=\varnothing$，由容斥原理$|A^+\bigcup A^-|=|A^+|+|A^-|\geqslant3k-1$，

$A^+\bigcup A^-$中最小的元素为0，最大的元素为$2a_k$，

$\therefore|A^+\bigcup A^-|\leqslant2a_k+1$，

$\therefore3k-1\leqslant2a_k+1\leqslant4041(k\in N^*)$，

$\therefore k\leqslant1347$，

实际上当$A=\{674$，675，676，$\ldots$，$2020\}$时满足题意，证明如下：

设 $A=\{m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots,\ 2020\}$，$m\in N$，

则 $A^{+}=\{2m,\ 2m+1,\ 2m+2,\ \ldots,\ 4040\}$，$A^{-}=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2020-m\}$，

依题意有 $2020-m<2m$，即 $m>673\frac{1}{3}$，

故 m 的最小值为 674，于是当 $m=674$ 时，A 中元素最多，

即 $A=\{674,\ 675,\ 676,\ \ldots,\ 2020\}$ 时满足题意，

综上所述，集合 A 中元素的个数的最大值是 1347.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。