2023 北京北师大实验中学高一（下）期中

数　　学

班级__________姓名__________学号__________成绩__________

考生须知	**1.本试卷共 4 页，共五道大题，24 道小题，答题卡共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟.** **2.在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号.** **3.试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效.** **4.在答题卡上，选择题须用 2B 铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答.**

第I卷（共 100 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 下列各角中，与27°角终边相同的是（　）

A. 63°　　B. 153°　　C. 207°　　D. 387°

2. 在$\triangle ABC$中，A为钝角，则点$P(\cos A, \tan B)$（　）

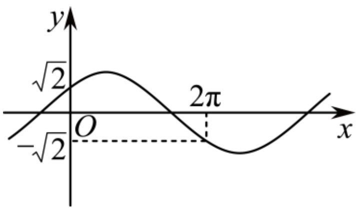
A. 在第一象限　　B. 在第二象限

C. 在第三象限　　D. 在第四象限

3. 已知$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，且角α，β的终边关于y轴对称，则$\cos\beta=$（　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

4. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图象如图所示，则$\omega$的值为（　）



A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

5. 下列函数中，周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数为（　）

A. $y=\sin 4x$　　B. $y=\cos 2x$　　C. $y=\tan 4x$　　D. $y=\sin^2 2x$

6. 如果角α的终边在直线$y=2x$上，则$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=$（　）

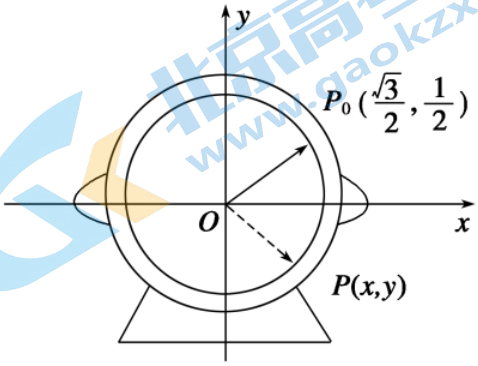
关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. $-\dfrac{5}{4}$　　D. $\dfrac{5}{4}$

7. 若将函数 $f(x)=2\sin x$ 的图像先向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，再保持纵坐标不变，并将图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $y=g(x)$ 图像的对称中心可能是（　）

A. $\left(-\dfrac{\pi}{12},0\right)$　　B. $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$　　C. $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$　　D. $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

8. 如图，为了研究钟表与三角函数的关系，建立如图所示的坐标系，设秒针尖位置 p（x，y）. 若初始位置为 $P_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，当秒针从 P_0（注此时 $t=0$）正常开始走时，那么点 P 的纵坐标 y 与时间 t 的函数关系为（　）



A. $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{30}t+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　B. $y=\sin\left(-\dfrac{\pi}{60}t-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C. $y=\sin\left(-\dfrac{\pi}{30}t+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　D. $y=\sin\left(-\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6}\right)$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 已知向量 $\vec{a}=(-2,-3)$，$\vec{b}=(6,m)$. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$__________.

10. 已知圆的半径为 2，则 $\dfrac{\pi}{5}$ 的圆心角所对的弧长为______.

11. 已知 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两根，则 $\tan(\alpha+\beta)$ 等于__________.

12. 设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$__________.

13. 已知函数 $f(x)=\sin x$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(x+m)=c$（c 为常数），则常数 m 的一个取值为__________.

14. 关于函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$；

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

②函数 $f\left(x\right)$ 的最小值是 1；

③函数 $f\left(x\right)$ 的最大值是 $\sqrt{2}$；

④函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

其中全部正确结论的序号是__________.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分）

15. 已知角 α 的终边过点 $P\left(-3m,8\right)$，且 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

（1）求 m，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值；

（2）求 $\cos2\alpha$，$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期和单调递减区间；

（2）若函数 $y=f\left(\omega x\right)\left(\omega>0\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上无零点，求 ω 的取值范围.

17. 已知 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 同时满足下列四个条件中的三个：

① $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$；② $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图像可以由 $y=\sin x-\cos x$ 的图像平移得到；③相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$；④最大值为 2.

（1）请直接指出这三个条件，并求出 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 的对称轴只有一条落在区间 $\left[0,m\right]$ 上，求 m 的取值范围.

第II卷（共 50 分）

四、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，它的终边与以原点 O 为圆心的单位圆交于点 $P(x,\dfrac{3}{5})$，则 $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=$______.

19. 梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=2$，$AD=CD=1$，$\angle BAD=90^\circ$，点 P 在线段 BC 上运动.

（1）当点 P 与点 C 重合时，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=$__________.

（2）$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最小值是__________.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

20. 已知点 $A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$，$B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ 是函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$ 图像上的任意两点，角 φ 的终边经过点 $P\left(1,-\sqrt{3}\right)$，且当 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=4$ 时，$\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. 又对任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，不等式 $mf\left(x\right)+2m\geq f\left(x\right)$ 恒成立，则 $\omega=$_________，实数 m 的取值范围是_________.

21. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$ 在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上有且仅有 4 条对称轴，给出下列四个结论，其中所有正确结论的序号是_________.

① $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 上有且仅有 3 个不同的零点；

② $f\left(x\right)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$；

③ ω 的取值范围是 $\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$；

④ $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$ 上单调递增.

五、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分）

22. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值；

（2）若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-k$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个不同的零点，请直接写出实数 k 的取值范围（不需过程）.

23. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，A、B、C 三点满足 $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

（1）已知 $A\left(3,0\right)$，$B\left(0,3\right)$，求 $\cos\left\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{OC}\right\rangle$；

（2）已知 $A\left(1,\cos x\right)$，$B\left(1+\sin x,\cos x\right)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f\left(x\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\left(2m+\frac{1}{3}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|+m^2$ 的最小值为 5，求实数 m 的值.

24. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为区间 D，若对于给定的非零实数 m，存在 x_0，使得 $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+m\right)$，则称函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 D 上具有性质 $P\left(m\right)$.

（1）判断函数 $f\left(x\right)=x^2$ 在区间 $\left[-1,1\right]$ 上是否具有性质 $P\left(\frac{1}{2}\right)$，并说明理由；

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（2）若函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(0,n)(n>0)$ 上具有性质 $P\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，求 n 的取值范围；

（3）已知函数 $y=f(x)$ 的图像是连续不断的曲线，且 $f(0)=f(2)$，求证：函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有性质 $P\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

参考答案

第I卷（共100分）

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1.【答案】D

【解析】

【分析】

写出与$27°$终边相同角的集合，取k值得答案.

【详解】与$27°$角终边相同的角的集合为$\{\alpha|\alpha=27°+k\cdot 360°,k\in Z\}$，

取$k=1$，可得$\alpha=387°$.

∴与$27°$角终边相同的是$387°$.

故选：D

【点睛】本小题主要考查终边相同的角，属于基础题.

2.【答案】B

【解析】

【分析】先判断$\cos A,\tan B$的正负，即可求解

【详解】在$\triangle ABC$中，A为钝角，则B为锐角，

则$\cos A<0,\tan B>0$，

则点$P(\cos A,\tan B)$在第二象限，

故选：B

3.【答案】B

【解析】

【分析】首先根据对称性，求α,β的关系，根据诱导公式，即可求解.

【详解】因为角α，β的终边关于y轴对称，所以$\alpha+\beta=\pi+2k\pi$，$k\in Z$，

即$\beta=-\alpha+\pi+2k\pi$，$\cos\beta=\cos(-\alpha+\pi+2k\pi)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

故选：B

4.【答案】C

【解析】

【分析】由图象分析函数的周期，求得ω的值.

【详解】因为$f(0)=\sqrt{2}$，$f(2\pi)=-\sqrt{2}$，由图象可知，函数的半周期是2π，

所以$\frac{\pi}{\omega}=2\pi$，得$\omega=\frac{1}{2}$.

故选：C

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

5.【答案】D

【解析】

【分析】利用三角函数的周期公式及二倍角的余弦公式,结合函数的奇偶性的定义及诱导公式即可求解.

【详解】对于 A，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，由题意可知，$y=\sin 4x$ 的定义域为 R，

$f(-x)=\sin 4(-x)=-\sin 4x=-f(x)$，所以 $y=\sin 4x$ 为奇函数，故 A 错误；

对于 B，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 错误；

对于 C，$T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{4}$，故 C 错误；

对于 D，$y=\sin^2 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，由题意可知，$y=\sin^2 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$ 的定义域为 R，$f(-x)=\sin^2 2(-x)=\sin^2 2x=f(x)$，所以 $y=\sin^2 2x$ 为偶函数，故 D 正确.

故选：D.

6.【答案】B

【解析】

【分析】利用三角函数的定义及同角三角函数的商数关系即可求解.

【详解】因为角 α 的终边在直线 $y=2x$ 上，

所以 $\tan\alpha=2$.

所以 $\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\tan\alpha+2}{3\tan\alpha-1}=\frac{2+2}{3\times2-1}=\frac{4}{5}$.

故选：B.

7.【答案】A

【解析】

【分析】首先根据三角函数的变换规则求出 $g(x)$ 的解析式，再根据正弦函数的性质计算可得.

【详解】将函数 $f(x)=2\sin x$ 的图像先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

再将 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 保持纵坐标不变，图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，得到

$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，解得 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathrm{Z}$，

所以函数的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathrm{Z}$，故符合题意的有 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

故选：A

8.【答案】C

【解析】

【分析】先确定函数的周期，再假设函数的解析式，进而结合待定系数法可求函数的解析式，注意秒针是顺时针走动.

【详解】解：由题意，函数的周期为$T=60$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$

设函数解析式为$y=\sin(-\frac{\pi}{30}t+\varphi)$（因为秒针是顺时针走动），

$\because$初始位置为$P_0(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$，

$\therefore t=0$时，$y=\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin\varphi=\frac{1}{2}$，

$\therefore \varphi$可取$\frac{\pi}{6}$，

$\therefore$函数解析式为$y=\sin(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6})$

故选：C.

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

9.【答案】-4

【解析】

【分析】利用向量垂直的条件及数量积的坐标运算即可求解.

【详解】因为$\vec{a}=(-2,-3)$，$\vec{b}=(6,m)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\times 6+(-3)\times m=0$，解得$m=-4$.

故答案为：-4.

10. 已知圆的半径为2，则$\frac{\pi}{5}$的圆心角所对的弧长为______.

【答案】$\frac{2\pi}{5}$

【解析】

【分析】

由已知结合弧长公式即可直接求解

【详解】由弧长公式可得$l=\alpha r=\frac{\pi}{5}\times 2=\frac{2\pi}{5}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

故答案为：$\dfrac{2\pi}{5}$

【点睛】本小题主要考查弧长公式，属于基础题.

11.【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据题意得到 $\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3},\tan\alpha\tan\beta=4$，结合 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，即可求解.

【详解】由题意知 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两根，

可得 $\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3},\tan\alpha\tan\beta=4$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

12.【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】首先根据数量积的定义求出 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，再根据 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}$ 及数量积的运算律计算可得.

【详解】因为向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，且 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=4$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos60°=2\times4\times\dfrac{1}{2}=4$，

所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$

$=\sqrt{2^2-2\times4+4^2}=2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$

13.【答案】π（答案不唯一，只要是 $(2k+1)\pi$ 即可）

【解析】

【分析】先根据函数的对称性得到 $c=0$，再根据诱导公式求出 $m=(2k+1)\pi$ 都可满足条件.

【详解】函数 $f(x)=\sin x$ 中心对称点都在 x 轴上，所以 $c=0$，

所以 $f(x)+f(x+m)=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$f(x)+f(x+m)=\sin x+\sin(x+m)=0$，

所以 $\sin x=-\sin(x+m)$，故利用诱导公式得 $m=(2k+1)\pi$ 都可满足条件.

故答案为：π（答案不唯一，只要是 $(2k+1)\pi$ 即可）

【点睛】正弦函数的奇偶性，对称性，周期性，单调性及诱导公式等等是我们必备的基础知识，做题时经

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

常用到.

14.【答案】①②③

【解析】

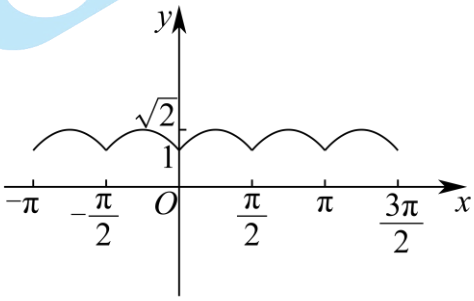
【分析】首先把三角函数变形成 $f(x)=\sqrt{1+|\sin 2x|}$ 的形式，进而逐一分析三个结论的真假，可得答案.

【详解】$\because$ 函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|=\sqrt{1+|\sin 2x|}$，

则 $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{1+\left|\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|}=\sqrt{1+|\sin(2x+\pi)|}=\sqrt{1+|\sin 2x|}=f(x)$，

且 $f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}),2k\pi\le x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\\ \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4}),2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\le x<2k\pi+\pi,k\in Z\\ -\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}),2k\pi+\pi\le x<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},k\in Z\\ \cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4}),2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\le x<2k\pi+2\pi,k\in Z\end{cases}$，

函数图象如下所示：



所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，故①正确；

故当 $\sin 2x=0$ 时，函数的最小值为1，故②正确；

当 $\sin 2x=\pm 1$ 时，函数取最大值 $\sqrt{2}$，故③正确；

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x\in(0,\pi)$，因为 $y=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上不单调，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上不单调，

故④错误；

故答案为：①②③

三、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分）

15.【答案】(1) $m=2$；$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$；$-\dfrac{4}{3}$.

(2) $\cos 2\alpha=-\dfrac{7}{25}$；$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

【解析】

【分析】(1) 利用余弦函数在各象限的符号及三角函数的定义即可求解；

(2) 根据 (1) 的结论及二倍角的余弦公式，利用两角和的正弦公式及三角函数的特殊值即可求解.

【小问 1 详解】

因为角 α 的终边过点 $P\left(-3m,8\right)$，且 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}<0$，

所以 α 是第二象限角,且 $m>0$.

所以 $\cos\alpha=\frac{-3m}{\sqrt{\left(-3m\right)^2+8^2}}=-\frac{3}{5}$，解得 $m=2$ 或 $m=-2$ (舍).

所以 $x=-6,y=8,r=\left|OP\right|=\sqrt{\left(-6\right)^2+8^2}=10$，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$.

【小问 2 详解】

由 (1) 知，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

又因为 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$，

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

16.【答案】(1) 最小正周期为 π；单调递减区间 $\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in Z$；

(2) $0<\omega<\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 首先化简函数 $f\left(x\right)$，再结合三角函数的性质，即可求解；

(2) 首先根据 (1) 的结果求 $2\omega x-\frac{\pi}{3}$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 的范围，根据函数无零点，求 ω 的取值范围.

【小问 1 详解】

$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

则函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le 2x-\frac{\pi}{3} \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$， $k\in Z$，

得 $\frac{5\pi}{12}+k\pi \le x \le \frac{11\pi}{12}+k\pi$， $k\in Z$，

所以函数的单调递减区间是 $\left[\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{11\pi}{12}+k\pi\right]$， $k\in Z$；

【小问 2 详解】

$y=f(\omega x)=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right),(\omega>0)$，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时， $2\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\omega\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right]$ 因为函数在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上无零点，

所以 $-\frac{\pi}{3}<\omega\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<0$，解得： $0<\omega<\frac{1}{2}$.

17. 【答案】（1）①③④， $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

（2） $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$

【解析】

【分析】（1）先分析②③④成立时的情况，然后推出矛盾即可确定出满足的三个条件；

（2）先根据（1）求解出 $f(x)$ 的解析式，然后采用整体替换的方法求解出 $f(x)$ 的对称轴方程，然后对 k 进行赋值，确定出在区间 $[0,m]$ 上仅有一条对称轴时 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

三个条件是：①③④，理由如下：

若满足②：因为 $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $A=\sqrt{2}$， $\omega=1$；

若满足③：因为 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，所以 $\omega=2$，

若满足④： $A=2$，

由此可知：若满足②，则③④均不满足，

所以满足的三个条件是：①③④；

由③④知 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

由①知 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$ 或 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$ 或 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$，又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

【小问 2 详解】

由（1）可知 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

不妨令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，所以 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in Z$，

当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{6}$；当 $k=0$ 时，$x=\frac{\pi}{3}$；当 $k=1$ 时，$x=\frac{5\pi}{6}$，

所以若要 $y=f(x)$ 的对称轴只有一条落在区间 $[0,m]$ 上，只需 $m\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 m 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

第II卷（共 50 分）

四、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

18.【答案】 $\frac{3}{5}$##0.6

【解析】

【分析】先根据三角函数定义求得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，再使用诱导公式进行求解.

【详解】根据三角函数定义可得：$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，由诱导公式得：$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{3}{5}$

19.【答案】 ①. 0 ②. $-\frac{1}{2}$##-0.5

【解析】

【分析】(1) 建立平面直角坐标系，利用向量数量积的坐标表示，即可求解；

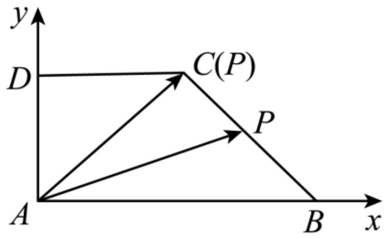
(2) 根据 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，设出点 P 的坐标，利用数量积的坐标表示，转化为二次函数求最值.

【详解】(1) 如图，以点 A 为原点，建立平面直角坐标系，当点 P 与点 C 重合时，

$A(0,0)$，$P(1,1)$，$C(1,1)$，$B(2,0)$，

$\overrightarrow{AP}=(1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1)$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=1\times(-1)+1\times1=0$；

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。



（2）由（1）可知，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，设 $P(2-y,y)$，$0\le y\le 1$，

$\overrightarrow{AP}=(2-y,y)$，$\overrightarrow{BP}=(-y,y)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(2-y)\cdot(-y)+y^2=2y^2-2y=2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$，

当 $y=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$.

故答案为：0；$-\frac{1}{2}$.

20.【答案】　①. 3　②. $m\ge\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】由 φ 的终边上的点可求出 φ 的值，再由题可得 $T=\frac{2\pi}{3}$，即可求出 ω，可得 $f(x)$ 解析式；根据 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 可得 $f(x)$ 的范围，不等式化为 $m\ge 1-\frac{2}{2+f(x)}$，求出 $1-\frac{2}{2+f(x)}$ 的最大值即可.

【详解】角 φ 的终边经过点 $P(1,-\sqrt{3})$，所以 $\tan\varphi=-\sqrt{3}$，

又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

因为当 $|f(x_1)-f(x_2)|=4$ 时，$|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 $T=\frac{2\pi}{3}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\omega=3$，

可得 $f(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$3x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$，

所以 $-\sqrt{3}\le f(x)\le 1$，所以 $2+f(x)>0$，

于是 $mf(x)+2m\ge f(x)$ 即为 $m\ge\frac{f(x)}{2+f(x)}=1-\frac{2}{2+f(x)}$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

由$-\sqrt{3}\le f(x)\le 1$，$2-\sqrt{3}\le 2+f(x)\le 3$，$\frac{2}{3}\le\frac{2}{2+f(x)}\le\frac{2}{2-\sqrt{3}}=4+2\sqrt{3}$，

所以$-3-2\sqrt{3}\le 1-\frac{2}{2+f(x)}\le\frac{1}{3}$，

得$1-\frac{2}{2+f(x)}$的最大值为$\frac{1}{3}$，

所以实数m的取值范围是$m\ge\frac{1}{3}$.

故答案为：3；$m\ge\frac{1}{3}$.

21.【答案】②③

【解析】

【分析】首先通过$f(x)$在区间$[0,\pi]$上有且仅有4条对称轴，求出ω的范围，再依次对各项进行辨析即可.

【详解】$\because f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，

$\therefore$当$x\in[0,\pi]$时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，

$\because$正弦函数$y=\sin x$的对称轴为直线$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore$当$k=0$，1，2，3，4时，$y=\sin x$的对称轴分别为直线$x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$，$x=\frac{5\pi}{2}$，$x=\frac{7\pi}{2}$，$x=\frac{9\pi}{2}$，

$\therefore$若函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$在区间$[0,\pi]$上有且仅有4条对称轴，

则$\begin{cases}\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\\ \frac{7\pi}{2}\le\omega\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{9\pi}{2}\end{cases}$，解得$\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$，故③正确；

对于①，当$x\in(0,\pi)$时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\because\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$，$\therefore\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right)$，

$\because$正弦函数$y=\sin x$的对称中心为点$(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$时，

$\therefore$当$k=1$，2，3，4时，$y=\sin x$的对称中心分别为点$(\pi,0)$，$(2\pi,0)$，$(3\pi,0)$，$(4\pi,0)$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore$当$\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{2},4\pi\right)$，即$\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{15}{4}\right)$时，$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$有且仅有3个对称中心，

当$\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left[4\pi,\frac{9\pi}{2}\right)$，即$\omega\in\left[\frac{15}{4},\frac{17}{4}\right)$时，$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$有且仅有4个对称中心，故①错误；

对于②，若$f\left(x\right)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，则$\omega=4\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$，故②正确；

对于④，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\right)$，

又$\because\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$，$\therefore\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{15},\frac{8\pi}{15}\right)$，

$\because$正弦函数$y=\sin x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，

$\therefore$当$\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{15},\frac{\pi}{2}\right]$，即$\omega\in\left[\frac{13}{4},\frac{15}{4}\right]$时，$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$上单调递增，

当$\frac{\omega\pi}{15}+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{8\pi}{15}\right)$，即$\omega\in\left(\frac{15}{4},\frac{17}{4}\right)$时，$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$上不单调，故④错误.

故答案为：②③.

【点睛】方法点睛：本题ω的取值并不是一个特定的值，而是一个范围，故应首先由已知条件解决ω的取值范围，判断③，再由ω的取值范围，使用整体代换思想，对其他项进行辨析.

五、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分）

22.【答案】（1）最大值2，最小值$-\sqrt{3}$.

（2）$\left[\sqrt{3},2\right)$

【解析】

【分析】（1）使用二倍角公式（降幂公式）和辅助角公式化简$f\left(x\right)$，再结合正弦函数性质求解；

（2）将问题转化为函数图象与直线$y=k$有两个不同的交点解决即可.

【小问 1 详解】

由已知，$f\left(x\right)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}=\sin 2x+\sqrt{3}\left(2\cos^2 x-1\right)$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，

$\therefore$当$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{12}$时，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$，$f\left(x\right)$有最大值$2$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(x)$ 有最小值 $-\sqrt{3}$.

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 2，最小值为 $-\sqrt{3}$.

【小问 2 详解】

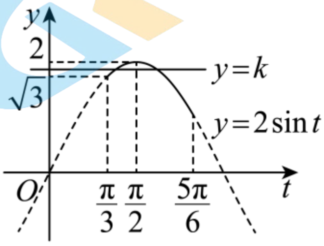
由第（1）问，$g(x)=f(x)-k=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-k$，

$g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个不同的零点，即方程 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-k=0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个不相等的实数解，

令 $2x+\frac{\pi}{3}=t$，$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，$\therefore t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，

$\therefore$ 方程 $2\sin t-k=0$ 即 $2\sin t=k$，在 $t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上有两个不相等的实数解，

$\therefore$ 函数 $y=2\sin t$ 的图象与直线 $y=k$ 在 $t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上有两个交点，如图所示.



$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $\left[\sqrt{3},2\right)$.

23. 【答案】（1）$-\frac{\sqrt{10}}{10}$

（2）-3 或 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）首先求出 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{BA}$ 的坐标，再坐标法求出数量积与模，即可得解；

（2）首先求出 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$、$\left|\overrightarrow{AB}\right|$，则 $f(x)=-\sin^2 x+(2m+1)\sin x+2+m^2$，再令 $t=\sin x$，$t\in[0,1]$，令 $g(t)=-t^2+(2m+1)t+2+m^2$，结合二次函数的性质得到方程，解得即可.

【小问 1 详解】

因为 $A(3,0)$，$B(0,3)$，所以 $\overrightarrow{OA}=(3,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,3)$，$\overrightarrow{BA}=(3,-3)$，

又 $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(3,0)+\frac{2}{3}(0,3)=(1,2)$，

所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}=3\times1+2\times(-3)=-3$，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $\cos\left\langle \overrightarrow{BA},\overrightarrow{OC}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|}=\dfrac{-3}{\sqrt{5}\times3\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

【小问 2 详解】

因为 $\overrightarrow{OA}=(1,\cos x)$，$\overrightarrow{OB}=(1+\sin x,\cos x)$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

所以 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{3}(1,\cos x)+\dfrac{2}{3}(1+\sin x,\cos x)=\left(1+\dfrac{2}{3}\sin x,\cos x\right)$，

$\overrightarrow{AB}=(\sin x,0)$，

故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1+\dfrac{2}{3}\sin x+\cos^2 x$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$，

从而 $f(x)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\left(2m+\dfrac{1}{3}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|+m^2$

$=1+\dfrac{2}{3}\sin x+\cos^2 x+\left(2m+\dfrac{1}{3}\right)\sin x+m^2$

$=1+\cos^2 x+(2m+1)\sin x+m^2$

$=-\sin^2 x+(2m+1)\sin x+2+m^2$，

即 $f(x)=-\sin^2 x+(2m+1)\sin x+2+m^2$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

依题意 $f(x)_{\min}=5$，

令 $t=\sin x$，$t\in[0,1]$，令 $g(t)=-t^2+(2m+1)t+2+m^2$，$t\in[0,1]$，

则 $g(t)$ 对称轴为 $t=\dfrac{2m+1}{2}$，

①当 $\dfrac{2m+1}{2}\le\frac{1}{2}$，即 $m\le0$ 时，当 $t=\sin x=1$ 时，$g(t)_{\min}=m^2+2m+2$，

由 $f(x)_{\min}=5$，得 $g(t)_{\min}=m^2+2m+2=5$，解得 $m=-3$ 或 $m=1$，又 $m\le0$，

所以 $m=-3$；

②当 $\dfrac{2m+1}{2}>\frac{1}{2}$，即 $m>0$ 时，当 $t=\sin x=0$ 时，$g(t)_{\min}=2+m^2$，

由 $f(x)_{\min}=5$，得 $g(t)_{\min}=2+m^2=5$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$，又 $m>0$，所以 $m=\sqrt{3}$.

综上所述：m 的值为 -3 或 $\sqrt{3}$.

24.【答案】（1）具有性质 $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$，理由见解析

（2）$\left(\dfrac{5\pi}{8},+\infty\right)$

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由题可得 $x_0^2=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2$，则 $x_0=-\frac{1}{4}$，结合条件即得；

（2）由 $\sin x_0=\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)$，解得 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}$，$x_0+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{5\pi}{8}\in(0,n)(k\in\mathrm{N})$，可得 $n>\frac{5\pi}{8}$，即得；

（3）设 $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{3}\right)$，$x\in\left[0,\frac{5}{3}\right]$，可得

$g(0)+g\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\frac{k-1}{3}\right)+\cdots+g\left(\frac{5}{3}\right)=f(2)-f(0)=0$，当 $g(0)$、$g\left(\frac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\frac{k-1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\frac{5}{3}\right)$ 中有一个为 0 时，可得 $f\left(\frac{i-1}{3}\right)=f\left(\frac{i-1}{3}+\frac{1}{3}\right)$，$i\in\{1,2,3,\cdots,6\}$，即证；当 $g(0)$、$g\left(\frac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\frac{n-1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\frac{5}{3}\right)$ 中均不为 0 时，由于其和为 0，则其中必存在正数和负数，不妨设 $g\left(\frac{i-1}{3}\right)>0$，$g\left(\frac{j-1}{3}\right)<0$，结合条件可知，存在 x_0，$g(x_0)=f(x_0)-f\left(x_0+\frac{1}{3}\right)=0$，即证.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上具有性质 $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

若 $x_0^2=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2$，则 $x_0=-\frac{1}{4}$，

因为 $-\frac{1}{4}\in[-1,1]$，且 $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\in[-1,1]$，

所以函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上具有性质 $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

【小问 2 详解】

解法 1：由题意，存在 $x_0\in(0,n)$，使得 $\sin x_0=\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)$，

得 $x_0+\frac{\pi}{4}=x_0+2k\pi$（舍）或 $x_0+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-x_0$ $(k\in\mathbf{Z})$，

则得 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}$.

因为 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}>0$，所以 $k\in\mathbf{N}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

又因为$x_0=k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\in(0,n)$且$x_0+\dfrac{\pi}{4}=k\pi+\dfrac{5\pi}{8}\in(0,n)(k\in\mathbf{N})$，

所以$n>\dfrac{5\pi}{8}$，即所求n的取值范围是$\left(\dfrac{5\pi}{8},+\infty\right)$.

解法 2：当$0<n\le\dfrac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\sin x$，$x\in(0,n)$是增函数，

所以不符合题意；

当$n>\dfrac{\pi}{2}$时，因为直线$x=\dfrac{\pi}{2}$是函数$f(x)=\sin x$的一条对称轴，

而函数$f(x)=\sin x$在区间$(0,n)(n>0)$上具有性质$P\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以$2\left(n-\dfrac{\pi}{2}\right)>\dfrac{\pi}{4}$，

解得$n>\dfrac{5\pi}{8}$，即所求n的取值范围是$\left(\dfrac{5\pi}{8},+\infty\right)$.

【小问 3 详解】

设$g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$，$x\in\left[0,\dfrac{5}{3}\right]$.

则有$g(0)=f(0)-f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)-f(1)$，$\cdots$，

$g\left(\dfrac{k-1}{3}\right)=f\left(\dfrac{k-1}{3}\right)-f\left(\dfrac{k}{3}\right)$，$\cdots$，$g\left(\dfrac{5}{3}\right)=f\left(\dfrac{5}{3}\right)-f(2)\ (k\in\{1,2,3,\cdots,6\})$.

以上各式相加得$g(0)+g\left(\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{k-1}{3}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{5}{3}\right)=f(2)-f(0)$

即$g(0)+g\left(\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{k-1}{3}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$，

（i）当$g(0)$、$g\left(\dfrac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\dfrac{k-1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\dfrac{5}{3}\right)$中有一个为 0 时，不妨设$g\left(\dfrac{i-1}{3}\right)=0$，

$i\in\{1,2,3,\cdots,6\}$，即$g\left(\dfrac{i-1}{3}\right)=f\left(\dfrac{i-1}{3}\right)-f\left(\dfrac{i}{3}\right)=0$，即$f\left(\dfrac{i-1}{3}\right)=f\left(\dfrac{i-1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)$，$i\in\{1,2,3,\cdots,6\}$，

所以函数$y=f(x)$在区间$[0,2]$上具有性质$P\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

（ii）当$g(0)$、$g\left(\dfrac{1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\dfrac{n-1}{3}\right)$、$\cdots$、$g\left(\dfrac{5}{3}\right)$中均不为 0 时，由于其和为 0，

则其中必存在正数和负数，不妨设$g\left(\dfrac{i-1}{3}\right)>0$，$g\left(\dfrac{j-1}{3}\right)<0$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

其中$i \neq j$，i、$j \in \{1,2,3,\cdots,6\}$.

由于函数$y=g(x)$的图像是连续不断的曲线，所以当$i<j$时，至少存在一个实数$x_0 \in \left(\frac{i-1}{3},\frac{j-1}{3}\right)$（当$i>j$时，至少存在一个实数$x_0 \in \left(\frac{j-1}{3},\frac{i-1}{3}\right)$），其中$i$、$j \in \{1,2,3,\cdots,6\}$，使得$g(x_0)=0$，即

$g(x_0)=f(x_0)-f\left(x_0+\frac{1}{3}\right)=0$，

即存在x_0，使得$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{3}\right)$，

所以函数$y=f(x)$在区间$[0,2]$上也具有性质$P\left(\frac{1}{3}\right)$.

综上，函数$y=f(x)$在区间$[0,2]$上具有性质$P\left(\frac{1}{3}\right)$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。