2024 届广东省高三 12 月联考

数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{x|0\le x\le 2,x\in \mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$（　　）．

A．$\{0,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{1,2,4\}$

2．函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}+(x-1)^0$ 的定义域是（　　）．

A．$[-3,3]$　　B．$[-3,1)\cup(1,3]$

C．$(-3,3)$　　D．$(-3,1)\cup(1,3)$

3．已知 $p:m>n>0$，$q:\dfrac{n+1}{m+1}>\dfrac{n}{m}$，则 p 是 q 的（　　）．

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 2\alpha$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）．

A．$-\dfrac{3}{4}$　　B．$-\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

5．已知等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为S_n，T_n，若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{n+2}{3n+4}$，则$\dfrac{a_3+a_9}{b_4+b_6+b_8}=$（　　）.

A．$\dfrac{13}{111}$　　B．$\dfrac{26}{37}$　　C．$\dfrac{26}{111}$　　D．$\dfrac{13}{37}$

6．如图，为了测量某铁塔的高度，测量人员选取了与该塔底 B 在同一平面内的两个观测点 C 与 D，现测得$\angle CDB=37^\circ$，$\angle BCD=68^\circ$，$CD=37.6$米，在点 C 处测得塔顶 A 的仰角为64°，则该铁塔的高度约为（　　）.（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.4$，$\sqrt{6}\approx2.4$，$\tan64^\circ=2.0$，$\cos37\approx=0.8$）

A．42 米　　B．47 米　　C．38 米　　D．52 米

7．设$a=\ln1.04$，$b=1.04$，$c=e^{0.04}$，其中 e 为自然对数的底数，则（　　）.

A．$c>b>a$　　B．$b>a>c$　　C．$b>c>a$　　D．$a>c>b$

8．已知$f(x)$是定义在 **R** 上的函数，且满足$f(3x-2)$为偶函数，$f(2x-1)$为奇函数，则下列说法一定正确的是（　　）.

A．函数$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称　　B．函数$f(x)$的周期为 2

C．函数$f(x)$关于点$(2,0)$中心对称　　D．$f(2023)=0$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列命题中为真命题的是（　　）.

A．$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\exists x\in\mathbf{R}$，$\ln x=-1$

C．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>0$　　D．$\forall x\in\mathbf{R}$，$3^x>0$

10．函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(0<\omega<4)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{6}$对称，将$f(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长

度后与函数 $y=g\left(x\right)$ 图象重合，则关于 $y=g\left(x\right)$，下列说法正确的是（　　）.

A．函数图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称　　B．函数图象关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称

C．在 $\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 单调递减　　D．最小正周期为 π

11．已知 a，b 均为正实数，且 $4a+b\left(1-a\right)=0$，则下列不等式正确的是（　　）.

A．$ab\geq 16$　　B．$2a+b\geq 6+4\sqrt{2}$

C．$a-b<0$　　D．$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}\geq\dfrac{1}{2}$

12．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}+\gamma\overrightarrow{AA_1}$，$\lambda$，$\mu$，$\gamma\in\mathbf{R}$（$P$，$B$，$D$，$A_1$ 四点不重合），则下列说法正确的是（　　）.

A．当 $\lambda+\mu+\gamma=1$ 时，$\left|PA\right|$ 的最小值是 1

B．当 $\lambda=1$，$\mu=\gamma$ 时，PB // 平面 AB_1D_1

C．当 $\lambda=\mu=1$，$\gamma=\dfrac{1}{2}$ 时，平面 $PBD\perp$ 平面 A_1BD

D．当 $\lambda\mu=1$，$\gamma=0$ 时，直线 PA，与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正切值最大，最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}$，则 $z+\overline{z}=$__________.

14．已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是两两夹角均为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的单位向量，则 $\left|\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right|=$__________.

15．“升”是我国古代测量粮食的一种容器，在“升”装满后用手指成筷子沿升口刮平，这叫“平升”，如图所示的“升”，从内部测量，其上、下底面均为正方形，边长分别为 20cm 和 10cm，侧面是全等的等腰梯形，梯形的高为 $5\sqrt{2}$cm，那么这个“升”的“平升”可以装__________mL 的粮食.（结果保留整数）

16．已知函数 $f\left(x\right)=e^{3}$，$g\left(x\right)=a\left(x-1\right)$，$a\in\mathbf{R}$，若 $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

__________.

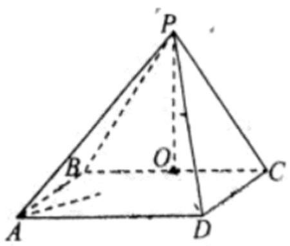
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）已知正项数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$nS_{n+1}=\left(n+2\right)S_n$．

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=2^{a_n}$，若数列 $\left\{c_n\right\}$ 满足 $c_n=\dfrac{b_n}{\left(b_n-1\right)\left(b_{n+1}-1\right)}$，求 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和．

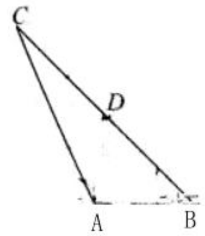
18．（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，O 是 BC 的中点，$PB=PC=\sqrt{3}$，$PD=BC=2AB=2$．



（1）求证：平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求点 A 到平面 PCD 的距离．

19．（12 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，$AC=2AB$，D 为边 BC 上一点，$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$．



（1）求 $\dfrac{CD}{AD}$ 的值；

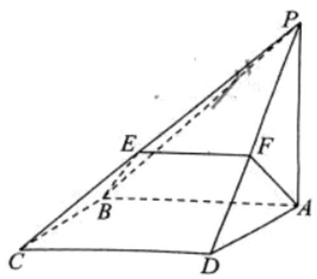
（2）当 $AD=4$ 时，求线段 AC 的长.

20.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$.

（1）求 a_n；

（2）设 $b_n=na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

21.（12 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA=AB=2$，且 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，点 F 是棱 PD 的中点，平面 ABF 与棱 PC 交于点 E.



（1）求 PC 与平面 ABE 所成角的正弦值；

（2）在线段 PB 上是否存在一点 G，使得直线 EG 与直线 AF 所成角为 $45°$？若存在，试说明点 G 位置；若不存在，请说明理由.

22．设函数 $f(x)=a\ln x-\ln(x+1)+m$，$a>0$，$m\in\mathbf{R}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若对任意 $0<a<1$，函数 $f\left(x\right)$ 均有 2 个零点，求实数 m 的取值范围；

（3）设 $n\in\mathbf{N}^{*}$ 且 $n\geq 2$，证明：$\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^{3}\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}>2^{-\frac{n^{2}}{2}}$.