2023北京一六六中高三（上）期中

数　　学

（考试时长：120分钟）

考查目标
知识：集合与简易逻辑；不等式；函数与导数；三角函数与解三角形；立体几何；平面解析几何；排列组合与二项式定理；概率统计 能力：数学抽象概括；逻辑推理论证；数学建模应用；直观想想；数学运算；数据分析；空间想象能力

一、选择题：本题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>1\}$，$B=\{x\,|\,0\le x<2\}$，则集合 $A\cup B=$（　）

A. $\{x\,|\,0\le x<1\}$　　B. $\{x\,|\,1<x<2\}$

C. $\{x\,|\,x<-1$ 或 $x\ge 0\}$　　D. $\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>2\}$

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. "$a>b>0$"是"$\sqrt{a}>\sqrt{b}$"的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(1,0)$，$\vec{c}=(3,4)$，若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})//\vec{c}(\lambda\in R)$，则实数 $\lambda=$（　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

5. 已知实数 x,y 满足 $a^x<a^y(0<a<1)$，则下列关系式恒成立的是（　）

A. $\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{y^2+1}$　　B. $\tan x>\tan y$

C. $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$　　D. $x^3>y^3$

6. 函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，则 ω 可以为（　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 1

7. 关于函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$，下列说法错误的是

A. $f(x)$ 是奇函数

B. 0 不是 $f(x)$ 的极值点

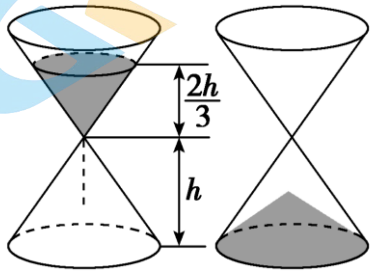
C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上有且仅有 3 个零点

D. $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$

8. 二维码与生活息息相关，我们使用的二维码主要是 21×21 大小的，即 441 个点，根据 0 和 1 的二进制编码，一共有 2^{441} 种不同的码. 假设我们 1 秒钟用掉 1 万个二维码，1 万年约为 3×10^{11} 秒，那么大约可以用（　）（参考数据：$\lg 2\approx0.3,\lg 3\approx0.5$）

A. 10^{117} 万年　　B. 117 万年　　C. 10^{205} 万年　　D. 205 万年

9. 沙漏是古代的一种计时装置，它由两个形状完全相同的容器和一个狭窄的连接管道组成，开始时细沙全部在上部容器中，利用细沙全部流到下部容器所需要的时间进行计时.如图，某沙漏由上、下两个圆维组成.这两个圆锥的底面直径和高分别相等，细沙全部在上部时，其高度为圆锥高度（h）的 $\frac{2}{3}$（细管长度忽略不计）.假设细沙全部漏入下部后，恰好堆成一个盖住沙漏底部的圆锥形沙堆.这个沙堆的高与圆锥的高 h 的比值为（　）



A. $\frac{8}{27}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

10. 对于函数 $f(x)$，若集合 $\{x|x>0,f(x)=f(-x)\}$ 中恰有 k 个元素，则称函数 $f(x)$ 是"k 阶准偶函数".若函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x,x\le a\\ x^2,x>a\end{cases}$ 是"2 阶准偶函数"，则 a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $[0,2)$　　C. $[0,4)$　　D. $[2,4)$

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的正半轴上，终边与单位圆交于第二象限的点 P，且点 P 的纵坐标为 $\frac{1}{2}$，则 $\cos\alpha=$____________.

12. 在 $(1-2\sqrt{x})^4$ 的二项展开式中，第四项为____________.

13. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$.

①若 $f\left(0\right)=1$，则 $\varphi=$___________；

②若 $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $f\left(x+2\right)-f\left(x\right)=4$ 成立，则 ω 的最小值是___________.

14. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸，是中国古老的传统民间艺术．图 1 是一张由卷曲纹和回纹构成的正六边形剪纸窗花．图 2 中正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 4，圆 O 的圆心为该正六边形的中心，圆 O 的半径为 2，圆 O 的直径 $MN // CD$，点 P 在正六边形的边上运动，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最小值为___________

图 1

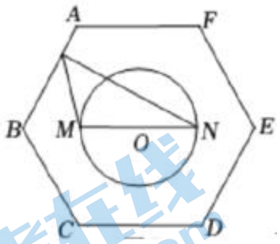
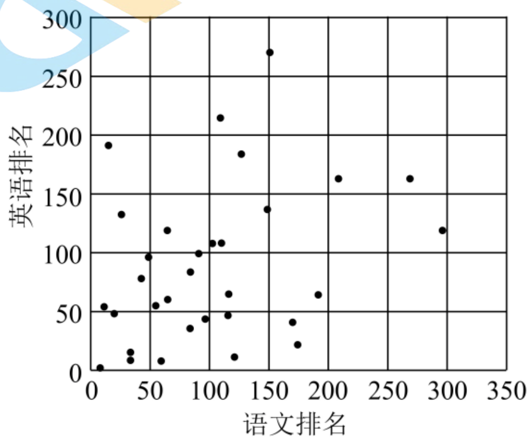


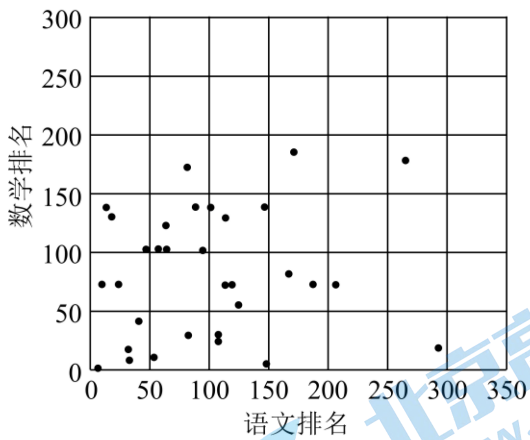
图 2

15. 某班在一次考试后分析学生在语文、数学、英语三个学科的表现，绘制了各科年级排名的散点图（如下图所示）.

语文和英语年级排名散点图



语文和数学年级排名散点图



关于该班级学生这三个学科本次考试的情况，给出下列四个结论：

①三科中，数学年级排名的平均数及方差均最小；

②语文、数学、英语年级排名均在 150 名以外的学生为 1 人；

③本次考试该班语文第一名、数学第一名、英语第一名可能为三名不同的同学；

④从该班学生中随机抽取 1 人，若其语文排名大于 200，则其英语和数学排名均在 150 以内的概率为 $\dfrac{1}{3}$.

其中所有正确结论的序号是___________.

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

16. 如图 1 所示，在等腰梯形 $ABCD$，$BC//AD$，$CE\perp AD$，垂足为 E，$AD=3BC=3$，$EC=1$，将 $\triangle DEC$ 沿 EC 折起到 $\triangle D_1EC$ 的位置，使平面 $D_1EC\perp$ 平面 $ABCE$，如图 2 所示，点 G 为棱 AD_1 上一个动点.

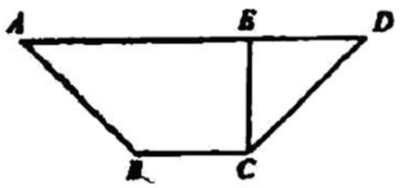


图 1

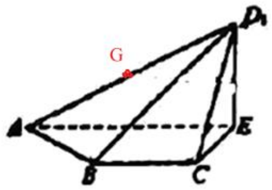


图 2

（1）当点 G 为棱 AD_1 中点时，求证：$BG//$ 平面 D_1EC

（2）求证：$AB\perp$ 平面 D_1BE；

（3）求直线 CD_1 与平面 ABD_1 所成角的正弦值.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$2\sin^2\dfrac{B+C}{2}=1+\sin A$.

（1）求 $\angle A$；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三组条件中选择一组作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 AB 的长.

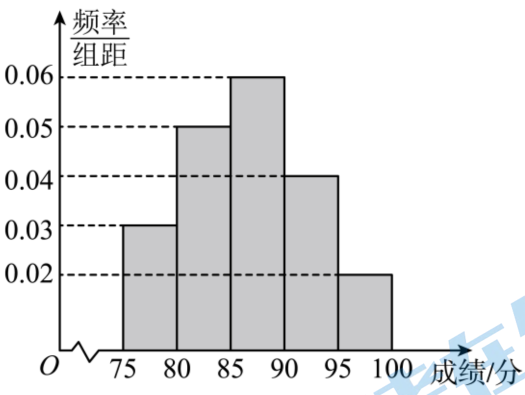
条件①：$BC=2, AC=3$；

条件②：$\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, AC+BC=3+\sqrt{2}$；

条件③：$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 某学校组织高一、高二年级学生进行了“纪念建党 100 周年”的知识竞赛.从这两个年级各随机抽取了 40 名学生，对其成绩进行分析，得到了高一年级成绩的频率分布直方图和高二年级成绩的频数分布表.



高一

成绩分组	频数
$[75,80)$	2
$[80,85)$	6

$[85,90)$	16
$[90,95)$	14
$[95,100]$	2

高二

规定成绩不低于 90 分为“优秀”.

（1）估计高一年级知识竞赛的优秀率；

（2）将成绩位于某区间的频率作为成绩位于该区间的概率.在高一、高二年级学生中各选出 2 名学生，记这 4 名学生中成绩优秀的人数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列；

（3）在高一、高二年级各随机选取 1 名学生，用 X，Y 分别表示所选高一、高二年级学生成绩优秀的人数.写出方差 $D(X),D(Y)$ 的大小关系.（只需写出结论）

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $A_1(-2,0)$ 和 $B(0,-\sqrt{3})$ 两点，点 A_2 为椭圆 C 的右顶点，点 P 为椭圆 C 上位于第一象限的点，直线 PA_1 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N.

（1）求椭圆 C 的方程及离心率；

（2）比较 $\triangle MNA_1$ 的面积与 $\triangle NA_2B$ 的面积的大小，并说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=x-\ln x-2$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）已知 $t\in Z$，且 $x\ln x+x>t(x-1)$ 对任意的 $x>1$ 恒成立，求 t 的最大值；

（3）设 $g(x)=f(x+1)-e+3$ 的零点为 $m(m>1)$，当 x_1，$x_2\in(m,+\infty)$，且 $x_1>x_2$ 时，证明：$e^{x_1-x_2}>\dfrac{\ln(x_1+1)}{\ln(x_2+1)}$.

21. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足，a_1 是正实数，当 $n\geq 2$ 时，$|a_n-a_{n-1}|=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$，则称 $\{a_n\}$ 是“$Y-$数列”.

（1）若 $\{a_n\}$ 是“$Y-$数列”且 $a_1=1$，写出 a_4 的所有可能值；

（2）设 $\{a_n\}$ 是“$Y-$数列”，证明：$\{a_n\}$ 是等差数列充要条件是 $\{a_n\}$ 单调递减；$\{a_n\}$ 是等比数列充要条件是 $\{a_n\}$ 单调递增；

（3）若 $\{a_n\}$ 是“$Y-$数列”且是周期数列（即存在正整数 T，使得对任意正整数 n，都有 $a_{T+n}=a_n$），求集合 $\{1\leq i\leq 2018|a_i=a_1\}$ 的元素个数的所有可能值的个数.

参考答案

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】C

【分析】根据并集概念进行求解.

【详解】$A\cup B=\{x\,|\,x<-1$ 或 $x\geq 0\}$.

故选：C

2.【答案】D

【分析】先化简原式，然后根据实部虚部确定复数所在象限.

【详解】$\because \dfrac{2+3i}{i}=3-2i$，

$\therefore$在复平面内对应的点的坐标为$(3,-2)$，位于第四象限.

故选：D.

【点睛】本题考查复数与复平面的关系，属于基础题.

3.【答案】A

【分析】根据不等式的性质结合充分条件和必要条件的定义即可得解.

【详解】由 $a>b>0$ 可得 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$，

由 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ 可得 $a>b\geq 0$，

所以“$a>b>0$”是“$\sqrt{a}>\sqrt{b}$”的充分而不必要条件.

故选：A.

4.【答案】C

【分析】先写出 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 的坐标，再由 $\vec{m}//\vec{n}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$ 可求得参数 λ.

【详解】$\because$向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(1,0),\vec{c}=(3,4)$.

$\therefore \vec{a}+\lambda\vec{b}=(1,2)+\lambda(1,0)=(1+\lambda,2)$，

$\because (\vec{a}+\lambda\vec{b})//\vec{c}(\lambda\in\mathrm{R})$，

$\therefore 4(1+\lambda)-3\times 2=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

故选：C.

5.【答案】D

【分析】

根据 $a^x<a^y(0<a<1)$，利用指数函数的单调性得到 $x>y$，然后再逐项判断.

【详解】因为 $a^x<a^y(0<a<1)$，

所以由指数函数的单调性得：$x > y$

A. 当 $x=2, y=1$ 时，$\frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{y^2+1}$，故错误；

B. 当 $x=\frac{5\pi}{4}, y=\frac{\pi}{4}$ 时，$\tan x = \tan y$，故错误；

C. 当 $x=1, y=-2$ 时，$\ln(x^2+1) < \ln(y^2+1)$，故错误；

D. 因为幂函数 $y=x^3$ 在 R 上是增函数，所以 $x^3 > y^3$，故正确；

故选：D

6. 【答案】C

【分析】$f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 的对称轴为 $\omega x-\frac{\pi}{3}=k\pi$，化简得到 $\omega=2k+\frac{2}{3}(\omega>0)$ 得到答案.

【详解】$f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$

对称轴为：$\omega x-\frac{\pi}{3}=k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}=k\pi \Rightarrow \omega=2k+\frac{2}{3}(\omega>0)(k\in Z)$

当 $k=0$ 时，ω 取值为 $\frac{2}{3}$.

故选:C.

7. 【答案】C

【分析】

【详解】分析：利用函数的奇偶性、极值、零点、值域分析每一个选项得解.

详解：对于选项 A,$f(-x)=\sin(-x)+x\cos(-x)=-\sin x+x\cos x=-(\sin x-x\cos x)=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是奇函数，所以选项 A 是正确的.

对于选项 B, $f'(x)=\cos x-[cosx+x\cdot(-\sin x)]=xsinx$，可以得到函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 是增函数，在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 也是增函数，所以 0 不是函数的极值点，所以选项 B 正确.

对于选项 C,由于函数在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 是增函数，在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 是增函数，且 $f(0)=0$,所以函数在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上有且仅有 1 个零点，所以选项 C 错误.

对于选项 D, 函数的值域为 R，所以选项 D 正确

故选:C.

8. 【答案】A

【分析】估算出可用的年限，然后取常用对数计算即可.

【详解】由题意大约可以用 $\frac{2^{441}}{3\times10^{11}\times10^4}$ 万年，

则$\lg\dfrac{2^{441}}{3\times10^{11}\times10^{4}}=\lg\dfrac{2^{441}}{3\times10^{15}}=\lg2^{441}-\lg3\times10^{15}=441\lg2-\lg3-15$

$\approx441\times0.3-0.5-15=117$，

所以$\dfrac{2^{441}}{3\times10^{11}\times10^{8}}\approx10^{117}$，即大约可以用$10^{117}$万年.

故选：A

9.【答案】A

【分析】

细沙全部在上部时，沙漏上部分圆锥中的细沙的高为$\dfrac{2}{3}h$，设圆锥的底面半径为r，则细沙形成的圆锥的底面半径为$\dfrac{2}{3}r$，求出细沙的体积，再设细沙漏入下部后，圆锥形沙堆的高为h'，求出细沙的体积，由体积相等求解h'，则答案可求.

【详解】解：细沙全部在上部时，沙漏上部分圆锥中的细沙的高为$\dfrac{2}{3}h$，

设圆锥的底面半径为r，则细沙形成的圆锥的底面半径为$\dfrac{2}{3}r$，

$\therefore$细沙的体积为$V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{2}{3}r\right)^{2}\cdot\dfrac{2}{3}h=\dfrac{8}{81}\pi r^{2}h$.

细沙漏入下部后，圆锥形沙堆的底面半径r，设高为h'，

则$V=\dfrac{1}{3}\pi r^{2}\cdot h'=\dfrac{8}{81}\pi r^{2}h$，

得$h'=\dfrac{8}{27}h$.

$\therefore\dfrac{h'}{h}=\dfrac{8}{27}$.

故选：A.

【点睛】此题考查圆锥体积公式的应用，属于中档题

10.【答案】B

【分析】

根据“2阶准偶函数”定义，分$a<0$，$a>0$，$a=0$三种情况分析即可得答案.

【详解】解：根据题意，函数$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x},x\le a\\ x^{2},x>a\end{cases}$是“2阶准偶函数”，

则集合$\{x|x>0,f(x)=f(-x)\}$中恰有2个元素.

当$a<0$时，函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, x\le a\\ x^2, x>a\end{cases}$ 有一段部分为 $y=x^2, x>a$，注意的函数 $y=x^2$ 本身具有偶函数性质，故集合 $\{x|x>0, f(x)=f(-x)\}$ 中不止有两个元素，矛盾，

当 $a>0$ 时，根据"2 阶准偶函数"的定义得 $f(x)$ 的可能取值为 x^2 或 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$f(-x)$ 为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$，故当 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^x$，该方程无解，当 $x^2=2^x$，解得 $x=2$ 或 $x=4$，故要使得集合 $\{x|x>0, f(x)=f(-x)\}$ 中恰有 2 个元素，则需要满足 $a<2$，即 $0<a<2$；

当 $a=0$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, x\le 0\\ x^2, x>0\end{cases}$，$f(x)$ 的取值为 x^2，$f(-x)$ 为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$，根据题意得 $x^2=2^x$ 满足恰有两个元素，故 $a=0$ 满足条件.

综上，实数 a 的取值范围是 $[0,2)$.

故选：B

【点睛】本题解题的关键是根据新定义的"2 阶准偶函数"，将问题转化为研究函数 $f(x)$，$f(-x)$ 可能取何值，进而根据 $x^2=2^x$ 方程有两个解 $x=2$ 或 $x=4$ 求解.考查运算求解能力与综合分析能力，是中档题.

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】由题设确定 P 的坐标，再由三角函数的定义求 $\cos\alpha$.

【详解】由题设知：$P(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，故 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12.【答案】 $-32x^{\frac{3}{2}}$

【分析】利用二项式定理写出展开式通项公式，进而求第四项.

【详解】由题设 $T_{r+1}=C_4^r(-2\sqrt{x})^r=(-2)^r C_4^r x^{\frac{r}{2}}$，

当 $r=3$ 时，第四项为 $T_4=(-2)^3C_4^3x^{\frac{3}{2}}=-32x^{\frac{3}{2}}$.

故答案为：$-32x^{\frac{3}{2}}$

13.【答案】 ①. $\frac{\pi}{6}$　②. $\frac{\pi}{2}$

【分析】①由已知可得 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，利用正弦函数的图象及特殊角的三角函数值，结合范围 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，即可得解 φ 的值；

②化简已知等式可得 $\sin(\omega x+2\omega+\varphi)-\sin(\omega x+\varphi)=2$，由正弦函数的性质可得 $\omega=(k_1-k_2)\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k_1$，$k_2\in Z$，结合范围 $\omega>0$，即可得解 ω 的最小值.

【详解】解：①$\because$ 由已知可得 $2\sin\varphi=1$，可得 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\ \varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$，$k\in Z$，

$\because|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$ 当 $k=0$ 时，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

②$\because\ \exists x\in R$，使 $2\sin[\omega(x+2)+\varphi]-2\sin(\omega x+\varphi)=4$ 成立，

即 $\sin(\omega x+2\omega+\varphi)-\sin(\omega x+\varphi)=2$，

$\therefore\ \exists x\in R$，使 $\omega x+2\omega+\varphi=2k_1\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\omega x+\varphi=2k_2\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in Z$，

$\therefore$ 解得 $\omega=k_1\pi-k_2\pi-\dfrac{\pi}{2}=(k_1-k_2)\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k_1$，$k_2\in Z$，

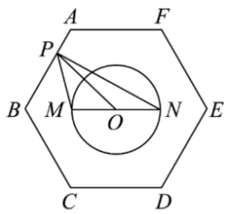
又 $\because\ \omega>0$，$\therefore\omega$ 的最小值是 $\dfrac{\pi}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$.

14.【答案】8

【分析】由 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON}$，然后由数量积的运算公式，结合正六边形的性质，即可求解.

【详解】如图，连结 PO，显然 $\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{ON}$，



$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OM}\right)$，

$=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OM}^2=\overrightarrow{PO}^2-4$，

点 P 在正六边形 $ABCDEF$ 的边上运动，O 是其中心，

因此 $\left|\overrightarrow{PO}\right|$ 的最小值等于中心 O 到正六边形的边的距离，距离为 $4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为 $\left(2\sqrt{3}\right)^2-4=8$.

故答案为：8

15.【答案】①②④

【分析】依据平均数和方差的定义判断①；求得语文、数学、英语年级排名均在 150 名以外的学生人数判断②；求得语文第一名、数学第一名、英语第一名的同学判断③；求得从该班学生中随机抽取 1 人，若其语文排名大于 200，则其英语和数学排名均在 150 以内的概率判断④.

【详解】①：三科中，数学对应的点比英语对应的点到横轴的距离近且较为密集，

数学对应的点到横轴的距离比语文对应的点到纵轴距离近且较为密集，

所以数学年级排名的平均数及方差均最小.判断正确；

②：语文、数学、英语年级排名均在 150 名以外的学生为 1 人.判断正确；

③：本次考试该班语文第一名、数学第一名、英语第一名为同一名同学.判断错误；

④：由图表可知语文排名大于 200 的有 3 位同学，

语文排名大于 200 且英语和数学排名均在 150 以内的同学仅有 1 位同学.

故从该班学生中随机抽取 1 人，若其语文排名大于 200，

则其英语和数学排名均在 150 以内的概率为 $\frac{1}{3}$. 判断正确.

故答案为①②④

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

16.【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析　（3）$\frac{\sqrt{3}}{6}$

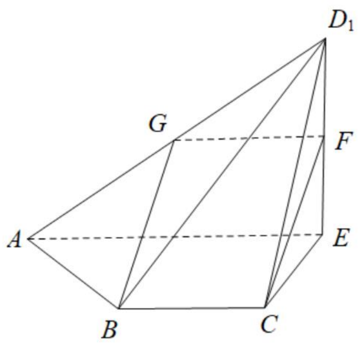
【分析】（1）取点 F 为棱 D_1E 的中点，可得四边形 $FGBC$ 为平行四边形，由线面平行的判定定理可得答案；

（2）由面面垂直的性质定理可得 $D_1E\perp$ 平面 $ABCE$，再由线面垂直的性质定理得 $D_1E\perp AB$，利用勾股定理得 $BE\perp AB$，最后由线面垂直的判定定理可得答案；

（3）以 E 为原点，分别以 EA、EC、ED_1 所在的直线为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{CD_1}$、平面 ABD_1 的一个法向量，由线面角的向量求法可得答案.

【小问 1 详解】

取点 F 为棱 D_1E 的中点，连接 FG、CF，



所以 $FG//AE$， $FG=\dfrac{1}{2}AE$，

在等腰梯形 $ABCD$， $BC//AD$，$CE\perp AD$， $AD=3BC=3$，

所以 $BC=\dfrac{1}{2}AE$，可得 $FG//BC$， $FG=BC$，

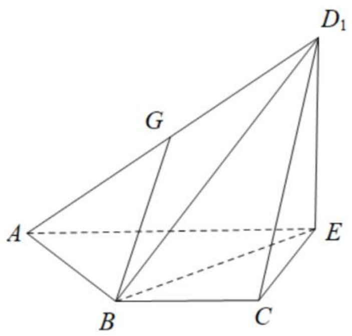
所以四边形 $FGBC$ 为平行四边形， $BG//CF$，

又因为 $BG\not\subset$ 平面 D_1EC， $CF\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BG//$ 平面 D_1EC；

【小问 2 详解】

连接 BE，



因为平面 $D_1EC\perp$ 平面 $ABCE$， 平面 $D_1EC\cap$ 平面 $ABCE=CE$，

$D_1E\subset$ 平面 D_1EC， $D_1E\perp CE$， 可得 $D_1E\perp$ 平面 $ABCE$，

因为 $AB\subset$ 平面 $ABCE$，所以 $D_1E\perp AB$，

因为 $BC//AD$，$CE\perp AD$， $AD=3BC=3$， $EC=1$，

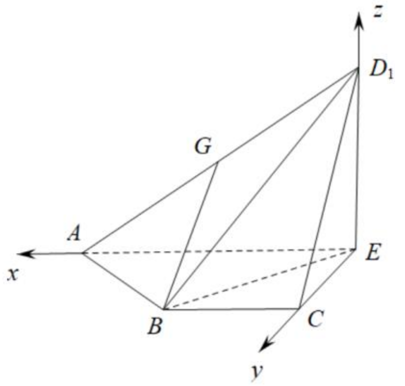
所以 $AB=\sqrt{2}$， $AE=2$， $BE=\sqrt{2}$， 可得 $AB^2+BE^2=AE^2$， 即 $BE\perp AB$，

且 $BE\cap D_1E=E$， BE、$D_1E\subset$ 平面 D_1BE，

所以 $AB\perp$ 平面 D_1BE；

【小问 3 详解】

以 E 为原点，分别以 EA、EC、ED_1 所在的直线为 x、 y、 z 轴，建立空间直角坐标系，



所以$A(2,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，

所以$\overrightarrow{CD_1}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{D_1A}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面ABD_1的一个法向量，

可得$\begin{cases}\overrightarrow{D_1A}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{D_1B}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x-z=0\\ x+y-z=0\end{cases}$，令$x=1$，可得$z=2$，$y=1$，$\vec{n}=(1,1,2)$，

设直线CD_1与平面ABD_1所成角为θ，

所以$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{CD_1}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}}{|\vec{n}||\overrightarrow{CD_1}|}\right|=\left|\dfrac{-1+2}{\sqrt{2}\times\sqrt{1+1+4}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以直线CD_1与平面ABD_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

17.【答案】（1）$\dfrac{\pi}{4}$

（2）选条件②，AB的长为$2\sqrt{2}+1$.

【分析】（1）利用三角形的内角和、诱导公式、二倍角的余弦公式对原始进行化简即可求解.

（2）对三个条件逐项分析，利用正弦定理、余弦定理求解边AB的长度，注意题干中AB有唯一解，条件①无解，条件③有多个解，只有用条件②，AB有唯一解.

【小问1详解】

解：因为$2\sin^2\dfrac{B+C}{2}=1+\sin A$，则$2\sin^2(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2})=2\cos^2\dfrac{A}{2}=1+\sin A$，

故$2\cos^2\dfrac{A}{2}-1=\cos A=\sin A$，又$0<A<\pi$.

所以：$A=\dfrac{\pi}{4}$.

【小问2详解】

解：选条件①：$BC=2, AC=3$，即$a=2,b=3$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $2^2=3^2+c^2-2\times3c\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

整理得 $c^2-3\sqrt{2}c+5=0$，$\Delta=\left(3\sqrt{2}\right)^2-4\times5=-2<0$，

故 AB 无解.

选条件②：$\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},AC+BC=3+\sqrt{2}$，即 $a+b=3+\sqrt{2}$，

则 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\dfrac{1}{3}$，由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即 $\dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{b}{\frac{1}{3}}$，解得 $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}b$，

所以 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}b+b=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}b=3+\sqrt{2}$，解得：$b=\sqrt{2}$，则 $a=3$.

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$，

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，解得 $AB=c=2\sqrt{2}+1$.

条件③：$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$，

因为 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0<B<\pi$,且 $A=\dfrac{\pi}{4}$，故 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $B=\dfrac{2\pi}{3}$.

故对于条件③，B 有 2 种可能，只要经过缩放就能使 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$，故 AB 不唯一.

综上，选条件②，AB 的长为 $\dfrac{4\sqrt{2}+2}{3}$.

18.【答案】（1）30%；

（2）分布列见解析；　　（3）$D\left(X\right)<D\left(Y\right)$.

【分析】（1）先计算样本的优秀率，从而可解；

（2）根据分布列的求解步骤即可求解；

（3）根据两点分布的方差计算公式即可判断.

【小问 1 详解】

高一年级知识竞赛的优秀率为 $\left(0.04+0.02\right)\times5=0.3$，

所以高一年级知识竞赛的优秀率为 30%.

【小问 2 详解】

在高一年级学生中选中成绩优秀学生的概率为 $\dfrac{3}{10}$，选中成绩不优秀学生的概率为 $\dfrac{7}{10}$；

在高二年级学生中选中成绩优秀学生的概率为$\frac{2}{5}$，选中成绩不优秀学生的概率为$\frac{3}{5}$.

ξ的所有可能取值为 0，1，2，3，4；

$$P(\xi=0)=\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{441}{2500},$$

$$P(\xi=1)=C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^2\times C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{966}{2500},$$

$$P(\xi=2)=\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{781}{2500},$$

$$P(\xi=3)=\left(\frac{3}{10}\right)^2\times C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{276}{2500},$$

$$P(\xi=4)=\left(\frac{3}{10}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{2500},$$

所以随机变量ξ的分布列为：

P	0	1	2	3	4
ξ	$\frac{441}{2500}$	$\frac{966}{2500}$	$\frac{781}{2500}$	$\frac{276}{2500}$	$\frac{36}{2500}$

【小问 3 详解】显然X,Y均符合两点分布，

且$P(X=0)=0.7,P(X=1)=0.3,P(Y=0)=0.6,P(Y=1)=0.4$，

$\therefore D(X)=0.3\times0.7=0.21,D(Y)=0.6\times0.4=0.24$，

所以$D(X)<D(Y)$

19.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$；

(2) 相等，理由见解析

【分析】(1) 根据a,b求椭圆方程，以及离心率；

(2) 首先设点P的坐标，再利用坐标分别表示两个三角形的面积，做差后，即可比较大小.

【小问 1 详解】

由题意可知，$a=2,b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$；

【小问 2 详解】

设$P(x_0,y_0)$

直线 $PA_1: y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，令 $x=0$，得 $y_M=\dfrac{2y_0}{x_0+2}$，

直线 $PB: y=\dfrac{y_0+\sqrt{3}}{x_0}x-\sqrt{3}$，令 $y=0$，得 $x_N=\dfrac{\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}$，

所以 $S_{\triangle MNA_1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}+2\right)\times\dfrac{2y_0}{x_0+2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}x_0y_0}{(x_0+2)(y_0+\sqrt{3})}+\dfrac{2y_0}{x_0+2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}x_0y_0+2y_0(y_0+\sqrt{3})}{(x_0+2)(y_0+\sqrt{3})}$，

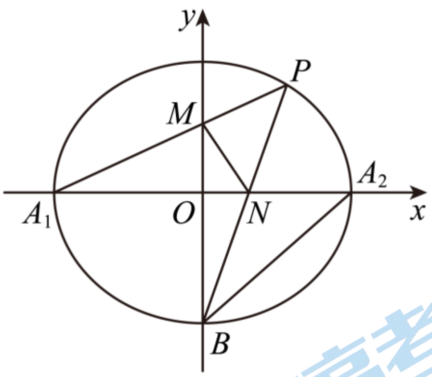
$S_{\triangle NBA_2}=\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}-\dfrac{3x_0}{2(y_0+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}(y_0+\sqrt{3})-3x_0}{2(y_0+\sqrt{3})}$

$S_{\triangle MNA_1}-S_{NBA_2}=\dfrac{\sqrt{3}x_0y_0+2y_0(y_0+\sqrt{3})}{(x_0+2)(y_0+\sqrt{3})}-\dfrac{2\sqrt{3}(y_0+\sqrt{3})-3x_0}{2(y_0+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{4y_0^2+3x_0^2-12}{2(x_0+2)(y_0+\sqrt{3})}=0$

所以 $S_{\triangle MNA_1}=S_{NBA_2}$



20.【答案】(1)极小值为-1，无极大值；(2)3；(3)证明见解析.

【分析】(1)对函数 $f(x)$ 求导，分析导函数在其零点分定义区间上的正负即可得解；

(2)将给定不等式等价转化，构造函数，并讨论其最值即可得解；

(3)讨论函数 $g(x)$ 的零点，构造函数并讨论其单调性，再借助单调性即可作答.

【详解】(1) 函数 $f(x)=x-\ln x-2$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

$0<x<1$ 时 $f'(x)<0, x>1$ 时 $f'(x)>0$，$x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(1)=-1$，无极大值，

所以 $f(x)$ 的极小值为-1，无极大值；

(2) $\forall x>1, x\ln x+x>t(x-1)\Leftrightarrow t<\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$，令 $h(x)=\dfrac{x\ln x+x}{x-1}(x>1)$，

$$h'(x)=\frac{(\ln x+2)(x-1)-(x\ln x+x)}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2},$$

由(1)知 $f(x)=x-\ln x-2$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $f(3)=1-\ln 3<0, f(4)=2-\ln 4>0$，

$\exists x_0\in(3,4), f(x_0)=0$，即 $\ln x_0=x_0-2$，当 $1<x<x_0$ 时，$f(x)<0,h'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，

$f(x)>0,h'(x)>0$，

于是得 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增，

则 $x=x_0$ 时，$h(x)_{\min}=h(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}=\dfrac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0\in(3,4)$，

从而有 $t<x_0$，而 $t\in Z$，则 $t_{\max}=3$，

所以 t 的最大值是 3；

(3)由(1)知 $g(x)=f(x+1)-e+3$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$g(1)=f(2)-e+3=3-e-\ln 2<0$，

$g(2)=f(3)-e+3=4-e-\ln 3>0$，

即 $g(x)$ 大于 1 的零点 $m\in(1,2)$，

令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}, x\in(m,+\infty)$，$\varphi'(x)=e^{-x}[\dfrac{1}{x+1}-\ln(x+1)]$，

显然 $F(x)=\dfrac{1}{x+1}-\ln(x+1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\forall x\in(m,+\infty), F(x)<F(m)<F(1)=\dfrac{1}{2}-\ln 2<0$，

于是得 $\forall x\in(m,+\infty),\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上单调递减，$x_1,x_2\in(m,+\infty)$，且 $x_1>x_2$ 时，

$\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$，

即 $\dfrac{\ln(x_1+1)}{e^{x_1}}<\dfrac{\ln(x_2+1)}{e^{x_2}}\Leftrightarrow\dfrac{\ln(x_1+1)}{\ln(x_2+1)}<\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}=e^{x_1-x_2}$，

所以 $x_1,x_2\in(m,+\infty)$，且 $x_1>x_2$ 时，$e^{x_1-x_2}>\dfrac{\ln(x_1+1)}{\ln(x_2+1)}$..

21. 【答案】(1) $-2,0,2,8$

(2) 证明见解析　(3) 1009

【分析】(1) 利用递推关系，根据分类讨论思想求解即可；

(2) 当 $\{a_n\}$ 是等差数列时，利用反证法可证明 $\{a_n\}$ 单调递减，根据等比数列的性质可证后者；

（3）先证 a_1 是数列 $\{a_n\}$ 的最大项，再证明当 n 是奇数时，a_n 是 a_1 的奇数倍，当 n 是偶数时，a_n 是 a_1 的偶数倍，即可求出.

【小问 1 详解】

由题可知 $|a_2-a_1|=\max\{a_1\}=a_1$，则 $a_2=0$ 或 2，

因为 $|a_3-a_2|=\max\{a_1,a_2\}$，所以当 $a_2=0$ 时，$|a_3-0|=\max\{1,0\}=1$，则 $a_3=1$ 或 -1，

当 $a_2=2$ 时，$|a_3-2|=\max\{1,2\}=2$，则 $a_3=0$ 或 4，

因为 $|a_4-a_3|=\max\{a_1,a_2,a_3\}$，所以当 $a_3=-1$ 时，$|a_4+1|=\max\{1,0,-1\}=1$，

则 $a_4=0$ 或 -2，

当 $a_3=0$ 时，$|a_4-0|=\max\{1,2,0\}=2$，则 $a_4=-2$ 或 2，

当 $a_3=1$ 时，$|a_4-1|=\max\{1,0,1\}=1$，则 $a_4=0$ 或 2，

当 $a_3=4$ 时，$|a_4-4|=\max\{1,2,4\}=4$，则 $a_4=0$ 或 8，

综上，a_4 的所有可能值为 $-2,0,2,8$；

【小问 2 详解】

因为 $|a_2-a_1|=a_1$，所以 $a_2=0$ 或 $2a_1$，

当 $\{a_n\}$ 是等差数列时，假设 $a_2=2a_1$，则 $a_3=2a_2-a_1=3a_1$，

此时 $|a_3-a_2|=a_1$，而 $\max\{a_1,a_2\}=2a_1$，矛盾，所以 $a_2=0$，

于是公差 $d=a_2-a_1=-a_1<0$，所以 $\{a_n\}$ 单调递减；

当 $\{a_n\}$ 单调递减时，对任意 $n\geq 2$，$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}=a_1$，

又 $|a_n-a_{n-1}|=a_{n-1}-a_n$，所以 $a_n-a_{n-1}=-a_1$，从而 $\{a_n\}$ 是等差数列；

综上，$\{a_n\}$ 是等差数列的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 单调递减；

当 $\{a_n\}$ 是等比数列时，$a_2\neq 0$，所以 $a_2=2a_1$，所以公比 $q=2>1$，

又 $a_1>0$，所以 $\{a_n\}$ 单调递增，

当 $\{a_n\}$ 单调递增时，对任意 $n\geq 2$，$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}=a_{n-1}$，

又 $|a_n-a_{n-1}|=a_n-a_{n-1}$，所以 $a_n-a_{n-1}=a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$，

因为 $a_1\neq 0$，所以 $\{a_n\}$ 是等比数列.

综上，$\{a_n\}$ 是等比数列充要条件是 $\{a_n\}$ 单调递增.

【小问 3 详解】

先证 a_1 是数列 $\{a_n\}$ 的最大项，事实上，如果 i 是第一个大于 a_1 的项的脚标，

则由$|a_{i+1}-a_i| = \max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\} = a_i$知，$a_{i+1}$是$a_i$的倍数，

假设$a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+k-1}$都是$a_i$的倍数，

则由$|a_{i+k}-a_{i+k-1}| = \max\ a_1,a_2,\cdots,a_{i+k-1}\ = \max\ a_i,a_{i+1},\cdots,a_{i+k-1}$ 知，

a_{i+k}是a_i的倍数，

所以由归纳法知，对任意$n \ge i$，a_n都是a_i的倍数，但a_1不是a_i的倍数，

这与$\{a_n\}$是周期数列矛盾，

所以a_1是数列$\{a_n\}$的最大项，从而当$n \ge 2$时，$|a_n - a_{n-1}| = a_1$，

再证明当n是奇数时，a_n是a_1的奇数倍；当n是偶数时，a_n是a_1的偶数倍，

事实上，当$n=1$时结论成立，假设$n=k$时成立，

当$n=k+1$时，由$|a_{k+1}-a_K| = a_1$知，结论也成立，

所以，当$a_i = a_1$，i的值只能是奇数，

所以集合$\{1 \le i \le 2018 | a_i = a_1\}$的元素个数最多有1009个；

下证集合$\{1 \le i \le 2018 | a_i = a_1\}$的元素个数可以是$1 \sim 1009$的所有整数，

事实上，对于$i = 2019$，可取数列为：$\underbrace{a_1,0}_{1个周期},a_1,0,a_1,0,\cdots,a_1,0,\cdots$

即所有的奇数项均等于a_1，所有的偶数项均等于0，此时，数列为“Y-数列”，且$T=2$，

对于任意整数$1 \le t < 1009$，构造数列的前2018项如下：

$$\underbrace{\underbrace{a_1,0}_{1组},a_1,0,\cdots,a_1,0}_{共t组},\underbrace{\underbrace{-a_1,0}_{1组},-a_1,0,\cdots,-a_1,0}_{共1009-t组},$$

由于数列是无穷数列，故可取T=2018，显然满足数列是“Y-数列”，

综上，集合$\{1 \le i \le 2018 | a_i = a_1\}$的元素个数的所有可能值的个数是1009.

【点睛】方法点睛：与数列的新定义有关的问题的求解策略：

①通过给出一个新的数列的定义，或约定一种新的运算，或给出几个新模型来创设新问题的情景，要求在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的；

②遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析，运算，验证，使得问题得以解决.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！