

2009 年全国高中数学联合竞赛加试 试题参考答案及评分标准 (A 卷)

说明:

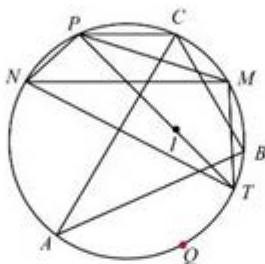
1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

一、(50 分) 如图, M, N 分别为锐角三角形 $\triangle ABC$ ($\angle A < \angle B$) 的外接圆 Γ 上弧 \widehat{BC} 、 \widehat{AC} 的中点. 过点 C 作 $PC \parallel MN$ 交圆 Γ 于 P 点, I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 连接 PI 并延长交圆 Γ 于 T .

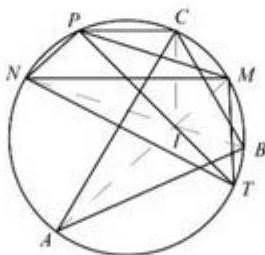
(1) 求证: $MP \cdot MT = NP \cdot NT$;

(2) 在弧 \widehat{AB} (不含点 C) 上任取一点 Q ($Q \neq A, T, B$), 记 $\triangle AQC, \triangle QCB$ 的内心分别为 I_1, I_2 ,



求证: Q, I_1, I_2, T 四点共圆.

【解析】 (1) 连 NI, MI . 由于 $PC \parallel MN, P, C, M, N$ 共圆, 故 $PCMN$ 是等腰梯形. 因此 $NP = MC, PM = NC$.



连 AM, CI , 则 AM 与 CI 交于 I , 因为

$$\angle MIC = \angle MAC + \angle ACI = \angle MCB + \angle BCI = \angle MCI,$$

所以 $MC = MI$. 同理

$$NC = NI.$$

于是

$$NP = MI, PM = NI.$$

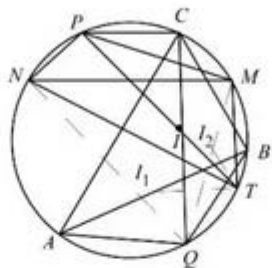
故四边形 $MPNI$ 为平行四边形. 因此 $S_{\triangle PMT} = S_{\triangle PNT}$ (同底, 等高).

又 P, N, T, M 四点共圆, 故 $\angle TNP + \angle PMT = 180^\circ$, 由三角形面积公式

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle PMT} &= \frac{1}{2} PM \cdot MT \sin \angle PMT \\
 &= S_{\triangle PNT} = \frac{1}{2} PN \cdot NT \sin \angle PNT \\
 &= \frac{1}{2} PN \cdot NT \sin \angle PMT
 \end{aligned}$$

于是 $PM \cdot MT = PN \cdot NT$.

(2) 因为 $\angle NCI_1 = \angle NCA + \angle ACI_1 = \angle NQC + \angle QCI_1 = \angle CI_1N$,



所以 $NC = NI_1$, 同理 $MC = MI_2$. 由 $MP \cdot MT = NP \cdot NT$ 得 $\frac{NT}{MP} = \frac{MT}{NP}$.

由(1)所证 $MP = NC$, $NP = MC$, 故

$$\frac{NT}{NI_1} = \frac{MT}{MI_2} .$$

又因

$$\angle I_1NT = \angle QNT = \angle QMT = \angle I_2MT ,$$

有

$$\triangle I_1NT \sim \triangle I_2MT .$$

故 $\angle NTI_1 = \angle MTI_2$, 从而

$$\angle I_1QI_2 = \angle NQM = \angle NTM = \angle I_1TI_2 .$$

因此 Q, I_1, I_2, T 四点共圆 .

二、 (50分) 求证不等式:

$$-1 < \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} \right) - \ln n \leq \frac{1}{2}, \quad n=1, 2, \dots$$

【解析】证明: 首先证明一个不等式:

$$(1) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0 .$$

事实上, 令

$$h(x) = x - \ln(1+x), \quad g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} .$$

则对 $x > 0$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 .$$

于是

$$h(x) > h(0) = 0, \quad g(x) > g(0) = 0 .$$

在(1)中取 $x = \frac{1}{n}$ 得

$$(2) \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} .$$

令 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} - \ln n$, 则 $x_1 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \frac{n}{n^2+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \\ &< \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{1}{(n^2+1)n} < 0 \end{aligned}$$

因此 $x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 = \frac{1}{2}$.

又因为

$$\ln n = (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n-1) - \ln(n-2)) + \cdots + (\ln 2 - \ln 1) + \ln 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) .$$

从而

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k^2+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) + \frac{n}{n^2+1} > \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k^2+1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k^2+1)k} \geq -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)k} \\ &= -1 + \frac{1}{n} > -1 . \end{aligned}$$

三、(50分) 设 k, l 是给定的两个正整数. 证明: 有无穷多个正整数 $m \geq k$, 使得 C_m^k 与 l 互素.

【解析】证法一: 对任意正整数 t , 令 $m = k + t \cdot l \cdot (k!)$. 我们证明 $(C_m^k, l) = 1$.

设 p 是 l 的任一素因子, 只要证明: $p \nmid C_m^k$.

若 $p \nmid k!$, 则由

$$\begin{aligned} k! C_m^k &= \prod_{i=1}^k (m - k + i) \\ &= \prod_{i=1}^k [(i + t l (k!))] \\ &= \prod_{i=1}^k i \\ &= k! \pmod{p^{\alpha+1}} . \end{aligned}$$

及 $p^\alpha \mid k!$, 且 $p^{\alpha+1} \nmid k!$, 知 $p^\alpha \mid k! C_m^k$ 且 $p^{\alpha+1} \nmid k! C_m^k$. 从而 $p \nmid C_m^k$.

证法二: 对任意正整数 t , 令 $m = k + t \cdot l \cdot (k!)^2$, 我们证明 $(C_m^k, l) = 1$.

设 p 是 l 的任一素因子, 只要证明: $p \nmid C_m^k$.

若 $p \nmid k!$, 则由

$$\begin{aligned}
 k!C_m^k &= \prod_{i=1}^k (m-k+i) \\
 &= \prod_{i=1}^k [(i+1l(k!))^2] \\
 &= \prod_{i=1}^k i \\
 &= k! \pmod{p}.
 \end{aligned}$$

即 p 不整除上式, 故 $p \nmid C_m^k$.

若 $p \mid k!$, 设 $\alpha \geq 1$ 使 $p^\alpha \mid k!$, 但 $p^{\alpha+1} \nmid k!$. $p^{\alpha+1} \mid (k!)^2$. 故由

$$\begin{aligned}
 k!C_m^k &= \prod_{i=1}^{k-1} (m-k+i) \\
 &= \prod_{i=1}^k [(i+1l(k!))^2] \\
 &= \prod_{i=1}^k i \\
 &= k! \pmod{p^{\alpha+1}}
 \end{aligned}$$

及 $p^\alpha \mid k!$, 且 $p^{\alpha+1} \nmid k!$, 知 $p^\alpha \mid k!C_m^k$ 且 $p^{\alpha+1} \nmid k!C_m^k$. 从而 $p \nmid C_m^k$.

四、(50分) 在非负数构成的 3×9 数表

$$P = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} \end{pmatrix}$$

中每行的数互不相同, 前 6 列中每列的三数之和为 1, $x_{17} = x_{28} = x_{39} = 0$, $x_{27}, x_{37}, x_{18}, x_{38}, x_{19}, x_{29}$ 均大于 0. 如果 P 的前三列构成的数表

$$S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

满足下面的性质 (O): 对于数表 P 中的任意一列 $\begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$ ($k=1, 2, \dots, 9$) 均存

在某个 $i \in \{1, 2, 3\}$

使得

$$(3) x_{ik} \leq u_i = \min\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}.$$

求证:

(i) 最小值 $u_i = \min\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$, $i=1, 2, 3$ 一定自数表 S 的不同列.

(ii) 存在数表 P 中唯一的一列 $\begin{pmatrix} x_{1k^*} \\ x_{2k^*} \\ x_{3k^*} \end{pmatrix}$, $k^* \neq 1, 2, 3$ 使得 3×3 数表

$$S' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

仍然具有性质 (O).

【解析】 (i) 假设最小值 $u_i = \min\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$, $i=1, 2, 3$ 不是取自数表 S 的不同列. 则存在一列不含任何 u_i . 不妨设 $u_i \neq x_{i2}$, $i=1, 2, 3$. 由于数表 P 中同一行中的任何两个元素都不等, 于是 $u_i < x_{i2}$, $i=1, 2, 3$. 另一方面, 由于数表 S 具有性质 (O), 在 (3) 中取 $k=2$, 则存在某个 $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ 使得 $x_{i_0 2} \leq u_{i_0}$. 矛盾.

(ii) 由抽屉原理知

$$\min\{x_{11}, x_{12}\}, \min\{x_{21}, x_{22}\}, \min\{x_{31}, x_{32}\}$$

中至少有两个值取在同一列. 不妨设

$$\min\{x_{21}, x_{22}\} = x_{22}, \min\{x_{31}, x_{32}\} = x_{32}.$$

由前面的结论知数表 S 的第一列一定含有某个 u_i , 所以只能是 $x_{11} = u_1$. 同样, 第二列中也必含某个 u_i , $i=1, 2$. 不妨设 $x_{22} = u_2$. 于是 $u_3 = x_{33}$, 即 u_i 是数表 S 中的对角线上数字.

$$S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

记 $M = \{1, 2, \dots, 9\}$, 令集合

$$I = \{k \in M \mid x_{ik} > \min\{x_{i1}, x_{i2}\}, i=1, 3\}.$$

显然 $I = \{k \in M \mid x_{1k} > x_{11}, x_{3k} > x_{32}\}$ 且 $1, 2, 3 \notin I$. 因为 $x_{18}, x_{38} > 1 \geq x_{11}, x_{32}$, 所以 $8 \in I$.

故 $I \neq \emptyset$. 于是存在 $k^* \in I$ 使得 $x_{2k^*} = \max\{x_{2k} \mid k \in I\}$. 显然, $k^* \neq 1, 2, 3$.

下面证明 3×3 数表

$$S' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

具有性质 (O).

从上面的选法可知 $u'_i = \min\{x_{i1}, x_{i2}, x_{ik^*}\} = \min\{x_{i1}, x_{i2}\}$, ($i=1, 3$). 这说明 $x_{1k^*} > \min\{x_{11}, x_{12}\} \geq u_1$, $x_{3k^*} > \min\{x_{31}, x_{32}\} \geq u_3$.

又由 S 满足性质 (O). 在 (3) 中取 $k=k^*$, 推得 $x_{2k^*} \leq u_2$, 于是

$$u'_2 = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k^*}\} = x_{2k^*}.$$

下证对任意的 $k \in M$, 存在某个 $i=1, 2, 3$ 使得 $u'_i \geq x_{ik}$. 假若不然, 则 $x_{ik} > \min\{x_{i1}, x_{i2}\}$, $i=1, 3$ 且 $x_{2k} > x_{2k^*}$. 这与 x_{2k^*} 的最大性矛盾. 因此, 数表 S' 满足性质 (O).

下证唯一性. 设有 $k \in M$ 使得数表

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k} \end{pmatrix}$$

具有性质 (O), 不失一般性, 我们假定

$$u_1 = \min\{x_{11}, x_{12}, x_{13}\} = x_{11}$$

$$(4) u_2 = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{23}\} = x_{22}$$

$$u_3 = \min\{x_{31}, x_{32}, x_{33}\} = x_{33}$$

$$x_{32} < x_{31} .$$

由于 $x_{32} < x_{31}$, $x_{22} < x_{21}$ 及 (i) , 有 $\hat{u}_1 = \min\{x_{11}, x_{12}, x_{1k}\} = x_{11}$. 又由 (i) 知 或者 (a) $\hat{u}_3 = \min\{x_{31}, x_{32}, x_{3k}\} = x_{3k}$ 或者 (b) $\hat{u}_2 = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k}\} = x_{2k}$. 如果 (a) 成立, 由数表 \hat{S} 具有性质 (O) , 则

$$\hat{u}_1 = \min\{x_{11}, x_{12}, x_{1k}\} = x_{11} ,$$

$$(5) \hat{u}_2 = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k}\} = x_{22} ,$$

$$\hat{u}_3 = \min\{x_{31}, x_{32}, x_{3k}\} = x_{3k} .$$

由数表 \hat{S} 满足性质 (O) , 则对于 $3 \in M$ 至少存在一个 $i \in \{1, 2, 3\}$ 使得

$\hat{u}_i \geq x_{ik^*}$. 由 $k^* \in I$ 及 (4) 和 (6) 式知, $x_{1k^*} > x_{11} = \hat{u}_1$, $x_{3k^*} > x_{32} = \hat{u}_3$. 于是只能有 $x_{2k^*} \leq \hat{u}_2 = x_{2k}$. 类似地, 由 S' 满足性质 (O) 及 $k \in M$ 可推得 $x_{2k} \leq u'_2 = x_{2k^*}$. 从而 $k^* = k$.