2023 北京丰台高一（下）期中

数　　学（B 卷）

时间：120 分钟

第 I 卷（选择题共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分. 在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）下列各角中，与 60°角终边相同的角是

（A）−300°　（B）−60°　（C）120°　（D）240°

（2）设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BC}=$

（A）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　（B）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　（C）$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　（D）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

（3）在平面直角坐标系中，角 α 以 x 轴的非负半轴为始边，它的终边与单位圆 O 交于点 $P(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$，则 $\cos\alpha=$

（A）$-\frac{4}{3}$　（B）$\frac{3}{5}$　（C）$-\frac{4}{5}$　（D）$\frac{4}{5}$

（4）已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，且 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$，则 $x=$

（A）1　（B）4　（C）−1　（D）−4

（5）已知 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，则点 $P(\sin\alpha,\cos\alpha)$ 位于

（A）第一象限　（B）第二象限

（C）第三象限　（D）第四象限

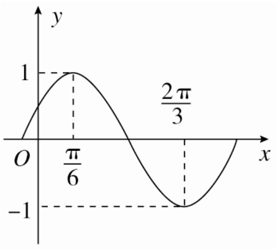
（6）若 α 为第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$

（A）$-\frac{7}{9}$　（B）$\frac{7}{9}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

（7）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，E 为 BC 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=$

（A）0　（B）1　（C）2　（D）4

（8）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则



（A）$\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$　（B）$\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$

（C）$\omega=1,\varphi=-\frac{\pi}{6}$　（D）$\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$

（9）已知函数 $f(x)=1-\cos 2x$，则下列说法正确的是

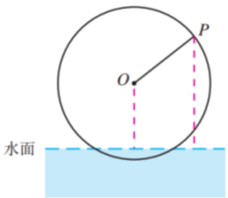
（A） $f(x)$ 为奇函数

（B） $f(x)$ 的最小正周期为 2π

（C） $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增

（D） $f(x)$ 有最大值，没有最小值

（10）半径为 2m 的水轮如图所示，水轮的圆心 O 距离水面 $\sqrt{3}$ m. 已知水轮按逆时针方向每分钟转 4 圈，水轮上的点 P 到水面的距离 y（单位：m）与时间 x（单位：s）满足关系式 $y=A\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{3})+k$. 从点 P 离开水面开始计时，则点 P 到达最高点所需最短时间为



（A） $\dfrac{85}{4}$ s （B） $\dfrac{25}{4}$ s （C） $\dfrac{35}{4}$ s （D） 10 s

第 II 卷（非选择题共 110 分）

二、填空题:共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）已知向量 $|\boldsymbol{a}|=1$， $\boldsymbol{b}=(1,1)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$___.

（12）已知扇形的半径为 2，圆心角为 $\dfrac{3\pi}{4}$，则其弧长为___.

（13）函数 $f(x)=\tan(x+\dfrac{\pi}{6})$ 的定义域为___.

（14）设函数 $f(x)=\cos(\omega x-\dfrac{\pi}{3})$ $(\omega>0)$. 若 $f(x)\leqslant f(\dfrac{\pi}{4})$ 对任意实数 x 都成立，则 ω 的值可以为___.

（15）已知函数 $f(x)=\sin x+\cos 2x$，给出下列结论：

① $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的一个零点；

② $f(x)$ 为周期函数；

③ $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增；

④ $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{9}{8}$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题:共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（16）（本小题 13 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$， $\boldsymbol{b}=(-1,1)$.

（Ⅰ）求 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的坐标；

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，求 $\cos\theta$ 的值；

（III）若 $(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，求 k 的值.

（17）（本小题 14 分）

在△ ABC 中，$b=4$，$c=3$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.

（Ⅰ）求 $\sin C$ 的值；

（Ⅱ）求△ ABC 的面积.

条件①：$A=\dfrac{\pi}{3}$；

条件②：$a=\sqrt{13}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

已知 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，θ 为第四象限角.

（I）求 $\tan\theta$ 的值；

（Ⅱ）设 $f(x)=\dfrac{\sin(3\pi-x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{\sin(\pi+x)\tan(x-\pi)}$，求 $f(\theta+\dfrac{\pi}{4})$ 的值.

（19）（本小题 14 分）

在△ ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，向量 $\boldsymbol{m}=(a,\sqrt{3}b)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin B)$，且 $\boldsymbol{m}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$.

（I）求 A 的大小；

（Ⅱ）若 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，求 BC 边上的高.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（III）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

（21）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ （ $\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ ）．用五点法画 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{13\pi}{12}]$ 上的图象时，取点列表如下：

x	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{7\pi}{12}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{13\pi}{12}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\theta(\theta>0)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象．若 $g(x)$ 为偶函数，求 θ 的最小值；

（III）在△ ABC 中，角 A， B， C 所对的边分别为 a， b， c． 若 $A=\dfrac{\pi}{3}$， $a=f(A)$，求△ ABC 周长的最大值．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

第Ⅰ卷（选择题 共 40 分）

一、选择题（每小题 4 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	B	C	B	D	D	A	C	B

第Ⅱ卷（非选择题 共 110 分）

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

（11）1；

（12）$\frac{3\pi}{2}$；

（13）$\{x\,|\,x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$；

（14）$\frac{4}{3}$（答案不唯一，符合 $\omega=8k+\frac{4}{3},k\in\mathbf{N}$ 即可）;；

（15）①②④.

（注：15 题给出的结论中，有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.）

三．解答题（共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\times(1,2)-(-1,1)=(3,3)$．　……………3 分

（Ⅱ）$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1\times(-1)+2\times1}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$．　…………7 分

（III）因为 $(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，

所以 $(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$．

所以 $1\times(-1)+2\times1-2k=0$，

解得，$k=\frac{1}{2}$．　……………13 分

（17）（本小题 14 分）

选条件①：

解：（Ⅰ）在△ABC 中，

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=13$，

所以 $a=\sqrt{13}$.

因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $\frac{\sqrt{13}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\sin C}$.

所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{39}}{26}$. ……………10 分

（Ⅱ）因为 $A=\frac{\pi}{3}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$

$=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=3\sqrt{3}$. ……………14 分

选条件②：

解：（Ⅰ）在△ ABC 中，

因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{(\sqrt{13})^2+4^2-3^2}{2\sqrt{13}\times4}$

$=\frac{5\sqrt{13}}{26}$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$

$=\sqrt{1-(\frac{5\sqrt{13}}{26})^2}$

$=\frac{3\sqrt{39}}{26}$. ……………10 分

（Ⅱ）因为 $\sin C=\frac{3\sqrt{39}}{26}$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times 4\times\frac{3\sqrt{39}}{26}$

$=3\sqrt{3}$. ……………14 分

(18)（本小题 14 分）

解:（Ⅰ）因为 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，θ 为第四象限角，

所以 $\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}$

$=-\frac{4}{5}$.

所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$. ……………6 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=\frac{\sin(3\pi-x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{\sin(\pi+x)\tan(x-\pi)}$,

$=\frac{\sin x(-\sin x)}{-\sin x\tan x}$

$=\cos x$,

所以 $f(\theta+\frac{\pi}{4})=\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$

$=\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-\frac{4}{5})$

$=\frac{7\sqrt{2}}{10}$. ……………14 分

(19)（本小题 14 分）

解:（Ⅰ）因为 $\boldsymbol{m}=(a,\sqrt{3}b)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin B)$，且 $\boldsymbol{m}//\boldsymbol{n}$，

所以 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$.

由正弦定理得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$.

因为$\sin B\neq 0$，

所以$\sin A=\sqrt{3}\cos A$.

所以$\tan A=\sqrt{3}$.

因为$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………6分

（Ⅱ）在△ABC中，因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以$(\sqrt{7})^2=2^2+c^2-2\times 2\times c\times\cos\dfrac{\pi}{3}$.

所以$c^2-2c-3=0$.

解得$c=3$，或$c=-1$（舍）.

设BC边上的高为h，

因为$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ah$，

所以$h=\dfrac{bc\sin A}{a}=\dfrac{2\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$. ……………14分

（20）（本小题15分）

解：（Ⅰ）因为$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$

$=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x)+1$

$=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$，

所以$f(x)$的最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. ……………8分

（Ⅱ）因为$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，　$k\in\mathbf{Z}$，

所以$-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}+k\pi$，　$k\in\mathbf{Z}$.

所以$f(x)$的单调递增区间为$[-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

……………12分

（III）因为$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，

所以$2x+\dfrac{\pi}{6}\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}]$.

当$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$x=\dfrac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值.

所以$f(x)$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值为$f(\dfrac{\pi}{6})=3$.………15分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $A=2$.

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12})=\pi$，所以 $\omega=2$.

因为 $\sin(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. ……………4 分

（Ⅱ）由题意得，

$$g(x)=f(x+\theta)$$
$$=2\sin[2(x+\theta)-\frac{\pi}{6}]$$
$$=2\sin(2x+2\theta-\frac{\pi}{6}).$$

因为 $g(x)$ 为偶函数，

所以 $2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $\theta>0$，所以当 $k=0$ 时，θ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. ……………9 分

（III）由题意得 $a=f(\frac{\pi}{3})=2\sin(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=2$.

在△ ABC 中，因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $b^2+c^2-bc=4$.

因为 $b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$

$$\geqslant(b+c)^2-3\times\frac{(b+c)^2}{4}$$
$$=\frac{(b+c)^2}{4},$$

所以 $\frac{(b+c)^2}{4}\leqslant 4$.

所以 $(b+c)^2\leqslant 16$，$b+c\leqslant 4$，

即 $a+b+c\leqslant 2+4=6$.

所以△ ABC 周长的最大值为 6. ……………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。