

高二数学

(试卷满分为 150 分, 考试时间为 120 分钟)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1. 物体运动的位移 x m 与时间 t s 的关系为 $x(t) = t^2 + 1$, 则物体在 $[2, 2 + \Delta t]$ 这段时间内的平均速度为

- (A) $2 + \Delta t$ (B) $4 + \Delta t$ (C) $4 + \Delta t + \frac{1}{\Delta t}$ (D) $4 + (\Delta t)^2$

2. 已知函数 $f(x) = x \sin x$, 则 $f'(x) =$

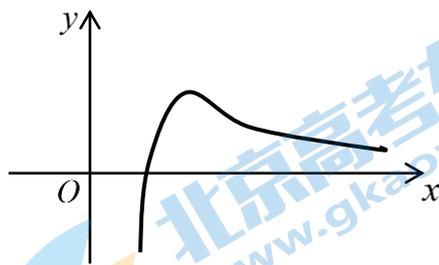
- (A) $1 + \cos x$ (B) $\sin x + x \cos x$ (C) $\sin x - x \cos x$ (D) $\cos x$

3. 袋中共有 5 个球, 其中 3 个白球, 2 个黑球. 从袋中抽取 2 个球, 其中恰有一个白球的概率为

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{10}$

4. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则该函数的解析式可能是

- (A) $f(x) = x \ln x$ (B) $f(x) = x e^x$
 (C) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ (D) $f(x) = \frac{e^x}{x}$



5. 重复进行 10 次某试验, 每次试验的成功率都为 p ($0 < p < 1$), 则其中前 7 次都未成功后 3 次都成功的概率为

- (A) $C_{10}^3 p^3 (1-p)^7$ (B) $C_{10}^3 p^7 (1-p)^3$ (C) $p^3 (1-p)^7$ (D) $p^7 (1-p)^3$

6. 某地区气象台统计, 该地区下雨的概率是 $\frac{4}{15}$, 刮三级以上风的概率是 $\frac{2}{15}$, 既刮三级以上风又下雨的概率是 $\frac{1}{10}$. 则在下雨天里, 刮三级以上风的概率是

- (A) $\frac{8}{225}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$

7. 某农户有 10 头牛因误食含有病毒的饲料而被感染, 已知该病的发病率为 0.02, 若发病牛的头数为 ξ , 则 $D\xi =$

- (A) 0.2 (B) 0.8 (C) 0.196 (D) 0.804

8. 若函数 $f(x) = x^3 - 3x + m$ 的极小值为 -1 , 则函数 $f(x)$ 的极大值为

- (A) 3 (B) -1 (C) 1 (D) 2

9. 某篮球运动员一次投篮得分 X 的分布列为:

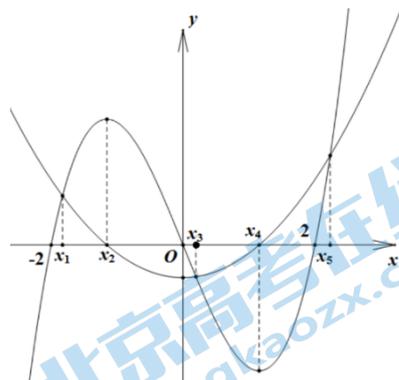
X	3	2	0
P	a	b	c

若他在一次投篮中得分的期望 $E(X) = 2$, 则 ab 的最大值为

- (A) $\frac{1}{48}$ (B) $\frac{1}{24}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{6}$

10. 已知函数 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$

- (A) 在区间 $(-2, 0)$ 上是减函数
 (B) 在区间 (x_1, x_3) 上是减函数
 (C) 在区间 (x_3, x_5) 上是减函数
 (D) 在区间 (x_2, x_4) 上是减函数



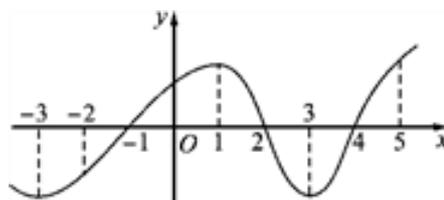
二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ 的零点是_____, 极值点是_____.

12. 若直线 $y = 2x + b$ 是曲线 $y = e^x - 2$ 的切线, 则实数 $b =$ _____.

13. 如图是函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象, 则下面说法正确的是_____.

- ①函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上单调递减;
 ② $f(1) > f(2)$;
 ③函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取极大值;
 ④函数 $f(x)$ 在区间 $(-2, 5)$ 内有两个极小值点.



14. 目前,北京医疗机构日常核酸检测主要分为 10 合 1 样本混检和单样本检测. 10 合 1 样本混检是指:先将 10 个人的样本混合在一起进行 1 次检测,如果这 10 个人都没有感染新冠病毒,则检测结果为阴性,得到每人的检测结果都为阴性,检测结束;如果这 10 个人中有人感染新冠病毒,则检测结果为阳性,此时需对每人再进行 1 次单独检测,得到每人的检测结果,检测结束. 某社区有 3000 人,若新冠病毒的感染率为 $p(0 \leq p \leq 1)$,为了获得社区每个人的核酸检测结果,可以选择对所有人都进行单样本检测,也可以选择对所有人都进行 10 合 1 样本混检. 已知 10 合 1 样本混检时每个样本检测费用为 5.9 元,单样本检测时每个样本检测费用为 24.9 元. 当 $p \in$ _____ 时,选择单样本检测总费用更低. (写出一个符合条件的集合即可)

15. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 且 $f(x) + f'(x) > 2$, $f(1) = 2 + \frac{4}{e}$, 则不等式 $e^x f(x) > 4 + 2e^x$ 的解集为_____.

三、解答题共 6 小题,共 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求 $y = f(x)$ 的单调区间.

17. (本小题满分 15 分)

据统计,中国新增绿化面积的 42%来自于植树造林.下表是中国十个地区在 2017 年植树造林的相关数据.(造林总面积为人工造林、飞播造林、新封山育林、退化林修复、人工更新的面积之和.)单位:公顷.

地区	造林总面积	造林方式				
		人工造林	飞播造林	新封山育林	退化林修复	人工更新
内蒙	618484	311052	74094	136006	90382	6950
河北	583361	345625	33333	135107	65653	3643
河南	149002	97647	13429	22417	15376	133
重庆	226333	100600		62400	63333	
陕西	297642	184108	33602	63865	16067	
甘肃	325580	260144		57438	7998	
新疆	263903	118105	6264	126647	10796	2091
青海	178414	16051		159734	2629	
宁夏	91531	58960		22938	8298	1335
北京	19064	10012		4000	3999	1053

(I) 请根据上述数据分别写出在这十个地区中人工造林面积与造林总面积的比值最大和最小的地区(不必说明理由);

(II) 在这十个地区中,任选一个地区,求该地区人工造林面积占造林总面积的比值超过 50% 的概率是多少?

(III) 在这十个地区中,从新封山育林面积超过五万公顷的地区中,任选两个地区,记 X 为这两个地区中退化林修复面积超过六万公顷的地区的个数,求 X 的分布列.

18. (本小题满分 15 分)

某市为了解甲、乙两校学生的学业水平，从两校学生中各随机抽取 20 人参加学业水平等级考试，得到学生的学业成绩茎叶图如下：

	甲校	乙校
		4 6
	5	5 3 6 8
	4 2	6 2 4 5 6 8
	9 8 8 7 6	7 3 5 4 4 5
	9 7 6 5 3 3 0	8 1 4 5 9
	8 7 6 2 0	9 8 9

根据学生的学业成绩，将学业水平分为三个等级：

学业成绩	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
学业水平	一般	良好	优秀

根据所给数据，频率视为相应的概率。

(I) 从甲、乙两校学生中各随机抽取 1 人，记事件 C ：“抽到的甲校学生的学业水平等级高于乙校学生的学业水平等级”，求 C 发生的概率；

(II) 从甲校学生中随机抽取 40 人，记 ξ 为学业水平优秀的人数，求 ξ 的数学期望；

(III) 通过茎叶图比较样本中甲、乙两校学生的学业成绩平均值 $\bar{x}_甲$ 与 $\bar{x}_乙$ 、75%分位数 $Q_甲$ 与 $Q_乙$ 、方差 $s^2_甲$ 与 $s^2_乙$ 的大小。(只需写出结论)

19. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 + 1 (a > 0)$, $g(x) = x^3 + bx$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线, 求 a, b 的值;

(II) 当 $a = 3, b = -9$ 时, 若函数 $f(x) + g(x)$ 在区间 $[k, 2]$ 上的最大值为 28, 求 k 的取值范围.

20. (本小题满分 14 分)

品酒师需定期接受酒味鉴别功能测试. 一般通常采用的测试方法如下: 拿出 $n (n \in \mathbf{N}_+)$ 瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝, 要求其按品质优劣为它们排序; 经过一段时间, 等其记忆淡忘之后, 再让其品尝这 n 瓶酒, 并重新按品质优劣为它们排序, 这称为一轮测试.

根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为品酒师评分. 分别以 a_1, a_2, \dots, a_n 表示第一次排序时被排为 $1, 2, \dots, n$ 的 n 种酒在第二次排序时的序号, 并令

$$X_n = |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|,$$

则 X_n 是对两次排序的偏离程度的一种描述.

(I) 对 $n = 4$, 假设 a_1, a_2, a_3, a_4 等可能地为 $1, 2, 3, 4$ 的各种排列, 求 $P(X_4 = 2)$;

(II) 对 $n = 3$, 假设 a_1, a_2, a_3 等可能地为 $1, 2, 3$ 的各种排列, 求 X_3 的分布列和期望;

(III) 某品酒师在相继进行的三轮测试中 (假定各轮测试相互独立), 都有 $X_3 \leq 1$, 你认为该品酒师的酒味鉴别功能如何? 说明理由.

21. (本小题满分 13 分)

设 A 为非空集合, 令 $A \times A = \{(x, y) | x, y \in A\}$, 则 $A \times A$ 的任意子集 R 都叫做从 A 到 A 的一个关系(Relation), 简称 A 上的关系.

例如 $A = \{0, 1, 2\}$ 时, $R_1 = \{(0, 2)\}$, $R_2 = A \times A$, $R_3 = \emptyset$, $R_4 = \{(0, 0), (2, 1)\}$ 等都是 A 上的关系.

设 R 为非空集合 A 上的关系. 如果 R 满足:

- ① (自反性) 若 $\forall x \in A$, 有 $(x, x) \in R$, 则称 R 在 A 上是自反的;
- ② (对称性) 若 $\forall (x, y) \in R$, 有 $(y, x) \in R$, 则称 R 在 A 上是对称的;
- ③ (传递性) 若 $\forall (x, y), (y, z) \in R$, 有 $(x, z) \in R$, 则称 R 在 A 上是传递的;

称 R 为 A 上的等价关系.

(I) 已知 $A = \{0, 1, 2\}$. 用列举法写出 $A \times A$, 然后写出 A 上的关系有多少个, 最后写出 A 上的所有等价关系. (只需写出结果)

(II) 设 R_1 和 R_2 是某个非空集合 A 上的关系, 证明:

- (i) 若 R_1, R_2 是自反的 and 对称的, 则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的 and 对称的;
- (ii) 若 R_1, R_2 是传递的, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的.

(III) 若给定的集合 A 有 n 个元素 ($n \geq 4$), A_1, A_2, \dots, A_m ($2 \leq m \leq n$) 为 A 的非空子集, 满足 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = A$ 且两两交集为空集.

求证: $R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \dots \cup (A_m \times A_m)$ 为 A 上的等价关系.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。