2020-2021学年度高三数学学科热身练习

2021.5

第一部分（选择题共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^2\}$，$B=\{(x,y)|y=x\}$，则 $A\cap B=$ 【　　】

$A.\{0,1\}$　　　　$B.\{(0,0)\}$

$C.\{(1,1)\}$　　　　$D.\{(0,0),(1,1)\}$

2. 设 i 为虚数单位，若 $z=\dfrac{2i}{1+i}$，则 $z=$ 【　　】

$A.1+i$　　　　$B.-1+i$

$C.1-i$　　　　$D.-1-i$

3. 将函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$ 个单位后，得到函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，则 φ 的值为 【　　】

$A.\dfrac{\pi}{3}$　　　　$B.\dfrac{\pi}{6}$

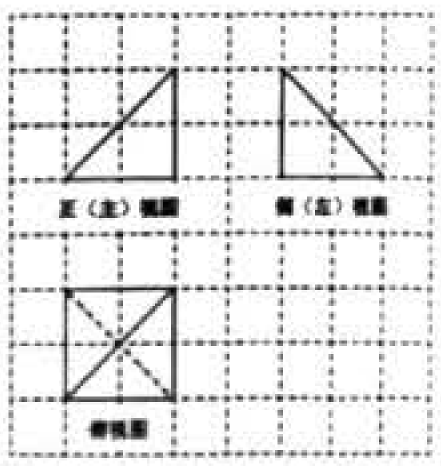
$C.\dfrac{\pi}{2}$　　　　$D.\dfrac{\pi}{4}$

4. 在等边 ΔABC 中，$AB=1$，D 为 AB 边的中点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}$ 的值为 【　　】

$A.\dfrac{3}{4}$　　　　$B.\dfrac{1}{4}$

$C.-\dfrac{1}{4}$　　　　$D.-\dfrac{3}{4}$

5. 某三棱锥的三视图如图所示。已知网格纸上小正方形的边长为1，该三棱锥的体积为 【　　】



$A.\dfrac{4}{3}$　　　　$B.\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$C.\dfrac{8}{3}$　　　　$D.\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

6. 设 $\alpha\in\left\{-1,\frac{1}{2},1,2,3\right\}$ 则“$f(x)=x^{\alpha}$ 的图像经过 $(-1,-1)$”是“$f(x)=x^{\alpha}$ 为奇函数”的 【 】

A.充分不必要件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

7. 已知圆 C 经过点 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$，且与直线 $y=x-1$ 只有一个公共点，则圆心 C 的坐标为 【 】

A. $(0,0)$　　　　B. $(0,1)$

C. $(0,-1)$　　　　D. $(0,1)$ 或 $(0,-1)$

8. 在 ΔABC 中，$a=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，则 ΔABC 的最大周长是 【 】

A. $2\sqrt{3}$　　　　B. $3\sqrt{3}$

C. $3+\sqrt{3}$　　　　D. $4+\sqrt{3}$

9. 聚光式太阳灶（如图1）广泛应用于我国西部农村地区.其轴截面图（如图2）中，点 F 为抛物线的焦点，此处放置烧水壶，按照一般制作工艺，抛初线的顶点 A 与焦点 F 关于其外沿所在的平面对称.已知 A、F 两点间的距离为0.5米，则该太阳灶的最大口径（外沿所在圆的直径）大约为 【 】

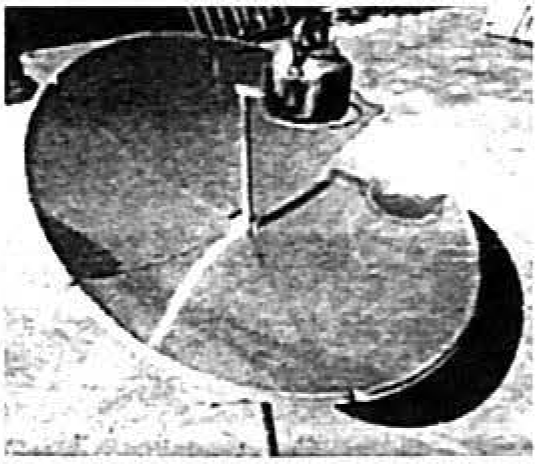


图 1

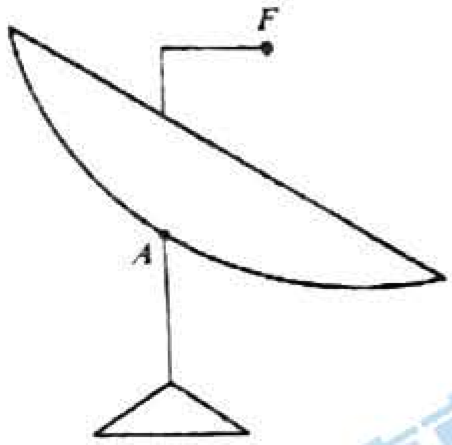


图 2

A.1.2米　　　　B.1.4米

C.1.6米　　　　D.1.8米

10. 黎曼函数 $R(x)$ 是由德国数学家黎曼发现并提出的，在高等数学中有着广泛的应用，$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的定义为：当 $x=\frac{q}{p}$（$p>q$，且 p，q 为互质的正整数）时，$R(x)=\frac{1}{p}$；当 $x=0$ 或 $x=1$ 或 x 为 $(0,1)$ 内的无理数时，$R(x)=0$.已知 a，b，$a+b\in[0,1]$，则 【 】

A. $R(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　　　B. $R(a\cdot b)\geq R(a)\cdot R(b)$

C. $R(a+b)\geq R(a)+R(b)$　　　　D.以上选项都不对

注：p，q 为互质的正整数 $(p>q)$，即 $\frac{q}{p}$ 为已约分的最简真分数.

第二部分（非选择题共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 为了解某班同学的100m成绩，体育老师抽取了6名男生和5名女生进行了测试，结果绘制成茎叶图如图所示.记这6名男生，5名女生测试成绩的中位数分别为a，b，则a，b的大小关系为________.

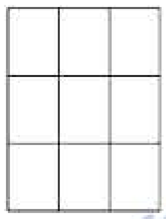
男生		女生
8	7	5
8 6 5	8	6 8
3 2	9	2 4

12. 若$(x+a)^6$的展开式中x^4项的系数是60，则a的值为________，常数项为________.

13. 若对任意$x\in\mathbf{R}$，$\cos(x-\varphi)=\sin x$恒成立，则常数φ的一个取值为________.

14. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，两条渐近线分别为$l_1$和$l_2$，若点$F$关于$l_1$的对称点恰好在$l_2$上，则双曲线$C$的离心率为________.

15. 将1，2，3，4.5，6，7，8，9这九个数填入如图所示3×3的正方形网格中，每个数填一次，每个小方格中填一个数.考虑每行从左到右，每列从上到下，两条对角线从上到下这8个数列，给出下列四个结论：



①这8个数列有可能均为等差数列；

②这8个数列中最多有3个等比数列；

③若中间一行、中间一列、两条对角线均为等差数列，则中心数必为5；

④若第一行、第一列均为等比数列，则其余6个数列中至多有1个等差数列.

其中所有正确结论的序号是________.

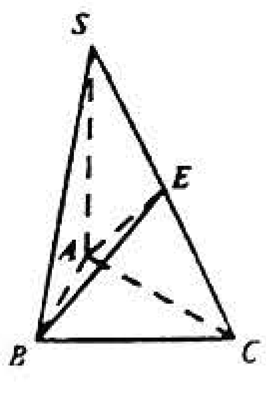
三、题共6小题，共85分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. （本题满分14分）如图，在三棱锥$S-ABC$中，侧面$ASB\perp$底面ABC，$SA\perp AB$，$AB\perp BC$，$SA=AB=BC$.

（1）求证：$SB\perp BC$

（2）求直线SB与AC所成角的大小；

（3）若E为校SC的中点，求二面角$E-AB=C$的大小.



17. （本题满分13分）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，，已知$a_1=1$，$S_5=15$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得数列$\{b_n\}$唯一确定，求b_n.

条件①：$T_n=2^{a_n}-1$；　　条件②：$T_n=2b_n-\frac{a_n}{n}$；　　条件③：$T_{n+1}=T_n+a_n$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. （本题满分14分）某工厂每天生1000箱某型号口罩，每箱300个，该型号口罩吸气阻力还超过343.2pa的为合格品，否则为不合格品，不可出厂销售.生声过程中随机抽取了20个口罩进行检测，其吸气阻力值（单位：pa）如下表所示：

340.1	332.5	352.4	299.8	326.7	303.5	314.7	298.9	316.8	340.6
331.6	342.3	321.7	305.9	341.2	335.7	325.1	305.7	345.6	336.5

（1）从样本中随机抽取1个口罩，求其为不合格品的概率；

（2）从样本中随机抽取3个口罩，求其中含有不合格品的概率；

（3）已知每个口罩的检测费用为0.05元.按有关规定，该型号口罩出厂前，工厂要对每一个口罩进行吸气阻力检测，为督促工厂执行此规定，每天生产的口罩出厂后，质检部门将随机抽取100箱，每箱抽3个口罩进行检测，每检测出一个不合格品，罚款500元.这个处罚标准是否合理？说明理由.

19. （本题满分14分）已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}=2x^{2}$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）是否存在 $x_1,x_2\in\left(0,2\right)$，使得曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 和点 $\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ 处的切线互相垂直？说明理由.（参考数据：$e\approx 2.72$，$\ln 2\approx 0.69$）

20. （本题满分15分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 经过如下四个点中的三个点：$P_1\left(1,1\right)$，$P_2\left(0,1\right)$，$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过原点的直线与椭图 C 交于 A，B 两点（A，B 不是精圆 C 的顶点）.点 D 在椭圆 C 上，且 $AD\perp AB$，直线 BD 与 x 轴交于点 E.过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为点 M，直线 BM 与直线 AE 相交于点 N，求证：ΔAMN 为等腰三角形.

21. （本题满分15分）已知$S=\{1,2,\dots,n\}$，$A\subseteq S$，$T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，记$A_i=\{x|x=a+t_i,a\in A\}(i=1,2)$，用$|X|$表示有限集合$X$的元素个数.

（1）若$n=5$，$A=\{1,2,5\}$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，求T；

（2）若$n=7$，$|A|=4$，则对于任意的A，是否都存在T，使得$A_1\cap A_2=\varnothing$？说明理由；

（3）若$|A|=5$，对于任意的A，都存在T，使得$A_1\cap A_2=\varnothing$，求n的最小值.