北京汇文中学教育集团 2023-2024 学年度第二学期

开学测试

高三年级　　数学学科

本试卷共 6 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

一、选择题(每题 4 分，共 40 分)

1．设集合 $A=\{x|1\le x+1<5\}$，$B=\{x|x\le 2\}$，则 $A\cap(\complement_{R}B)=$（　）

A．$\{x|0\le x<4\}$　　B．$\{x|0\le x\le 2\}$　　C．$\{x|x<4\}$　　D．$\{x|2<x<4\}$

2.已知命题 p:“$\forall a>0$，有 $e^{a}\ge 1$ 成立”，则 $\neg p$ 为（　）

A. $\exists a\le 0$，有 $e^{a}\le 1$ 成立　　B. $\exists a\le 0$，有 $e^{a}<1$ 成立

C. $\exists a>0$，有 $e^{a}<1$ 成立　　D. $\exists a>0$，有 $e^{a}\le 1$ 成立

3.已知复数 $2z-\bar{z}=1-3i$，其中 i 是虚数单位，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z=$（　）

A. $1-i$　　B. $1+i$　　C. $-1-i$　　D. $-1+i$

4.某生产厂商更新设备，已知在未来 x 年内，此设备所花费的各种费用总和 y（万元）与 x 满足函数关系 $y=4x^{2}+64$，若欲使此设备的年平均花费最低，则此设备的使用年限 x 为（　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

5.设 $a=2^{0.3},b=(\frac{1}{2})^{-0.5},c=\ln 2$，则（　）

A.$c<b<a$　　B.$c<a<b$　　C.$a<b<c$　　D.$b<a<c$

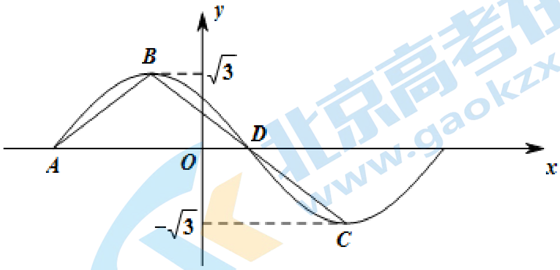
6.已知 $(1+2x)^{n}$ 的展开式中第 3 项与第 5 项的二项式系数相等，则 $(1+2x)^{n}$ 的展开式的各项系数之和为（　）

A. 2^{6}　　B. 2^{8}　　C. 3^{6}　　D. 3^{8}

7.已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+t$（t 为常数），S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“$t\ge 0$”是“$\{a_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 都有最小项”的（　）

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数 $g(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)$， $g(x)$ 图象上每一点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $f(x)$ 的图象， $f(x)$ 的部分图象如图所示，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$，则 ω 等于（　　）



A. $\frac{\pi}{12}$　　　　B. $\frac{\pi}{6}$　　　　C. $\frac{\pi}{4}$　　　　D. $\frac{\pi}{2}$

9. 已知 M 是圆 $C:x^2+y^2=1$ 上一个动点，且直线 $l_1:mx-ny-3m+n=0$ 与直线 $l_2:nx+my-3m-n=0(m,n\in\mathrm{R},m^2+n^2\neq 0)$ 相交于点 P，则 $|PM|$ 的取值范围是（　　）

A. $[\sqrt{3}-1,2\sqrt{3}+1]$　　B. $[\sqrt{2}-1,3\sqrt{2}+1]$

C. $[\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}+1]$　　D. $[\sqrt{2}-1,3\sqrt{3}+1]$

10.已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=|n-13|$，若满足 $a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+19}=m$ 的整数 k 恰有 2 个，则 m 可取到的值有（　　）

A.有 3 个　　B.有 2 个　　C.有 1 个　　D.不存在

二、填空题(每题 5 分，共 25 分)

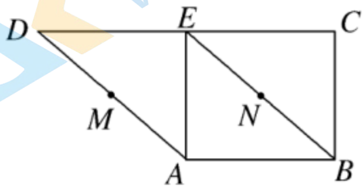
11.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+1,x>0\\ 2^x-1,x\leq 0\end{cases}$ 的值域为________.

12.已知抛物线 $x^2=4y$ 上一点 $P(m,1)$，则抛物线的准线方程为________；点 P 到焦点的距离为________.

13. 在 ΔABC 中， $a=1$， $b=\sqrt{7}$，且 ΔABC 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $c=$________.

14 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左焦点为 F，右顶点为 A，过 F 作 C 的一条渐近线的垂线 FD，D 为垂足．若 $|DF|=|DA|$，则 C 的离心率为__________.

15. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，E 为 CD 的中点，$BC\perp CD$，$AE\perp CD$，M，N 分别是 AD，BE 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折起，使点 D 不在平面 $ABCE$ 内，则下列命题中正确的序号为______.



①$MN // AB$；

②$MN\perp AE$；

③$MN //$ 平面 CDE；

④存在某折起位置，使得平面 $BCD\perp$ 平面 ABD．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，且 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为一组已知条件．

（I）求 $f(x)$ 的解析式：

（II）若 $f(x)$ 图象的对称轴只有一条落在区间 $[0，a]$ 上，求 a 的取值范围．

条件①：$f(x)$ 的最小值为 -2；

条件②：$f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}，0)$；

条件③：$f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{5\pi}{6}，-1)$．

17. （本小题满分 13 分）

每年 8 月 8 日为我国的全民健身日,倡导大家健康、文明、快乐的生活方式. 为了激发学生的体育运动兴趣,助力全面健康成长,某中学组织全体学生开展以体育锻炼为主题的实践活动. 为了解该校学生参与活动的情况,随机抽取 100 名学生作为样本,统计他们参加体育锻炼活动时间(单位:分钟), 得到下表：

类别 \ 人数 \ 时间		$[0,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$
性别	男	5	12	13	8	9	8
	女	6	9	10	10	6	4
学段	初中						
	高中	m	13	12	7	5	4

（1）从该校随机抽取 1 名学生, 若已知抽到的是女生, 估计该学生参加体育锻炼活动时间在 $[50,60)$ 的概率；

（2）从参加体育锻炼活动时间在 $[80,90)$ 和 $[90,100)$ 的学生中各随机抽取 1 人, 其中初中学生的人数记为 X, 求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（3）假设同组中每个数据用该组区间中点值代替, 样本中的初中、高中学生参加体育锻炼活动时间的平均数分别记为 μ_1, μ_2． 写出一个 m 的值, 使得 $\mu_1 < \mu_2$ (结论不要求证明).

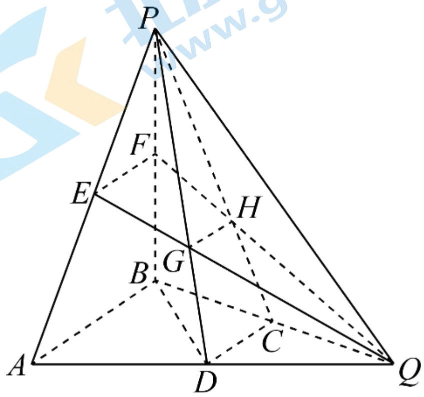
18. （本小题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $P-ABQ$ 中，$PB\perp$ 平面 ABQ，$BA=BP=BQ=2$，D，C，E，F 分别是 AQ，BQ，AP，BP 中点，$AB\perp BQ$，PD 与 EQ 交于点 G，PC 与 FQ 交于点 H，连接 GH.

（I）求证：$AB // GH$；

（II）求平面 PAB 与平面 PCD 所成角 余弦值；

（III）求点 E 到平面 PCD 的距离.



19.（本小题满分 14 分）

已知 $f(x)=(x+1)e^{kx}$，$k\neq 0$.

（I）若 $k=1$，求 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（II）设 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（III）求证：当 $k>0$ 时，$\forall m,n\in(0,+\infty)$，$f(m+n)+1>f(m)+f(n)$.

20.（本小题满分 15 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的左顶点$A$与上顶点$B$的距离为$\sqrt{6}$.

（I）求椭圆C的方程和焦点的坐标；

（II）直线AP与椭圆C的另一公共点为点P，线段AP的垂直平分线分别与线段AP、x轴、y轴相交于不同的三点M,H,Q.

（i）求证：点M,Q关于点H对称；

（ii）若ΔPAQ为直角三角形，求点P的横坐标.

21.（本小题满分 15 分）

有限数列$A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n.(n\geq 3)$同时满足下列两个条件：

① 对于任意的i,j（$1\leq i<j\leq n$），$a_i<a_j$；

② 对于任意的i,j,k（$1\leq i<j<k\leq n$），a_ia_j，a_ja_k，a_ia_k三个数中至少有一个数是数列A_n中的项.

（Ⅰ）若$n=4$，且$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=a$，$a_4=6$，求a的值；

（Ⅱ）证明：$2,3,5$不可能是数列A_n中的项；

（III）求n的最大值.

参考答案：

一、选择题

1-10:DCACB，CCABA

二、填空题

11. $(-1,0]\cup(1,+\infty)$　12.　①. $y=-1$　②. 2

13. 2 或 $2\sqrt{3}$　14. 2　15.②③

16.（Ⅰ）由于函数 $f(x)$ 图象上两相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$．

此时 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$．

选条件①②：

因为 $f(x)$ 的最小值为 $-A$，所以 $A=2$．

因为 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12},0)$，

所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi\ (k\in Z)$，

所以 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}\ (k\in Z)$，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，此时 $k=1$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$．

选条件①③：

因为 $f(x)$ 的最小值为 $-A$，所以 $A=2$．

因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{5\pi}{6},\ -1)$，

则 $f(\frac{5\pi}{6})=-1$，即 $2\sin(\frac{5\pi}{3}+\varphi)=-1$， $\sin(\frac{5\pi}{3}+\varphi)=-\frac{1}{2}$．

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{7\pi}{6}<\varphi+\frac{5\pi}{3}<\frac{13\pi}{6}$，

所以 $\varphi+\frac{5\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}$， $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$．

选条件②③：

因为函数 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12},0)$，

所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi\ \ (k\in Z)$，

所以 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}\ \ (k\in Z)$．

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，此时 $k=1$．

所以 $f(x)=A\sin(2x+\frac{\pi}{6})$．

因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(\frac{5\pi}{6},-1)$，

所以 $f(\frac{5\pi}{6})=-1$，即 $A\sin(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=-1$， $A\sin\frac{11\pi}{6}=-1$，

所以 $A=2$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$．

（Ⅱ）因为 $x\in[0，a]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6}，2a+\frac{\pi}{6}]$，

因为 $f(x)$ 图象的对称轴只有一条落在区间 $[0，a]$ 上，

所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2a+\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}$，

得 $\frac{\pi}{6}\leqslant a<\frac{2\pi}{3}$，

所以 a 的取值范围为 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$．

17. 解：女生共有 $6+9+10+10+6+4=45$ 人

记事件 A 为“从所有调查学生中随机抽取 1 人，女生被抽到”

事件 B 为“从所有调查学生中随机抽取 1 人，参加体育活动事件在 $[50,60)$”

由题意可知，$P(A)=\frac{45}{100},P(AB)=\frac{9}{100}$

因此 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{45}{100}}=\frac{1}{5}$

所以从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，

估计该学生参加体育活动时间在 $[50,60)$ 的概率为 $\frac{1}{5}$

（2）由题知, X 的所有可能值为 0, 1, 2,

参加体育实践活动时间在 $[80,90)$ 的学生总人数为15，其中初中生10人，

参加体育实践活动时间在 $[90,100)$ 的学生总人数为12，其中初中生8人，

记事件 C 为“从参加体育活动时间在 $[80,90)$ 的学生中随机抽取 1 人, 抽到的是初中学生”, 事件 D 为“从参加体育活动时间在 $[90,100)$ 的学生中随机抽取 1 人, 抽到的是初中学生”,

由题意知, 事件 C, D 相互独立,

且 $P(C)=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}, P(D)=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$,

所以 $P(X=0)=P(\overline{C}\overline{D})=P(\overline{C})P(\overline{D})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$,

$$P(X=1)=P(C\overline{D}\cup\overline{C}D)=P(C)P(\overline{D})+P(\overline{C})P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$$P(X=2)=P(CD)=P(C)P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{9}+1\times\dfrac{4}{9}+2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{3}$.

（3）根据男女生人数先补全初中学生各区间人数：

类别 \ 人数 \ 时间		$[0,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$
性别	男	5	12	13	8	9	8
	女	6	9	10	10	6	4
学段	初中	$11-m$	8	11	11	10	8
	高中	m	13	12	7	5	4

$[50,100)$ 内初中生的总运动时间 $t_1=8\times55+11\times65+11\times75+10\times85+8\times95=3590$,

$[50,100)$ 内高中生的总运动时间 $t_2=13\times55+12\times65+7\times75+5\times85+4\times95=2825$,

$$\mu_1=\frac{1}{59-m}\left[25(11-m)+3590\right]=\frac{2390}{59-m}+25,\ \mu_2=\frac{1}{41+m}(25m+2825)=25+\frac{1800}{41+m},$$

由 $\mu_1 < \mu_2$ 可得 $\dfrac{2390}{59-m} < \dfrac{1800}{41+m}$，解得 $m=0$或1.

18.【小问 1 详解】

因为 D，C，E，F 分别是 AQ，BQ，AP，BP 的中点，

所以 $EF // AB$，$DC // AB$，所以 $EF // DC$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 PCD，$DC \subset$ 平面 PCD，

所以 $EF //$ 平面 PCD.

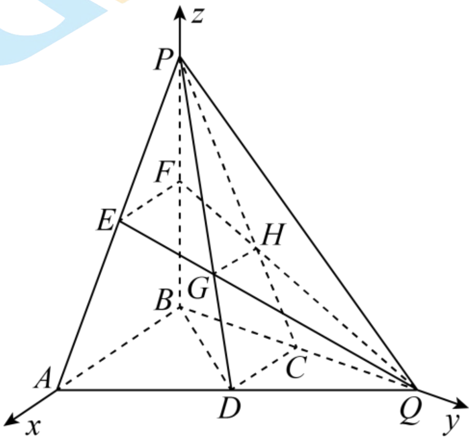
又因为 $EF \subset$ 平面 EFQ，平面 $EFQ \cap$ 平面 $PCD = GH$，

所以 $EF // GH$，又因为 $EF // AB$，所以 $AB // GH$.

【小问 2 详解】

因为 $AB \perp BQ$，$PB \perp$ 平面 ABQ，所以 BA，BQ，BP 两两垂直.

以点 B 为坐标原点，分别以 BA，BQ，BP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系. • 1



由 $BA = BP = BQ = 2$，则 $A(2,0,0), D(1,1,0), C(0,1,0), P(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AD} = (-1,1,0), \overrightarrow{DP} = (-1,-1,2)$，$\overrightarrow{CP} = (0,-1,2)$.

设平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{m}$，则可取 $\vec{m} = (0,1,0)$

设平面 PDC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x，y，z)$，

由 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$，$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$，

得 $\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$，取 $z=1$，得 $\vec{n} = (0，2，1)$.

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{0+2+0}{\sqrt{1}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以平面 PAB 与平面 PCD 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【小问 3 详解】

由点到平面的距离公式可得 $d=\frac{|\overrightarrow{PE}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|0+1+0|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

即点 E 到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

19. 【小问 1 详解】

当 $k=1$ 时，$f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x,\therefore f'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$，

故 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 $f'(0)=(0+2)\mathrm{e}^0=2$，而 $f(0)=(0+1)\mathrm{e}^0=1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $2x-y+1=0$.

小问 2 详解】

由题意得 $g(x)=f'(x)=(kx+k+1)\mathrm{e}^{kx}$，则 $g'(x)=k(kx+k+2)\mathrm{e}^{kx}$，

当 $k=0$ 时，$g(x)=1$ 为常数函数，没有单调递增区间；

当 $k>0$ 时，令 $g'(x)=k(kx+k+2)\mathrm{e}^{kx}>0$，即 $kx+k+2>0,\therefore x>-1-\frac{2}{k}$，

当 $k<0$ 时，令 $g'(x)=k(kx+k+2)\mathrm{e}^{kx}>0$，即 $kx+k+2<0,\therefore x>-1-\frac{2}{k}$，

故 $k=0$ 时，$g(x)$ 没有单调递增区间；$k\neq 0$ 时，单调递增区间为 $(-1-\frac{2}{k},+\infty)$.

【小问 3 详解】

证明：由（2）可知，当 $k>0$ 时，$g(x)=f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而

$g(0)=f'(0)=k+1>0$，

即 $f'\ \ x\ >0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

设 $h(x)=f(x+m)-f(x)$，则 $h'(x)=f'(x+m)-f'(x)$，

因为 $m\in(0,+\infty)$，则 $x+m>x$，故 $f'(x+m)>f'(x),\therefore h'(x)>0$，

所以 $h(x)=f(x+m)-f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $n\in(0,+\infty)$，

则 $h(n)>h(0)$，即 $f(n+m)-f(n)>f(m)-f(0)$，而 $f(0)=1$，

故 $f(n+m)-f(n)>f(m)-1$，即 $f(m+n)+1>f(m)+f(n)$.

20. 解：（Ⅰ）依题意，有 $\sqrt{4+b^2}=\sqrt{6}$

所以 $b=\sqrt{2}$

椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2},0),F_2(\sqrt{2},0)$,

（Ⅱ）(i)方法 1：

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{2}=1$

依题意 $x_0\neq\pm2,y_0\neq0$， $A(-2,0)$,

所以 $M(\dfrac{x_0-2}{2},\dfrac{y_0}{2})$

所以直线 PA 的斜率 $k_{Ap}=\dfrac{y_0}{x_0+2}$

因为 $PA\perp MQ$，所以 $k_{PA}\cdot k_{MQ}=-1$

所以直线 MQ 的斜率 $k_{MQ}=-\dfrac{x_0+2}{y_0}$

所以直线 MQ 的方程为 $y-\dfrac{y_0}{2}=-\dfrac{x_0+2}{y_0}(x-\dfrac{x_0-2}{2})$

令 $x=0$，得到 $y_Q=\dfrac{y_0}{2}+\dfrac{(x_0+2)(x_0-2)}{2y_0}$

因为 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{2}=1$

所以 $y_Q=-\dfrac{y_0}{2}$， 所以 $Q(0,-\dfrac{y_0}{2})$

所以H是M,Q的中点，所以点M,Q关于点H对称

方法2：

设$P(x_0,y_0)$，直线AP的方程为$y=k(x+2)$

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$

消元得$(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$

所以$\Delta=16>0$

所以$x_0+(-2)=\dfrac{-8k^2}{1+2k^2}$

所以$x_0=\dfrac{-4k^2+2}{1+2k^2}$

所以$x_M=\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}$，$y_M=k(\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}+2)=\dfrac{2k}{1+2k^2}$

所以$M(\dfrac{-4k^2}{1+2k^2},\dfrac{2k}{1+2k^2})$

因为$AP\perp MQ$，所以$K_{MQ}=-\dfrac{1}{k}$

所以直线MQ的方程为$y-\dfrac{2k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{-4k^2}{1+2k^2})$

令$x=0$，得到$y_Q=\dfrac{2k}{1+2k^2}-\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{4k^2}{1+2k^2}=\dfrac{-2k}{1+2k^2}$

所以 $Q(0,\dfrac{-2k}{1+2k^2})$

所以H是M,Q的中点，所以点M,Q关于点H对称

方法3：

设$P(x_0,y_0)$，直线AP的方程为$x=ty-2$

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=ty-2\end{cases}$

消元得，$(t^2+2)y^2-4ty=0$

因为$0+y_0=\dfrac{4t}{t^2+2}$，所以$y_0=\dfrac{4t}{t^2+2}$

所以$y_M=\dfrac{2t}{t^2+2}$ $x_M=\dfrac{-4}{t^2+2}$，

所以$M(\dfrac{-4}{t^2+2},\dfrac{2t}{t^2+2})$

因为$AP\perp MQ$，所以$K_{MQ}=-\dfrac{1}{k}$

所以直线MQ的方程为$y-\dfrac{2t}{t^2+2}=-t(x-\dfrac{-4}{t^2+2})$

令$x=0$，得到$y_Q=\dfrac{-2t}{t^2+2}$，所以$Q(0,\dfrac{-2t}{t^2+2})$

所以H是M,Q的中点，所以点M,Q关于点H对称

（ii）**方法 1**：

因为$\triangle APQ$为直角三角形，且$|PQ|=|AQ|$，所以$\triangle APQ$为等腰直角三角形

所以$|AP|=\sqrt{2}|AQ|$

因为$P(x_0,y_0)$，$Q(0,-\dfrac{y_0}{2})$

即$\sqrt{(x_0+2)^2+{y_0}^2}=\sqrt{2}\sqrt{2^2+\dfrac{{y_0}^2}{4}}$

化简，得到$3{x_0}^2+16x_0-12=0$，解得$x_0=\dfrac{2}{3},x_0=-6$（舍）

即点P的横坐标为$\dfrac{2}{3}$

方法 2：

因为$\triangle APQ$为直角三角形，且$|PQ|=|AQ|$，所以$\angle AQP=90°$，

所以$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

因为$P(x_0,y_0)$，$Q(0,-\dfrac{y_0}{2})$，

所以$\overrightarrow{AQ}=(2,-\dfrac{y_0}{2})$，$\overrightarrow{PQ}=(-x_0,-\dfrac{3y_0}{2})$

所以$(2,-\frac{y_0}{2})\cdot(-x_0,-\frac{3y_0}{2})=0$

即$-2x_0+\frac{3y_0^2}{4}=0$

因为$\frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{2}=1$

化简，得到$3x_0{}^2+16x_0-12=0$，解得$x_0=\frac{2}{3},x_0=-6$（舍）

即点P的横坐标为$\frac{2}{3}$

方法 3：

因为$\triangle APQ$为直角三角形，且$|PQ|=|AQ|$，所以$\angle AQP=90°$

所以$|AP|=2|MQ|$

因为$P(x_0,y_0)$，$Q(0,-\frac{y_0}{2})$，$M(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2})$

所以$\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}=2\sqrt{(\frac{x_0-2}{2})^2+y_0^2}$

化简得到$8x_0-3y_0^2=0$

因为$\frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{2}=1$

化简，得到$3x_0{}^2+16x_0-12=0$，解得$x_0=\frac{2}{3},x_0=-6$（舍）

即点P的横坐标为$\frac{2}{3}$

方法 4：

因为$\triangle APQ$为直角三角形，所以$\angle AQP=90°$

所以点A,P,Q都在以AP为直径的圆上，

因为$P(x_0,y_0)$，$Q(0,-\frac{y_0}{2})$，$A(-2,0)$

所以有$(x-\frac{-2+x_0}{2})^2+(y-\frac{y_0}{2})^2=(\frac{1}{2}\sqrt{(x_0+2)^2+y_0{}^2})^2$

所以 $-2x_0+\frac{3y_0^2}{4}=0$

因为 $\frac{x_0{}^2}{4}+\frac{y_0{}^2}{2}=1$

化简，得到 $3x_0{}^2+16x_0-12=0$，解得 $x_0=\frac{2}{3}, x_0=-6$（舍）

即点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$

21.解：（Ⅰ）由①，得 $2<a<6$.

由②，当 $i=2$，$j=3$，$k=4$ 时．$2a, 6a, 12$ 中至少有一个是数列 1，2，a，6 中的项，但 $6a>6$，$12>6$，故 $2a=6$，解得 $a=3$.

经检验，当 $a=3$ 时，符合题意. ………………4 分

（Ⅱ）假设 $2,3,5$ 是数列 A_n 中的项，由②可知：6，10，15 中至少有一个是数列 A_n 中的项，则有限数列 A_n 的最后一项 $a_n>5$，且 $n\geq 4$.

由①，$a_n>a_{n-1}>a_{n-2}>a_{n-3}>1$. ………………5 分

对于数 a_{n-2}, a_{n-1}, a_n，由②可知：$a_{n-2}a_{n-1}=a_n$；对于数 a_{n-3}, a_{n-1}, a_n，由②可知：$a_{n-3}a_{n-1}=a_n$. ………………6 分

所以 $a_{n-2}=a_{n-3}$，这与①矛盾.

所以 $2,3,5$ 不可能是数列 A_n 中的项. ………………8 分

（Ⅲ）n 的最大值为 9，证明如下： ………………9 分

（1）令 $A_9: -4,-2,-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{2},1,2$，则 A_9 符合①、②. ………………12 分

（2）设 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n (n\geq 3)$ 符合①、②，则：

（ⅰ）A_n 中至多有三项，其绝对值大于 1.

假设 A_n 中至少有四项，其绝对值大于 1，不妨设 a_i，a_j，a_k，a_l 是 A_n 中绝对值最大的四项，其中 $1<|a_i|\leq|a_j|\leq|a_k|\leq|a_l|$.

则对 a_i，a_k，a_l 有 $|a_ia_l|>|a_l|$，$|a_ka_l|>|a_l|$，故 a_ia_l，a_ka_l 均不是数列 A_n 中的项，即 a_ia_k 是数列 A_n 中的项.

同理：a_ja_k 也是数列 A_n 中的项.

但 $|a_ia_k|>|a_k|$，$|a_ja_k|>|a_k|$.

所以 $a_ia_k=a_ja_k=a_l$.

所以 $a_i=a_j$，这与①矛盾.

（ⅱ）A_n 中至多有三项，其绝对值大于 0 且小于 1.

假设 A_n 中至少有四项，其绝对值大于 0 且小于 1，类似（ⅰ）得出矛盾.

（ⅲ）A_n 中至多有两项绝对值等于 1.

（ⅳ）A_n 中至多有一项等于 0.

综合（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ），（ⅳ）可知 A_n 中至多有 9 项.

………………15 分

由（1），（2）可得，n 的最大值为 9.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！