名校联考联合体 2024 届高三第三次联考

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	B	C	B	D	A	C	AC	ACD	BCD	ABD

一、选择题（本大题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分.）

1. B 【解析】因为 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid(x+4)(x-3)<0\}=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，又 $A=\{0,1,2\}$，所以 $\complement_U A=\{-3,-2,-1\}$，故选 B.

2. A 【解析】由已知 $z=\dfrac{-2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}^2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$，故选 A.

3. B 【解析】从散点图中可知，删除点 B 后，样本数据的两变量 x,y 负相关，所以 A 错误；由于 B 点较其他点偏离程度大，故去掉 B 点后，回归效果更好，从而相关系数 r 的绝对值更接近于 1，所以 B 正确；同理决定系数 R^2 越接近于 1，所以新样本的残差平方和变小，所以 C 错误；从而解释变量 x 与响应变量 y 相关性增强，所以 D 错误. 故选 B.

4. C 【解析】函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度得 $y=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

所以 $g(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以 $g\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

5. B 【解析】设事件 A="甲猜对"，B="乙猜对"，C="'几何队'至少猜对一个成语"，

所以 $P(A)=\dfrac{4}{5}$，$P(B)=\dfrac{3}{4}$，$P(\bar{A})=\dfrac{1}{5}$，$P(\bar{B})=\dfrac{1}{4}$，

则 $C=\bar{A}B\cup A\bar{B}\cup AB$，由事件的独立性与互斥性，

得 $P(C)=P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})+P(AB)=P(\bar{A})P(B)+P(A)P(\bar{B})+P(A)P(B)$

$=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{19}{20}$，故选 B.

另解：$P(C)=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{19}{20}$.

6. D 【解析】因为 $f(x)=(x^2-x+1)\mathrm{e}^x$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $f'(x)=(x^2+x)\mathrm{e}^x=x(x+1)\mathrm{e}^x$.

当 $x>0$ 或 $x<-1$ 时 $f'(x)>0$，当 $-1<x<0$ 时 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，$f(x)_{极小值}=f(0)=\mathrm{e}^0=1$. 故选 D.

7. A 【解析】若 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，由向量的线性运算法则，

可得 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

因为 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，$\mu=\dfrac{2}{3}$，所以 $\mu-\lambda=\dfrac{1}{3}$，所以 P 是 Q 的充分条件；

若 $\mu-\lambda=\dfrac{1}{3}$，得 $\mu=\lambda+\dfrac{1}{3}$，代入 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，得 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BA}+\left(\lambda+\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=-\lambda\overrightarrow{AB}+\left(\lambda+\dfrac{1}{3}\right)(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，得 $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{2}{3}-2\lambda\right)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{1}{3}+\lambda\right)\overrightarrow{AC}$，

当 $\lambda\neq\dfrac{1}{3}$ 时，$\dfrac{2}{3}-2\lambda\neq0$，此时 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$ 不成立，所以 P 不是 Q 的必要条件. 故选 A.

8. C 【解析】由题可知 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_2=2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}$，$a_3=2^2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}$，$a_4=2^3\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}$，

由此可知 $a_n=2^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，所以 $b_n=n^2a_n=\dfrac{1}{2}n^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，

因为 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2}(n+1)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{2}n^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left[\dfrac{2}{3}(n+1)^2-n^2\right]=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n(-n^2+4n+2)$，

令 $-n^2+4n+2=0$，解得 $n_1=2+\sqrt{6}$，$n_2=2-\sqrt{6}$（舍），

由此可知 $n\leqslant4$ 时 $b_{n+1}-b_n>0$；$n\geqslant5$ 时 $b_{n+1}-b_n<0$，故 b_5 的取值最大，故选 C.

二、选择题（本大题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分.）

9. AC 【解析】选项 A 正确；当 $c=0$ 时，$a|c|=b|c|$，故选项 B 错误；

因为 $a>b>0$，所以 $\dfrac{b+c^2}{a+c^2}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{(a-b)c^2}{a(a+c^2)}\geqslant0$，所以 $\dfrac{b}{a}\leqslant\dfrac{b+c^2}{a+c^2}$，故选项 C 正确；

因为 $a<b<0$，所以 $|a|>|b|>0$，所以 $a^2>b^2$，故选项 D 错误.

故选 AC.

10. ACD 【解析】$(1+x)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^r(r=0,1,2,\cdots,6)$，所以 $a_0=-2\times C_6^0=-2$，故选项 A 正确；又 $T_4=20x^3$，$T_3=15x^2$，从而 $(3x-2)(1+x)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 $3\times15+(-2)\times20=5$，故选项 B 错误；

令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=(3\times1-2)\cdot(1+1)^6=64$，

令 $x=-1$，得 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_7=0$，

两式相减得 $2(a_1+a_3+a_5+a_7)=64$，所以 $a_1+a_3+a_5+a_7=32$，故选项 C 正确；

令 $x=2$ 得 $a_0+2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^7a_7=(3\times2-2)\cdot(1+2)^6=2916$，故选项 D 正确；故选 ACD.

11. BCD 【解析】显然选项 A 错误；

设平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2^2-2\times4\cos\theta=0$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，故选项 B 正确；

因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=2\sqrt{3}$，故选项 C 正确；

设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，由已知 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，$OA\perp AB$，

因为 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，所以 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$，可知点 C 在以点 B 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆上，

所以 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{AC}|\in[\sqrt{3},3\sqrt{3}]$，故选项 D 正确. 故选 BCD.

12. ABD 【解析】因为 $f(2x+1)$ 是偶函数，所以 $f(-2x+1)=f(2x+1)$，则 $f(-x+1)=f(x+1)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，由 $f(-2x+1)=f(2x+1)$ 两边求导得 $-2f'(-2x+1)=2f'(2x+1)$，所以 $f'(2x+1)=-f'(-2x+1)$，得 $f'(x)=-f'(2-x)$，所以函数 $f'(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，故选项 A 正确；

令 $x=1$ 得 $f'(1)=-f'(1)$，所以 $f'(1)=0$，因为函数 $f'(x+2)$ 为偶函数，所以 $f'(x+2)=f'(-x+2)$，

所以 $f'(x)=f'(4-x)$，所以函数 $f'(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称，

所以函数 $f'(x)$ 的周期为 $T=4|2-1|=4$，所以选项 B 正确；

又因为 $f'(4-x)=-f'(2+x)$，所以函数 $f'(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，所以选项 C 错误；

因为 $f'(x)=f'(4-x)$，所以 $f'(1)=f'(3)=0$，又因为 $f'(x)=-f'(2-x)$，所以 $f'(0)+f'(2)=0$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{2023}f'(i)=f'(1)+f'(2)+f'(3)=8$，所以选项 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. $\dfrac{\pi}{6}$ 【解析】由题意得 $2\sin\alpha\cos\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha$，又 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha>0$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

14. 8 【解析】因为 $2a+b-ab=0$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$. 因为 $a>0,b>0$，所以 $2a+b=(2a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}+2\geqslant 4+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{4a}{b}}=8$，当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4a}{b}$，即 $a=2,b=4$ 时等号成立. 所以 $2a+b$ 的最小值为 8.

15. 312 【解析】门卡标有偶数数字包含 2,4,6，奇数数字包含 1,3,5,7，若四位游客都没有拿到偶数数字门卡共有 $A_4^4=24$ 种；若四位游客中一个拿到偶数数字门卡，三个拿到奇数数字门卡，有 $C_3^1C_4^3A_4^4=288$ 种. 故共有 $24+288=312$ 种.

16. $a<3b$ 【解析】因为 $3^a=27^b+\log_3\dfrac{b}{a}$，所以 $3^a+\log_3 a=3^{3b}+\log_3 3b-1<3^{3b}+\log_3 3b$，

设 $f(x)=3^x+\log_3 x(x>0)$，又因为 $y=3^x$ 与 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)=3^x+\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $f(a)<f(3b)$，所以 $a<3b$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.【解析】(1) 因为 $\sin A-2\sin^2\dfrac{A}{2}=\sqrt{2}-1$，所以 $\sin A-(1-\cos A)=\sqrt{2}-1$，

即 $\sin A+\cos A=\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，即 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$， ………………………… 3 分

又 $0<A<\pi$，所以 $\dfrac{\pi}{4}<A+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5\pi}{4}$，所以 $A+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，得 $A=\dfrac{\pi}{4}$. ………………………… 5 分

(2) 由题意 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times3c\times\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}c=6$，所以 $c=4\sqrt{2}$， ………………………… 7 分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3^2+(4\sqrt{2})^2-2\times3\times4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=17$，

所以 $a=\sqrt{17}$. ………………………… 10 分

18.【解析】(1)2×2 列联表补充如下：

	选物理类	选历史类	合计
男生	35	15	50
女生	25	25	50
合计	60	40	100

零假设为 H_0：选科分类与性别无关联，

因为 $\chi^2=\dfrac{100\times(35\times25-25\times15)^2}{60\times40\times50\times50}=\dfrac{25}{6}\approx4.167>3.841=x_{0.05}$， ………………………… 4 分

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，

即认为选科分类与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.05. ………………………… 5 分

(2)由已知，50 名女学生中选择物理类和选择历史类的比例为 1∶1，

因此抽取 6 名女生中，选择物理类和选择历史类的人数均为 3 名.

所以随机变量 X 的取值为 1,2,3. ………………………… 7 分

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^3}{C_6^4}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_3^1}{C_6^4}=\dfrac{1}{5}$， ………………………… 10 分

所以随机变量 X 的分布列如下表：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

………………………… 11 分

所以 $E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$. ………………………… 12 分

19.【解析】(1)由已知当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$， ………………………… 1 分

由已知 $S_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n\geqslant2$ 时 $S_{n-1}=(n-1)^2$，

两式相减得 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geqslant2)$， ………………………… 3 分

又当 $n=1$ 时，$a_1=1$，满足 $a_n=2n-1$，

所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………… 4 分

(2)由已知 $b_n\neq0$，且 $b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，得 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，

又 $b_1=2,b_2=4$，所以 $\dfrac{b_2}{b_1}=2$，所以 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=\cdots=\dfrac{b_2}{b_1}=2(n\geqslant2)$， ………………………… 7 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且首项为 2，公比为 2，

所以 $b_n=2\times2^{n-1}=2^n$. ………………………… 8 分

因为 $c_n=a_n+(-1)^nb_n=2n-1+(-1)^n2^n=2n-1+(-2)^n$，

所以 $T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+[(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n]$

$=\dfrac{(1+2n-1)n}{2}+\dfrac{-2[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=n^2-\dfrac{1}{3}(-2)^{n+1}-\dfrac{2}{3}$. ………………………… 12 分

20.【解析】(1)由已知 $\angle ABC=120^\circ$，$AB=BC=2$，得 $\angle BAC=30^\circ$，

所以 $AC=2AB\cos30^\circ=2\sqrt{3}$. ………………………… 2 分

在 $\triangle ACD$ 中，因为 $BC\perp CD$，$\angle BCA=30^\circ$，所以 $\angle ACD=60^\circ$，又 $AD=6$， ………………………… 3 分

由正弦定理得 $\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，得 $\sin\angle ADC=\dfrac{AC\sin\angle ACD}{AD}=\dfrac{2\sqrt{3}\sin60^\circ}{6}=\dfrac{1}{2}$，

又 $0^\circ<\angle ADC<60^\circ$，所以 $\angle ADC=30^\circ$. ………………………… 5 分

(2)在 $\triangle ABC$ 中，由已知 $AB=BC=2$，$\angle ABC=\theta$，$120^\circ\leqslant\theta<180^\circ$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\theta=2\sin\theta$， ………………………… 6 分

由余弦定理 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=2^2+2^2-2\times2\times2\cos\theta$

$=8-8\cos\theta$， ………………………… 7 分

在 $\triangle ACD$ 中，因为 $\angle ACD=90^\circ-\angle ACB=90^\circ-\dfrac{180^\circ-\theta}{2}=\dfrac{\theta}{2}$，

又 $2CD\cdot\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}AC$，所以 $CD=\dfrac{\sqrt{3}AC}{2\sin\frac{\theta}{2}}$，……………………………………………………… 8 分

所以 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD=\frac{1}{2}AC\cdot\dfrac{\sqrt{3}AC}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cos\theta$，……………………………………………………… 10 分

所以四边形 $ABCD$ 的面积 $S(\theta)=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=2\sin\theta+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cos\theta=2\sqrt{3}+4\sin(\theta-60^\circ)$，………… 11 分

因为 $120^\circ\leqslant\theta<180^\circ$，所以 $60^\circ\leqslant\theta-60^\circ<120^\circ$，当 $\theta-60^\circ=90^\circ$，即 $\theta=150^\circ$ 时，$S(\theta)_{\max}=2\sqrt{3}+4$，

故四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}+4$. ……………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设 A_1：第一次去 A 滑雪场，A_2：第二次去 A 滑雪场，B_1：第一次去 B 滑雪场，B_2：第二次去 B 滑雪场，

所以 $P(A_1)=0.4$，$P(B_1)=0.6$，……………………………………………………… 1 分

$P(A_2|A_1)=0.6$，$P(A_2|B_1)=0.5$，……………………………………………………… 2 分

所以 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)$ ……………………………………………… 3 分

$=0.4\times0.6+0.6\times0.5=0.54$. ……………………………………………………… 5 分

(2)由已知 $X=4.5$ 或 $X=3.6$. ……………………………………………………… 6 分

因为第一场比赛由“飞雪”队的乙与甲进行，

所以“飞雪”队获胜的概率为 $P_1=\frac{1}{3}\times p+\frac{2}{3}\times p\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}p$，………………………………………… 7 分

甲获胜的概率为 $P_2=\frac{2}{3}\times(1-p)+\frac{1}{3}\times(1-p)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}p$，……………………………………… 8 分

所以非平局的概率为 $P(X=4.5)=P_1+P_2=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$，……………………………………………… 9 分

平局的概率为 $P(X=3.6)=1-P_1-P_2=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$. ……………………………………………… 10 分

随机变量 X 的分布列为：

X	4.5	3.6
P	$\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$

随机变量 X 的数学期望为 $E(X)=4.5\times\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p\right)+3.6\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p\right)=4.4-0.3p$(万元)，

又 $\frac{1}{3}<p<\frac{1}{2}$，所以 $E(X)$ 的取值范围为 $(4.25,4.3)$(单位：万元). ……………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=2\ln x-ax+1=0$，得 $a=\dfrac{2\ln x+1}{x}$，

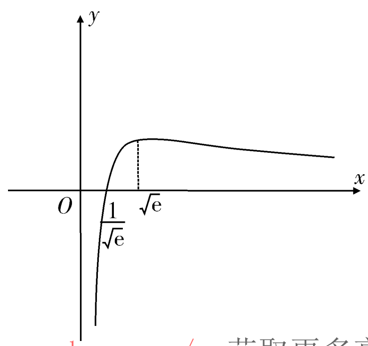
令函数 $u(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x}$，$u'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^2}$，……………………………………………… 1 分

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$u'(x)>0$，函数 $u(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，当 $x>\sqrt{e}$ 时，$u'(x)<0$，函数 $u(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 单调递减，

所以 $u(x)_{\max}=u(\sqrt{e})=\frac{2}{\sqrt{e}}=\frac{2\sqrt{e}}{e}$，……………………………………………… 2 分

因为 $u\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+2\ln x}{x}\to-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2\ln x}{x}=0$，……………………………………… 3 分

可知函数 $u(x)$ 的图象如下所示：



所以当 $a>\frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 0 个，当 $a\leqslant 0$ 或 $a=\frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 1 个，

当 $0<a<\frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 2 个. ………………………………………………………… 5 分

(2) 由题设方程 $f(x)=g(x)$，即 $2\ln x-ax+1=e^{ax}-ex^2$，

所以 $ax+e^{ax}=2\ln x+ex^2+1=\ln ex^2+e^{\ln ex^2}$，

令 $\varphi(x)=x+e^x$，得 $\varphi(ax)=\varphi(\ln ex^2)$，………………………………………………………… 6 分

又 $\varphi'(x)=1+e^x>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $ax=\ln ex^2$，即 $ax=1+2\ln x$，

由已知，方程 $ax=1+2\ln x$ 有两个实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

即 $a=\frac{1+2\ln x}{x}$ 有两个实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，由(1)得 $\frac{1}{\sqrt{e}}<x_1<\sqrt{e}<x_2$. ………………………… 7 分

令 $\frac{1}{x_1}=t_1,\frac{1}{x_2}=t_2\left(0<t_2<\frac{1}{\sqrt{e}}<t_1<\sqrt{e}\right)$，所以 $\begin{cases}a=t_1-2t_1\ln t_1,\\a=t_2-2t_2\ln t_2,\end{cases}$

令 $h(t)=t-2t\ln t(t>0)$，所以 $h(t)=a$ 有两个实根 t_1,t_2，………………………………………… 8 分

先证 $t_1+t_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$.

因为 $h'(t)=-1-2\ln t$，令 $h'(t)>0$，解得 $0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}$，令 $h'(t)<0$，解得 $t>\frac{1}{\sqrt{e}}$，

所以 $h(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 上单调递减，要证 $t_1+t_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$，即证 $t_1>\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2$，

因为 $t_1>\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2>\frac{1}{\sqrt{e}}$，$h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 上单调递减，只需证 $h(t_1)<h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2\right)$，

即证 $h(t_2)<h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2\right)$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

令 $F(t)=h(t)-h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)\left(0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，

$F'(t)=h'(t)+h'\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)=-1-2\ln t-1-2\ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)=-2-2\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)\right]$，

因为 $t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)=-t^2+\frac{2t}{\sqrt{e}}\left(0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，令 $k(t)=-t^2+\frac{2t}{\sqrt{e}}\left(0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，

可知函数 $k(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上单调递增，所以 $0<t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)<\frac{1}{e}$，所以 $\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)\right]<-1$，

所以 $-2-2\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)\right]>0$，即 $F'(t)>0$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上恒成立，………………………… 10 分

所以 $F(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上单调递增，所以 $F(t)<F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=0$，所以 $h(t_2)<h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2\right)$ 成立，

即 $h(t_1)<h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2\right)$ 成立，又 $t_1>\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2>\frac{1}{\sqrt{e}}$，且 $h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $t_1>\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2$，所以 $t_1+t_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$，即 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{\sqrt{e}}$，所以 $\frac{1}{x_2}>\frac{2}{\sqrt{e}}-\frac{1}{x_1}$，

所以 $x_1-\frac{1}{x_2}<x_1+\frac{1}{x_1}-\frac{2}{\sqrt{e}}<\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}$，即 $x_1-\sqrt{e}<\frac{1}{x_2}-\frac{1}{\sqrt{e}}$. ………………………………… 12 分