绝密★启封并使用完毕前

2010 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（文）（北京卷）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1．（5 分）集合 $P=\{x\in Z|0\leqslant x<3\}$，$M=\{x\in Z|x^2<9\}$，则 $P\cap M=$（　　）

A．{1，2}　　B．{0，1，2}　　C．$\{x|0\leqslant x<3\}$　　D．$\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$

2．（5 分）在复平面内，复数 $6+5i$，$-2+3i$ 对应的点分别为 A，B．若 C 为线段 AB 的中点，则点 C 对应的复数是（　　）

A．$4+8i$　　B．$8+2i$　　C．$2+4i$　　D．$4+i$

3．（5 分）从{1，2，3，4，5}中随机选取一个数为 a，从{1，2，3}中随机选取一个数为 b，则 $b>a$ 的概率是（　　）

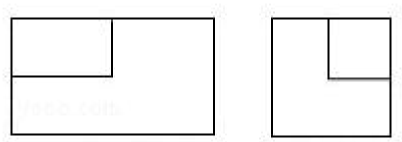
A．$\frac{4}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{1}{5}$

4．（5 分）若 $\vec{a}$，$\vec{b}$是非零向量，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$，则函数 $f(x)=(x\vec{a}+\vec{b})(x\vec{b}-\vec{a})$ 是（　　）

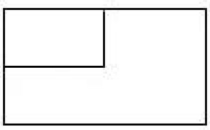
A．一次函数且是奇函数　　B．一次函数但不是奇函数

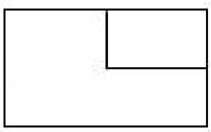
C．二次函数且是偶函数　　D．二次函数但不是偶函数

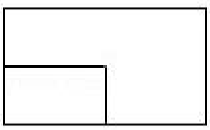
5．（5 分）一个长方体去掉一个小长方体，所得几何体的正视图与侧（左）视图分别如图所示，则该几何体的俯视图为（　　）

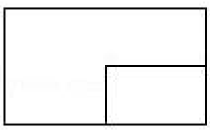


正（主）视图　　侧(左)视图

A．

B．

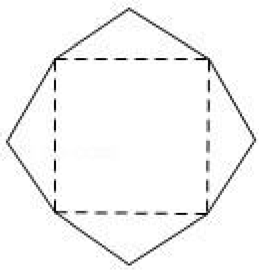
C．

D．

6. （5 分）给定函数① $y=x^{\frac{1}{2}}$，② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，③$y=|x-1|$，④$y=2^{x+1}$，其中在区间（0，1）上单调递减的函数序号是（　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

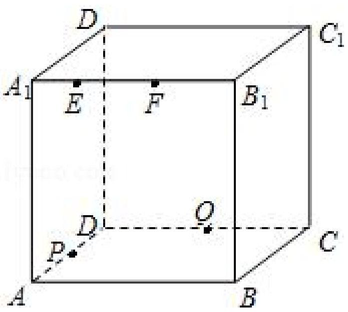
7. （5 分）某班设计了一个八边形的班徽（如图），它由腰长为 1，顶角为 α 的四个等腰三角形，及其底边构成的正方形所组成，该八边形的面积为（　　）



A. $2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$　　B. $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+3$

C. $3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+1$　　D. $2\sin\alpha-\cos\alpha+1$

8. （5 分）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，动点 E、F 在棱 A_1B_1 上．点 Q 是 CD 的中点，动点 P 在棱 AD 上，若 $EF=1$，$DP=x$，$A_1E=y$（x，y 大于零），则三棱锥 $P-EFQ$ 的体积（　　）



A. 与 x，y 都有关　　B. 与 x，y 都无关

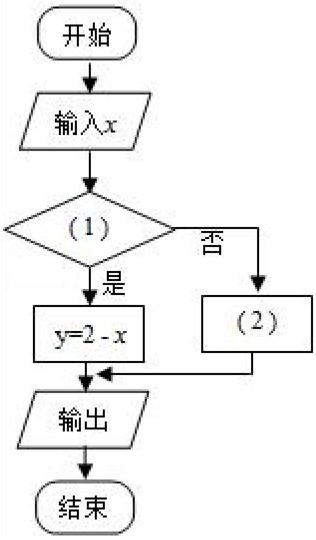
C. 与 x 有关，与 y 无关　　D. 与 y 有关，与 x 无关

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

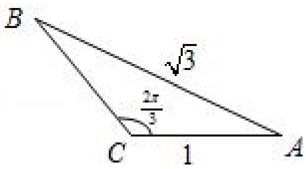
9. （5 分）已知函数 $y=\begin{cases}\log_2 x, & x\geqslant 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$，如图表示的是给定 x 的值，求其对应的函数值 y 的程序框图，

①处应填写_______；

②处应填写_______．

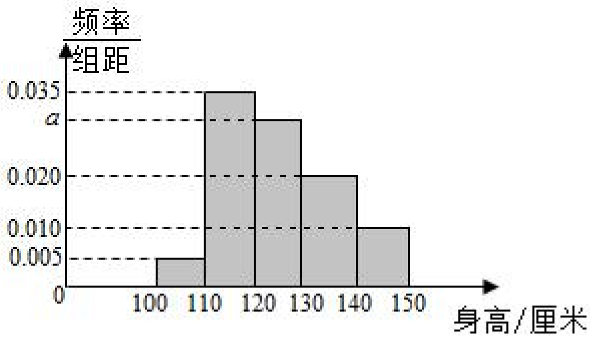


10. （5 分）在△ABC中，若 $b=1$，$c=\sqrt{3}$，$\angle C=\frac{2\pi}{3}$，则 $a=$_______.



11. （5 分）若点 p（m，3）到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离为 4，且点 p 在不等式 $2x+y<3$ 表示的平面区域内，则 m =_______.

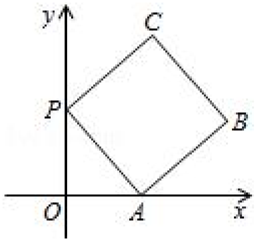
12. （5 分）从某小学随机抽取 100 名同学，将他们身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图（如图）．由图中数据可知 $a=$_______．若要从身高在[120，130），[130，140），[140，150]三组内的学生中，用分层抽样的方法选取 18 人参加一项活动，则从身高在[140，150]内的学生中选取的人数应为_______.



13. （5 分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为 2，焦点与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点相同，那么双曲线的焦点坐标为_______；渐近线方程为_______.

14. （5 分）（北京卷理 14）如图放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动．设顶点 P（x，y）的轨迹方程是 $y=f$（x），则 f（x）的最小正周期为_______；$y=f$（x）在其两个相邻零点间的图象与 x 轴所围区域的面积为_

说明："正方形 $PABC$ 沿 X 轴滚动"包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动．沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转，当顶点 B 落在 x 轴上时，再以顶点 B 为中心顺时针旋转，如此继续．类似地，正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动．



三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

15．（13 分）已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2 x-4\cos x$．

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最大值和最小值．

16．（3 分）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_3=-6$，$a_6=0$．

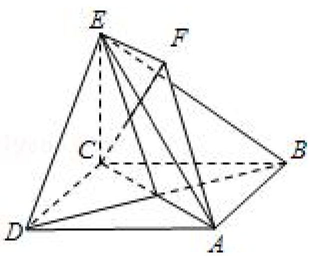
（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-8$，$b_2=a_1+a_2+a_3$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和公式．

17．（13 分）如图，正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直．$EF/\!/AC$，$AB=\sqrt{2}$，$CE=EF=1$．

（Ⅰ）求证：$AF/\!/$ 平面 BDE；

（Ⅱ）求证：$CF\perp$ 平面 BDE．



18．（14 分）设定函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3+bx^2+cx+d$（$a>0$），且方程 $f'(x)-9x=0$ 的两个根分别为 1，4．

（Ⅰ）当 $a=3$ 且曲线 $y=f(x)$ 过原点时，求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无极值点，求 a 的取值范围．

19. （14 分）已知椭圆 C 的左、右焦点坐标分别是 $(-\sqrt{2},\ 0)$，$(\sqrt{2},\ 0)$，离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，直线 $y=t$ 椭圆 C 交与不同的两点 M，N，以线段为直径作圆 P，圆心为 P.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若圆 P 与 x 轴相切，求圆心 P 的坐标；

（Ⅲ）设 Q（x，y）是圆 P 上的动点，当 t 变化时，求 y 的最大值.

20. （13 分）已知集合 $S_n=\{X|X=(x_1，x_2，\cdots，x_n)，x_i\in\{0，1\}，i=1，2，\cdots，n\}$（$n\geq2$）对于 $A=(a_1，a_2，\cdots a_n，)$，$B=(b_1，b_2，\cdots b_n，)\in S_n$，定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|，|a_2-b_2|，\cdots，|a_n-b_n|)$；

A 与 B 之间的距离为 $d(A，B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.

（Ⅰ）当 $n=5$ 时，设 $A=(0，1，0，0，1)$，$B=(1，1，1，0，0)$，求 $d(A，B)$；

（Ⅱ）证明：$\forall A，B，C\in S_n$，有 $A-B\in S_n$，且 $d(A-C，B-C)=d(A，B)$；

（Ⅲ）证明：$\forall A，B，C\in S_n$，$d(A，B)$，$d(A，C)$，$d(B，C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

数学试题答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1. 【分析】由题意集合 $P=\{x\in Z|0\leqslant x<3\}$，$M=\{x\in Z|x^2<9\}$，分别解出集合 P，M，从而求出 $P\cap M$.

【解答】解：∵集合 $P=\{x\in Z|0\leqslant x<3\}$，

∴$P=\{0，1，2\}$，

∵$M=\{x\in Z|x^2<9\}$，

∴$M=\{-2，-1，0，1，2\}$，

∴$P\cap M=\{0，1，2\}$，

故选：B.

【点评】此题考查简单的集合的运算，集合在高考的考查是以基础题为主，题目比较容易，复习中我们应从基础出发.

2. 【分析】根据两个复数对应的点的坐标分别为 A（6，5），B（-2，3），确定中点坐标为 C（2，4）得到答案.

【解答】解：两个复数对应的点的坐标分别为 A（6，5），B（-2，3），则其中点的坐标为 C（2，4），

故其对应的复数为 $2+4i$.

故选：C.

【点评】本题考查复平面的基本知识及中点坐标公式．求解此类问题要能够灵活准确的对复平面内的点的坐标与复数进行相互转化.

3. 【分析】由题意知本题是一个古典概型，试验包含的所有事件根据分步计数原理知共有 5×3 种结果，而满足条件的事件是 $a=1$，$b=2$；$a=1$，$b=3$；$a=2$，$b=3$ 共有 3 种结果.

【解答】解：由题意知本题是一个古典概型，

∵试验包含的所有事件根据分步计数原理知共有 5×3 种结果，

而满足条件的事件是 $a=1$，$b=2$；$a=1$，$b=3$；$a=2$，$b=3$ 共有 3 种结果，

∴由古典概型公式得到 $P=\frac{3}{5\times 3}=\frac{1}{5}$，

故选：D.

【点评】本题考查离散型随机变量的概率问题，先要判断该概率模型是不是古典概型，再要找出随机事件 A 包含的基本事件的个数和试验中基本事件的总数．

4．【分析】$f(x)=x\vec{b}^2-x\vec{a}^2$，因为$|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$，所以 $f(x)=(\vec{b}^2-\vec{a}^2)x$，所以函数 $f(x)$ 是一次函数且是奇函数．

【解答】解：∵ $\vec{a}\perp\vec{b}$，∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

∴$f(x)=(x\vec{a}+\vec{b})(x\vec{b}-\vec{a})=x\vec{b}^2-x\vec{a}^2$，

∵$|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$，

∴所以 $f(x)=(\vec{b}^2-\vec{a}^2)x$

所以函数 $f(x)$ 是一次函数且是奇函数

故选：A．

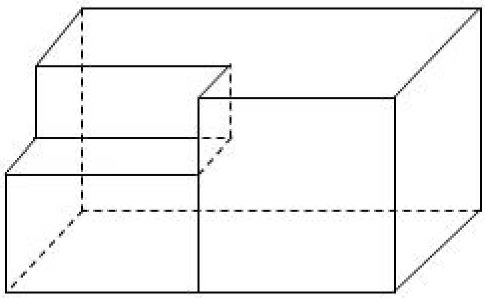
【点评】本题主要考查平面向量的数量积运算和函数的奇偶性．求解中要明确两向量互相垂直等价于二者点乘等于 0．

5．【分析】从正视图和侧视图上分析，去掉的长方体的位置应该在的方位，然后判断俯视图的正确图形．

【解答】解：由正视图可知去掉的长方体在正视线的方向，从侧视图可以看出去掉的长方体在原长方体的左侧，

由以上各视图的描述可知其俯视图符合 C 选项．

故选：C．



【点评】本题考查几何体的三视图之间的关系，要注意记忆和理解“长对正、高平齐、宽相等”的含义．

6．【分析】本题所给的四个函数分别是幂函数型，对数函数型，指数函数型，含绝对值函数型，在解答时需要熟悉这些函数类型的图象和性质；① $y=x^{\frac{1}{2}}$ 为增函数，② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 为定义域上的减函数，③$y=|x-1|$有两个单调区间，一增区间一个减区间，④$y=2^{x+1}$ 为增函数．

【解答】解：①是幂函数，其在（0，+∞）上即第一象限内为增函数，故此项不符合要求；

②中的函数是由函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 向左平移 1 个单位长度得到的，因为原函数在（0，+∞）内为减函数，故此项符合要求；

③中的函数图象是由函数 $y=x-1$ 的图象保留 x 轴上方，下方图象翻折到 x 轴上方而得到的，故由其图象可知该项符合要求；

④中的函数图象为指数函数，因其底数大于 1，故其在 R 上单调递增，不合题意.

故选：B.

【点评】本题考查了函数的单调性，要注意每类函数中决定单调性的元素所满足的条件.

7. 【分析】根据正弦定理可先求出 4 个三角形的面积，再由三角面积公式可求出正方形的边长进而得到面积，最后得到答案.

【解答】解：由正弦定理可得 4 个等腰三角形的面积和为：$4\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\alpha=2\sin\alpha$

由余弦定理可得正方形边长为：$\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\alpha}=\sqrt{2-2\cos\alpha}$

故正方形面积为：$2-2\cos\alpha$

所以所求八边形的面积为：$2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$

故选：A.

【点评】本题考查了三角面积公式的应用和余弦定理的应用．正、余弦定理是考查解三角形的重点，是必考内容.

8. 【分析】通过观察，发现点 P 到平面 EFQ 的距离是 P 到平面 CDA_1B_1 的距离，此距离只与 x 有关，面积 EFQ 为定值，推出结果.

【解答】解：三棱锥 $P-EFQ$ 的体积与点 P 到平面 EFQ 的距离和三角形 EFQ 的面积有关，

由图形可知，平面 EFQ 与平面 CDA_1B_1 是同一平面，故点 P 到平面 EFQ 的距离是 P 到平面 CDA_1B_1 的距离，且该距离就是 P 到线段 A_1D 的距离，此距离只与 x 有关，

因为 $EF=1$，点 Q 到 EF 的距离为线段 B_1C 的长度，为定值，

综上可知所求三棱锥的体积只与 x 有关，与 y 无关.

故选：C.

【点评】本题考查空间几何体的结构特征和棱锥的体积问题，同时考查学生分析问题的能力以及空间想象能力.

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9．【分析】由题目可知：该程序的作用是计算分段函数 $y=\begin{cases}\log_2 x, & x\geqslant 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$ 的值，由于分段函数的分类标准是 x 是否大于 2，而满足条件时执行的语句为 $y=2-x$，易得条件语句中的条件①，及不满足条件时②中的语句．

【解答】解：由题目可知：该程序的作用是

计算分段函数 $y=\begin{cases}\log_2 x, & x\geqslant 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$ 的值，

由于分段函数的分类标准是 x 是否大于 2，

而满足条件时执行的语句为 $y=2-x$，

易得条件语句中的条件为 $x<2$

不满足条件时②中的语句为 $y=\log_2 x$

故答案为：$x<2$，$y=\log_2 x$．

【点评】要求条件结构对应的函数解析式，要分如下几个步骤：

①分析流程图的结构，分析条件结构是如何嵌套的，以确定函数所分的段数；

②根据判断框中的条件，设置分类标准；

③根据判断框的“是”与“否”分支对应的操作，分析函数各段的解析式；

④对前面的分类进行总结，写出分段函数的解析式．

10．【分析】先根据 b，c，$\angle c$，由正弦定理可得 $\sin B$，进而求得 B，再根据正弦定理求得 a．

【解答】解：在△ABC 中由正弦定理得 $\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，

$\therefore \sin B=\dfrac{1}{2}$，

$\because b<c$，

故 $B=\dfrac{\pi}{6}$，则 $A=\dfrac{\pi}{6}$

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\therefore a=\dfrac{b}{\sin B}\sin A=1$

故答案为：1

【点评】本题考查了应用正弦定理求解三角形问题．属基础题．

11．【分析】由点 M 到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离等于 4 求得 m 的值，代入不等式 $2x+y<3$ 验证后得答案．

【解答】解：∵点 M（m，3）到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离为 4，

$\therefore d=\dfrac{|4m-3\times3+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$，

解得：$m=7$ 或 $m=-3$．

当 $m=7$ 时，$2\times7+3<3$ 不成立；

当 $m=-3$ 时，$2\times(-3)+3<3$ 成立．

综上：$m=-3$．

故答案为：-3．

【点评】本题考查了点到直线的距离公式，考查了二元一次不等式表示的平面区域，是基础题．

12．【分析】欲求 a，可根据直方图中各个矩形的面积之和为 1，列得一元一次方程，解出 a，欲求选取的人数，可先由直方图找出三个区域内的学生总数，及其中身高在[140，150]内的学生人数，再根据分层抽样的特点，代入其公式求解．

【解答】解：∵直方图中各个矩形的面积之和为 1，

$\therefore 10\times(0.005+0.035+a+0.02+0.01)=1$，

解得 $a=0.03$．

由直方图可知三个区域内的学生总数为 $100\times10\times(0.03+0.02+0.01)=60$ 人．

其中身高在[140，150]内的学生人数为 10 人，

所以身高在[140，150]范围内抽取的学生人数为 $\dfrac{18}{60}\times10=3$ 人．

故答案为：0.03，3．

【点评】本题考查频率分布直方图的相关知识．直方图中的各个矩形的面积代表了频率，所以各个矩形面积之和为 1．同时也考查了分层抽样的特点，即每个层次中抽取的个体的概率都是相等的，都等于$\frac{样本容量}{总体个数}$．

13．【分析】先根据椭圆的方程求出焦点坐标，得到双曲线的 c 值，再由离心率求出 a 的值，最后根据 $b=\sqrt{c^2-a^2}$得到 b 的值，可得到渐近线的方程．

【解答】解：∵椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点为（4，0）（－4，0），故双曲线中的 $c=4$，且满足$\frac{c}{a}=2$，故 $a=2$，

$b=\sqrt{c^2-a^2}=2\sqrt{3}$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{3}x$

故答案为：（4，0），（－4，0）；$y=\pm\sqrt{3}x$

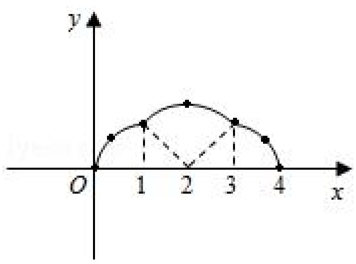
【点评】本题主要考查圆锥曲线的基本元素之间的关系问题，同时双曲线、椭圆的相应知识也进行了综合性考查．

14．【分析】由题中信息可知无论正方形是沿着 x 轴的正方向还是负方向滚动，再次使用点 P 与 x 轴接触的 x 轴方向的路程是 4，故其最小正期为 4，在正方形的翻滚过程中，函数 $y=f(x)$ 的两个相邻零点间点 P 的轨迹如图所示，可得其面积．

【解答】解：不难想象，从某一个顶点（比如 A）落在 x 轴上的时候开始计算，到下一次 A 点落在 x 轴上，这个过程中四个顶点依次落在了 x 轴上，而每两个顶点间距离为正方形的边长 1，因此该函数的周期为 4．下面考察 P 点的运动轨迹，不妨考察正方形向右滚动，P 点从 x 轴上开始运动的时候，首先是围绕 A 点运动$\frac{1}{4}$个圆，该圆半径为 1，然后以 B 点为中心，滚动到 C 点落地，其间是以 BP 为半径，旋转 90°，然后以 C 为圆心，再旋转 90°，这时候以 CP 为半径，因此最终构成图象如下：故其与 x 轴所围成的图形面积为

$S=2\times\frac{1}{4}\times\pi\times1^2+\frac{1}{4}\times\pi\times(\sqrt{2})^2+2\times\frac{1}{2}\times1\times1=\pi+1$．

故答案为：4，π+1．



【点评】考查了数形结合的思想，以及函数零点的概念和零点的判断，本题是一道信息题，考查学生的分析问题能力、阅读能力、推理能力和应用知识解决问题的能力．

三、解答题（共 6 小题，满分 70 分）

15. 【分析】（Ⅰ）把 $x=\frac{\pi}{3}$代入到 f（x）中，利用特殊角的三角函数值求出即可；

（Ⅱ）利用同角三角函数间的基本关系把 $\sin^2x$ 变为 $1-\cos^2x$，然后利用二倍角的余弦函数公式把 $\cos2x$ 变为 $2\cos^2x-1$，得到 f（x）是关于 $\cos x$ 的二次函数，利用配方法把 f（x）变成二次函数的顶点式，根据 $\cos x$ 的值域，利用二次函数求最值的方法求出 f（x）的最大值和最小值即可．

【解答】解：（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{3})=2\cos\frac{2\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{3}-4\cos\frac{\pi}{3}=-1+\frac{3}{4}-2=-\frac{9}{4}$；

（Ⅱ）$f(x)=2(2\cos^2x-1)+(1-\cos^2x)-4\cos x$

$=3\cos^2x-4\cos x-1$

$=3(\cos x-\frac{2}{3})^2-\frac{7}{3}$，$x\in R$，

因为 $\cos x\in[-1,1]$，

所以当 $\cos x=-1$ 时，f（x）取最大值 6；当 $\cos x=\frac{2}{3}$时，取最小值 $-\frac{7}{3}$．

【点评】考查学生灵活运用同角三角函数间的基本关系及二倍角的余弦函数公式化间求值，此题以三角函数为平台，考查二次函数求最值的方法．

16. 【分析】（Ⅰ）设出等差数列的公差为 d，然后根据第三项为 -6，第六项为 0 利用等差数列的通项公式列出方程解出 a_1 和 d 即可得到数列的通项公式；

（Ⅱ）根据 $b_2=a_1+a_2+a_3$ 和 a_n 的通项公式求出 b_2，因为$\{b_n\}$为等比数列，可用$\frac{b_2}{b_1}$求出公比，然后利用首项和公比写出等比数列的前 n 项和的公式．

【解答】解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差 d．

因为 $a_3=-6$，$a_6=0$

所以$\begin{cases}a_1+2d=-6\\a_1+5d=0\end{cases}$解得 $a_1=-10$，$d=2$

所以 $a_n=-10+(n-1)\cdot2=2n-12$

（Ⅱ）设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q

因为 $b_2=a_1+a_2+a_3=-24$，$b_1=-8$，

所以 $-8q=-24$，即 $q=3$，

所以$\{b_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=4(1-3^n)$

【点评】考查学生会根据条件求出等差数列的通项公式和等比数列的前 n 项和的公式，此题是一道基础题．

17．【分析】（Ⅰ）证明平面 BDE 外的直线 AF 平行平面 BDE 内的直线 GE，即可证明 $AF//$ 平面 BDE;

（Ⅱ）证明 CF 垂直平面 BDF 内的两条相交直线：BD、EG，即可证明求 $CF\perp$ 平面 BDF;

【解答】证明：（Ⅰ）设 AC 于 BD 交于点 G.

因为 $EF//AG$，且 $EF=1$，$AG=\dfrac{1}{2}AC=1$，

所以四边形 $AGEF$ 为平行四边形，

所以 $AF//EG$，

因为 $EG\subset$平面 BDE，$AF\not\subset$平面 BDE，

所以 $AF//$ 平面 BDE.

（Ⅱ）连接 FG．因为 $EF//CG$，$EF=CG=1$，

且 $CE=1$，所以平行四边形 $CEFG$ 为菱形．所以 $CF\perp EG$.

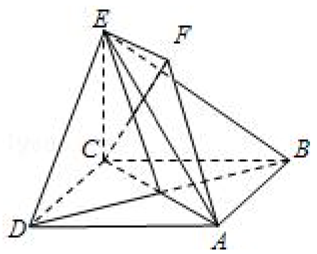
因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $BD\perp AC$.

又因为平面 $ACEF\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $ACEF\cap$ 平面 $ABCD=AC$，

所以 $BD\perp$ 平面 $ACEF$.

所以 $CF\perp BD$．又 $BD\cap EG=G$，

所以 $CF\perp$ 平面 BDE.



【点评】本题考查直线与平面垂直的判定，直线与平面平行的判定，考查空间想象能力，逻辑思维能力，是中档题．

18．【分析】先对函数 $f(x)$ 进行求导，然后代入 $f'(x)-9x=0$ 中，再由方程有两根 1、4 可得两等式;

（1）将 a 的值代入即可求出 b，c 的值，再由 f（0）＝0 可求 d 的值，进而确定函数解析式．

（2）f（x）在（－∞，+∞）无极值点即函数 f（x）是单调函数，且可判断是单调增函数，再由导函数大于等于 0 在 R 上恒成立可解．

【解答】解：由得 $f'(x)=ax^2+2bx+c$

因为 $f'(x)-9x=ax^2+2bx+c-9x=0$ 的两个根分别为 1，4，所以 $\begin{cases}a+2b+c-9=0\\16a+8b+c-36=0\end{cases}$（*）

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，又由（*）式得 $\begin{cases}2b+c-6=0\\8b+c+12=0\end{cases}$

解得 $b=-3$，$c=12$

又因为曲线 $y=f(x)$ 过原点，所以 $d=0$，

故 $f(x)=x^3-3x^2+12x$．

（Ⅱ）由于 $a>0$，所以"$f(x)=\frac{a}{3}x^3+bx^2+cx+d$在（－∞，+∞）内无极值点"等价于"$f'(x)=ax^2+2bx+c\geqslant0$ 在（－∞，+∞）内恒成立"．

由（*）式得 $2b=9-5a$，$c=4a$．

又△＝$(2b)^2-4ac=9(a-1)(a-9)$

解 $\begin{cases}a>0\\\triangle=9(a-1)(a-9)\leqslant0\end{cases}$ 得 $a\in[1,9]$

即 a 的取值范围 $[1,9]$

【点评】本题主要考查函数的单调性、极值点与其导函数之间的关系．属基础题．

19．【分析】（Ⅰ）先根据离心率和焦半径求得 a，进而根据 a，b 和 c 的关系求得 c，则椭圆方程可得．

（Ⅱ）根据题意可知 P 的坐标，根据圆 P 与 x 轴相切求得 x，则圆的半径的表达式可得，进而求得 t，则点 P 的坐标可得．

（Ⅲ）由（2）知圆 P 的方程，把点 Q 代入圆的方程，求得 y 和 t 的关系，设 $t=\cos\theta$，利用两角和公式化简整理根据正弦函数的性质求得 y 的最大值．

【解答】解：（Ⅰ）因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，且 $c=\sqrt{2}$，所以 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

（Ⅱ）由题意知 p（0，t）（$-1<t<1$）

由 $\begin{cases} y=t \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $x=\pm\sqrt{3(1-t^2)}$

所以圆 P 的半径为 $\sqrt{3(1-t^2)}$，

则有 $t^2=3(1-t^2)$，

解得 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 所以点 P 的坐标是（0，$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$）

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，圆 P 的方程 $x^2+(y-t)^2=3(1-t^2)$．因为点 Q（x，y）在圆 P 上．所以

$y=t\pm\sqrt{3(1-t^2)-x^2}\leqslant t+\sqrt{3(1-t^2)}$

设 $t=\cos\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $t+\sqrt{3(1-t^2)}=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$

当 $\theta=\frac{\pi}{3}$，即 $t=\frac{1}{2}$，且 $x=0$，y 取最大值 2．

【点评】本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题．考查了学生综合分析问题和解决问题的能力．

20．【分析】（Ⅰ）由题意中的定义和集合 A、B 求出 $A-B$，再由 A 与 B 之间的距离公式

$d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$，求出 $d(A,B)$；

（Ⅱ）根据题意设出集合 A、B、C，则 a_i，b_i，$c_i\in\{0,1\}$（$i=1$，2，n），故得 $A-B\in S_n$，再分 $c_i=0$ 和 $c_i=1$ 两种情况求出 $d(A-C,B-C)$ 和 $d(A,B)$；

（Ⅲ）根据题意设出集合 A、B、C，再根据（Ⅱ）的结论，表示出 $d(A,B)$，$d(A,C)$，$d(B,C)$，再根据集合的元素为“0，1”，确定所求三个数中至少有一个是偶数．

【解答】解：（Ⅰ）由题意得，$A-B=(|0-1|,|1-1|,|0-1|,|0-0|,|1-0|)=(1,0,1,0,1)$，

$d(A,B)=|0-1|+|1-1|+|0-1|+|0-0|+|1-0|=3$

（Ⅱ）证明：设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$

因为 a_i，$b_i\in\{0,1\}$，所以 $|a_i-b_i|\in\{0,1\}$（$i=1$，2，n）

从而 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)\in S_n$

由题意知 a_i，b_i，$c_i\in\{0,1\}$（$i=1$，2，n）

当 $c_i=0$ 时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$

当 $c_i=1$ 时，$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$

所以 $d(A-C, B-C)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=d(A, B)$

（III）证明：设 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$B=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)\in S_n$，

$d(A, B)=k$，$d(A, C)=l$，$d(B, C)=h$，

记 $0=(0, 0, \cdots, 0)\in S_n$，

由（II）可知 $\begin{cases} d(A, B)=d(A-A, B-A)=d(0, B-A)=k \\ d(A, C)=d(A-A, C-A)=d(0, C-A)=l \\ d(B, C)=d(B-A, C-A)=h \end{cases}$

因为 $|a_i-b_i|\in\{0, 1\}$，$d(A, B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=k$，

所以 $|b_i-a_i|$（$i=1, 2, n$）中 1 的个数为 k，$|c_i-a_i|$（$i=1, 2, n$）中 1 的个数为 l，

设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|=1$ 成立的 i 的个数．则 $h=l+k-2t$，

由此可知，k，l，h 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A, B)$，$d(A, C)$，$d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数．

【点评】本题考查了利用新定义和集合的运算性质综合应用的能力，属于高难度题，需要认真审题，抓住新定义的本质．