甘肃省 2024 届新高考备考模拟考试·数学试卷

参考答案、提示及评分细则

1. C　$M=\{x|\log_2 x<3\}=\{x|0<x<8\}$，$N=\{x|x>-1\}$，则 $M\cap N=(0,8)$. 故选 C.

2. D　由题意得，$\overline{z_2}=1-\mathrm{i}$，所以 $z=z_1\cdot\overline{z_2}=(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，所以复数 z 在复平面内对应的点位于第四象限. 故选 D.

3. B　$\forall x\in(0,1]$，$a\leqslant b+x\Rightarrow a\leqslant b$，故 A 不符合题意；$\forall x\in(0,1]$，$a+x<b$，则 $a<b$，反之不一定成立，故 B 符合题意；由 $\exists x\in[0,1]$，$a<b+x$，无法得到 a，b 之间的大小关系，故 C 不符合题意；$\exists x\in[0,1]$，$a+x\leqslant b\Rightarrow a\leqslant b$，故 D 不符合题意. 故选 B.

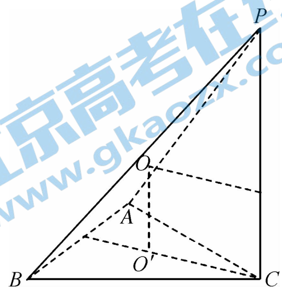
4. D　当 $x<0$ 时，$y=f(-|x|)=f(x)$，其图象在 y 轴左侧的部分与题图 1 相同；当 $x>0$ 时，$y=f(-|x|)=f(-x)$，其图象在 y 轴右侧的部分与题图 1 y 轴左侧的图象关于 y 轴对称. 故选 D.

5. C　因为 $B(4,0)$，且 $|AF|=|BF|$，所以 $|AF|=3$，即点 A 到准线 $x=-1$ 的距离为 3，所以点 A 的横坐标为 2，故而 AB 中点的横坐标为 3，从而到 y 轴的距离为 3. 故选 C.

6. A　因为 $g'(x)=2x-1$，所以 $g'(1)=1$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，由题意，$\begin{cases}f'(1)=\mathrm{e}-a=1,\\ f(1)=\mathrm{e}-a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\mathrm{e}-1,\\ b=-1.\end{cases}$ 故选 A.

7. B　根据题意可知第一层的积是 3，第二层的积是 3^2，第三层的积是 3^4，…，第 7 层的积是 3^{64}，所以前 7 层的积是 $3\times3^2\times3^4\times\cdots\times3^{64}=3^{2^7-1}=3^{127}$，$\lg 3^{127}=127\lg 3\approx127\times0.477=60.579$，所以 3^{127} 最接近 10^{60}. 故选 B.

8. B　由题意可得，$PA=PB$，$AC=BC$，$PC=PC$，所以 $\triangle PCA\cong\triangle PCB$，则 $\angle PCA=\angle PCB$，又 $\angle ACP=90^\circ$，所以 $\angle BCP=90^\circ$，即 $PC\perp AC$，$PC\perp BC$. 又 $AC\cap BC=C$，$AC,BC\subset$ 平面 ABC，所以 $PC\perp$ 平面 ABC. 设 $AB=AC=BC=a(0<a<4)$，则 $PC=4-a$，取正 $\triangle ABC$ 的外心为 O'，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心 O，连接 OO'，如图所示，则 $OO'\perp$ 平面 ABC，底面外接圆的半径 $r=\dfrac{a}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$OO'=\dfrac{1}{2}PC=2-\dfrac{a}{2}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径 $R=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2+\left(2-\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{7}{12}a^2-2a+4}$. 当 $a=-\dfrac{-2}{2\times\frac{7}{12}}=\dfrac{12}{7}$ 时，R 有最小值为 $\sqrt{\dfrac{16}{7}}=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球表面积的最小值为 $4\pi\times\left(\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\right)^2=\dfrac{64\pi}{7}$. 故选 B.



9. ACD　$\dfrac{a}{c}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a(b-c)}{bc}$，又 $a>0>b>c$，所以 $b-c>0$，$bc>0$，所以 $\dfrac{a}{c}-\dfrac{a}{b}>0$，即 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{a}{b}$，故 A 正确；当 $a=1$，$b=-1$，$c=-2$ 时，$b^{2a}<c^{2a}$，故 B 错误；$\dfrac{a-b}{a-c}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{(a-b)c-(a-c)b}{(a-c)c}=\dfrac{a(c-b)}{(a-c)c}$，又 $a>0>b>c$，所以 $a-c>0$，$c-b<0$，所以 $\dfrac{a-b}{a-c}-\dfrac{b}{c}>0$，即 $\dfrac{a-b}{a-c}>\dfrac{b}{c}$，故 C 正确；因为 $a>0>b>c$，所以 $a-b>0$，$b-c>0$，所以

$a-c=a-b+b-c\geqslant 2\sqrt{(a-b)(b-c)}$，当且仅当 $a-b=b-c$ 时等号成立，故 D 正确. 故选 ACD.

10. BC　由题意知 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}$，$3\bar{x}=\dfrac{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{20}}{10}$，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=10\bar{x}$，$x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{20}=30\bar{x}$，所以 $\bar{y}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}+x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{20}}{20}=\dfrac{10\bar{x}+30\bar{x}}{20}=2\bar{x}$，故 A 错误，B 正确；

$10s^2=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_{10}-\bar{x})^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2-10\bar{x}^2$，所以 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=10s^2+10\bar{x}^2$. 同理 $10s^2=x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{20}^2-10\times(3\bar{x})^2=x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{20}^2-90\bar{x}^2$，所以 $x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{20}^2=10s^2+90\bar{x}^2$，又 $\bar{x}\neq 0$，所以 $s'^2=\dfrac{1}{20}\times[(x_1-\bar{y})^2+(x_2-\bar{y})^2+\cdots+(x_{10}-\bar{y})^2+(x_{11}-\bar{y})^2+(x_{12}-\bar{y})^2+\cdots+(x_{20}-\bar{y})^2]=\dfrac{1}{20}\times(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2+x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{20}^2-20\bar{y}^2)=\dfrac{1}{20}\times[10s^2+10\bar{x}^2+10s^2+90\bar{x}^2-20\times(2\bar{x})^2]=s^2+\bar{x}^2>s^2$，所以 $s'>s$，故 C 正确，D 错误. 故选 BC.

11. AB　函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=2\sin^2(-x)-3\sin|-x|+1=2\sin^2x-3\sin|x|+1=f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 是偶函数，A 正确；当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$0<\sin x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$f(x)=2\sin^2x-3\sin x+1=2\left(\sin x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$，令 $t=\sin x$，由于函数 $y=2\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ 在 $t\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时单调递减，函数 $t=\sin x$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时单调递增，所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，故函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 上单调递增，B 正确；当 $x\in[0,\pi]$ 时，由 $f(x)=2\sin^2x-3\sin x+1=0$，得 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin x=1$，所以 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{6}$，所以偶函数 $y=f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 6 个零点，C 不正确；当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=2\sin^2x-3\sin x+1=2\left(\sin x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$，因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以当 $\sin x=\dfrac{3}{4}$ 时，$f(x)_{\min}=-\dfrac{1}{8}$，当 $\sin x=-1$ 时，$f(x)_{\max}=6$，由于函数 $y=f(x)$ 是偶函数，因此，函数 $y=f(x)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{8},6\right]$，D 不正确. 故选 AB.

12. BC　对于 A 选项，若直线 l 将圆 C 的周长平分，则直线 l 过原点，此时直线 l 的斜率不存在，A 选项错误；对于 B 选项，若圆 C 上存在两个点到直线 l 的距离为 1，则 C 到直线 l 的距离 d 满足 $1<d<3$，所以 $1<\dfrac{3}{\sqrt{1+k^2}}<3$，解得 $-2\sqrt{2}<k<0$ 或 $0<k<2\sqrt{2}$，B 选项正确；对于 C 选项，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|CA|\cdot|CB|\cdot\sin\angle ACB=2\sin\angle ACB$，当 $\angle ACB=90^\circ$ 时，$\triangle ABC$ 的面积有最大值 2，C 选项正确；对于 D 选项，易知直线 l 经过定点 $P(0,3)$，所以 $OM\perp PM$，M 点的轨迹以 OP 为直径的圆，其方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$，又因为 M 点在圆 C 内，由 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4},\end{cases}$ 解得 $y=\dfrac{4}{3}$，所以 M 点的轨迹方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

$\left(0<y<\frac{4}{3}\right)$，D 选项错误. 故选 BC.

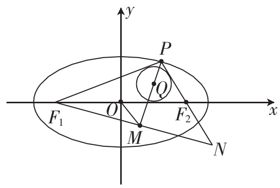
13. 16π　设圆柱底面的半径为 R，高为 h，则 $\begin{cases}h=2R,\\2\pi Rh=16\pi,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}R=2,\\h=4,\end{cases}$ 所以圆柱的体积 $V=\pi R^2h=16\pi$.

14. $-\frac{4}{23}$　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $-2\sin\alpha-\cos\alpha=0$，所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha+3}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{5\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{5+3\tan^2\alpha}$

$=\frac{-1}{5+3\times\frac{1}{4}}=-\frac{4}{23}$.

15. 丙午　因为 $13^8+2=(12+1)^8+2=12^8+C_8^1\times12^7+\cdots+C_8^7\times12+3$，所以 13^8+2 年以后地支为“午”.

因为 $13^8+2=(10+3)^8+2=10^8+C_8^1\times10^7\times3+\cdots+C_8^7\times10\times3^7+3^8+2$，又 $3^8+2=6\ 563$，3^8+2 除以 10 余数为 3，所以 13^8+2 年以后天干为“丙”，故 13^8+2 年以后是丙午年.



16. $\frac{3}{5}$　延长 PF_2，F_1M 交于 N 点，连接 OM，因为点 Q 是 $\triangle F_1PF_2$ 内切圆的圆心，所以 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$. 因为 $F_1M\perp PQ$，所以 $|PN|=|PF_1|\Rightarrow M$ 为 F_1N 的中点，又因为 O 为 F_1F_2 的中点，$|OM|=\frac{1}{2}|F_2N|=\frac{1}{2}(|PN|-|PF_2|)=\frac{1}{2}(|PF_1|-|PF_2|)=1$. 即 $|PF_1|-|PF_2|=2$，又 $|PF_1|=|F_1F_2|=6$，所以 $|PF_2|=4$，故 $|PF_1|+|PF_2|=10=2a$，$a=5$，$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$.

17. (1)解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由条件①得，$3a_2+a_4=3(a_1+d)+a_1+3d=4a_1+6d=64$，即 $2a_1+3d=32$.

由条件②得，$S_5=5a_1+\frac{5\times(5-1)d}{2}=5a_1+10d=100$，即 $a_1+2d=20$.

由条件③得，$S_7=5a_5+16$，可得 $7a_1+21d=5(a_1+4d)+16$，即 $2a_1+d=16$.

若选①②，则 $\begin{cases}2a_1+3d=32,\\a_1+2d=20,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\d=8,\end{cases}$ 所以 $a_n=4+8(n-1)=8n-4$；…………………………… 4 分

若选①③，则 $\begin{cases}2a_1+3d=32,\\2a_1+d=16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\d=8,\end{cases}$ 则 $a_n=4+8(n-1)=8n-4$；…………………………… 4 分

若选②③，则 $\begin{cases}a_1+2d=20,\\2a_1+d=16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\d=8,\end{cases}$ 则 $a_n=4+8(n-1)=8n-4$；…………………………… 4 分

(2)证明：由 $b_n-b_{n-1}=a_n=8n-4(n\geqslant2)$，且 $b_1=3$，

当 $n\geqslant2$ 时，则 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=3+12+20+\cdots+(8n-4)=3+\frac{(8n-4+12)(n-1)}{2}=4n^2-1$，…………………………… 6 分

又 $b_1=3$ 也满足 $b_n=4n^2-1$，故对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $b_n=4n^2-1$. …………………………… 7 分

则 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，…………………………… 8 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$，

由于 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$ 是单调递增，所以 $T_n\geqslant T_1=\frac{1}{3}$.

综上，$\frac{1}{3}\leqslant T_n<\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)由题可知 $\tan B=2\tan A$，$\tan C=3\tan A$.

在△ABC 中，$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$，…………………………………………… 2 分

则 $\tan A=-\frac{2\tan A+3\tan A}{1-6\tan^2 A}$，解得 $\tan^2 A=1$，所以 $\tan A=-1$ 或 $\tan A=1$， ……………………… 3 分

当 $\tan A=-1$ 时，$\tan B=-2$，则 A，B 均为钝角，与 $A+B+C=\pi$ 矛盾，故舍去，……………………… 4 分

故 $\tan A=1$，则 $A=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由 $\tan A=1$ 可得 $\tan B=2$，$\tan C=3$，

则 $\cos B=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos C=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 C}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

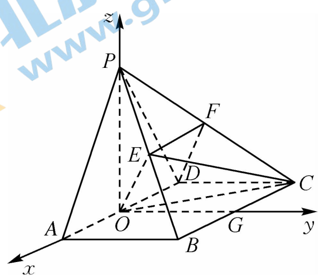
所以 $\sin B=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin C=\frac{3}{\sqrt{10}}$. …………………………………………………………………… 8 分

在△ABC 中有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，则 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}b}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{10}}{4}b$，………………………………………… 10 分

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}b\times b\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3b^2}{8}=6$，解得 $b=4$. ……………………………… 12 分

19. (1)证明：取 PC 中点 F，连接 EF，FD，如图所示.

因为 E，F 分别为 PB，PC 的中点，所以 $EF/\!/BC$，$EF=\frac{1}{2}BC$.



因为四边形 $ABCD$ 是矩形，O 为棱 AD 的中点，所以 $OD/\!/BC$，$OD=\frac{1}{2}BC$.

所以 $EF/\!/OD$，$EF=OD$，所以四边形 $OEFD$ 是平行四边形，

所以 $OE/\!/FD$. ……………………………………………………………… 2 分

又 $FD\subset$ 平面 PCD，$OE\not\subset$ 平面 PCD，所以 $OE/\!/$ 平面 PCD. ………… 4 分

(2)解：取 BC 的中点 G，连接 OG. 因为△PAD 是正三角形，O 为棱 AD 的中点，所以 $PO\perp AD$，又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，……………… 5 分

又 OG，$OA\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp OG$，$PO\perp OA$. ……………………………………………… 6 分

因为四边形 $ABCD$ 是矩形，O 为棱 AD 的中点，G 是 BC 的中点，所以 $OG\perp OA$.

以 O 为坐标原点，OA，OG，OP 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示. 设 $AD=2a(a>0)$，则 $O(0,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3}a)$，$B(a,1,0)$，$C(-a,1,0)$，$D(-a,0,0)$，所以 $E\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，

故$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{a}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC}=(-a,1,0)$，$\overrightarrow{PD}=(-a,0,-\sqrt{3}a)$.

设平面 OCE 的一个法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OE}=\frac{a}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}a}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OC}=-ax+y=0,\end{cases}$令 $x=1$，解得 $y=a$，$z=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以平面 OCE 的一个法向量$\boldsymbol{n}=\left(1,a,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. ………………………………………………………… 7 分

设直线 PD 与平面 OCE 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PD}|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+0+3a^2}\cdot\sqrt{1+a^2+\frac{4}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{8}$， ……………………… 9 分

解得 $a=\sqrt{3}$， ……………………………………………………………………………………… 10 分

所以 $V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PO=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times1\times3=2\sqrt{3}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)设比赛再继续进行 X 局甲赢得全部奖金，则 $X=1,2$. ………………………………… 1 分

$P(X=1)=\frac{3}{4}$，$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$，故 $P_{甲}=\frac{3}{4}+\frac{3}{16}=\frac{15}{16}$， ……………………………… 3 分

从而 $P_{甲}:P_{乙}=15:1$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)设比赛继续进行 Y 局甲赢得全部奖金，则 $Y=2,3$. ……………………………………………… 5 分

$P(Y=2)=p^2$，$P(Y=3)=C_2^1p^2(1-p)=2p^2(1-p)$，

故 $P_{甲}=p^2+2p^2(1-p)=3p^2-2p^3$，即 $f(p)=3p^2-2p^3$， ………………………………………… 8 分

则 $f'(p)=6p(1-p)$，当$\frac{6}{7}\leqslant p<1$ 时，$f'(p)>0$，

因此 $f(p)$在$\left[\frac{6}{7},1\right)$上单调递增，从而 $f(p)\geqslant f\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{324}{343}$，………………………………… 10 分

所以 $P(A)=1-f(p)\leqslant\frac{19}{343}\approx0.055<0.06$，故事件 A 是小概率事件. ……………………… 12 分

21. 解：(1)因为$|OM|=|OF_1|=|OF_2|$，所以$\angle F_1MF_2=90°$. ……………………………………… 1 分

则$|MF_1|^2+|MF_2|^2=(2c)^2$，$(|MF_1|-|MF_2|)^2+2|MF_1|\cdot|MF_2|=4a^2+2|MF_1|\cdot|MF_2|=4c^2$，

所以$|MF_1|\cdot|MF_2|=2b^2$， ………………………………………………………………………… 3 分

$\triangle MF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|MF_1|\cdot|MF_2|=b^2=3$.

又 C 的离心率为$\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$，所以 $a^2=1$.

所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)①根据题意 $F_2(2,0)$，则直线 $l:m(x-2)-y=0$，

由$\begin{cases} y=mx-2m, \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3-m^2)x^2+4m^2x-4m^2-3=0$,

由$\begin{cases} 3-m^2\neq 0, \\ \Delta=4[4m^4+(3-m^2)(4m^2+3)]>0, \end{cases}$ 得 $m^2\neq 3$,$\Delta>0$ 恒成立. …………………………………… 6 分

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\dfrac{4m^2}{m^2-3}$,$x_1x_2=\dfrac{4m^2+3}{m^2-3}$, …………………………………… 7 分

直线 l 与双曲线 C 的右支相交于 M,N 不同的两点,即$\begin{cases} x_1+x_2>0, \\ x_1x_2>0, \end{cases}$

所以 $m^2>3$,解得 $m\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$. …………………………………… 8 分

②假设存在实数 m,使$\angle MON$ 为锐角,所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}>0$,即 $x_1x_2+y_1y_2>0$,

因为 $y_1y_2=(mx_1-2m)(mx_2-2m)=m^2x_1x_2-2m^2(x_1+x_2)+4m^2$,

所以$(1+m^2)x_1x_2-2m^2(x_1+x_2)+4m^2>0$,

由①得$(1+m^2)(4m^2+3)-8m^4+4m^2(m^2-3)>0$,即 $7m^2+3-12m^2>0$ 解得 $m^2<\dfrac{3}{5}$,

$m^2<\dfrac{3}{5}$与 $m^2>3$ 矛盾,故不存在. …………………………………… 12 分

22.(1)解:若 $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增,则 $f'(x)=2x+a\ln x+a\geqslant 0$ 在 $x\in(1,+\infty)$上恒成立,

即 $a\geqslant-\dfrac{2x}{1+\ln x}$在 $x\in(1,+\infty)$上恒成立. …………………………………… 2 分

令 $h(x)=-\dfrac{2x}{1+\ln x}$,$x\in[1,+\infty)$,所以 $h'(x)=-\dfrac{2(1+\ln x)-2x\cdot\dfrac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=-\dfrac{2\ln x}{(1+\ln x)^2}\leqslant 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$上恒成立,所以 $h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(1)=-2$, …………………………………… 4 分

所以 $a\geqslant-2$,即 a 的取值范围是$[-2,+\infty)$. …………………………………… 5 分

(2)证明:当 $a=1$ 时,$f(x)=x^2+x\ln x$.

要证 $f(x)\geqslant x-e^{-x}$,即证 $x^2+x\ln x\geqslant x-e^{-x}$,即证 $x+\ln x+\dfrac{1}{xe^x}-1\geqslant 0$,即 $\ln(xe^x)+\dfrac{1}{xe^x}-1\geqslant 0$,

…………………………………… 7 分

令 $xe^x=t$,$t>0$,即证 $\ln t+\dfrac{1}{t}-1\geqslant 0$. …………………………………… 8 分

令 $g(t)=\ln t+\dfrac{1}{t}-1$,$t\in(0,+\infty)$,所以 $g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t-1}{t^2}$,令 $g'(t)=0$,解得 $t=1$,

当 $0<t<1$ 时,$g'(t)<0$,所以 $g(t)$在$(0,1)$上单调递减;当 $t>1$ 时,$g'(t)>0$,

所以 $g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增, …………………………………… 10 分

所以当 $t=1$ 时,$g(t)$取得极小值即最小值,所以 $g(t)\geqslant g(1)=0$,

即 $\ln t+\dfrac{1}{t}-1\geqslant 0$,所以 $f(x)\geqslant x-e^{-x}$. …………………………………… 12 分