

北京市西城区 2020—2021 学年度第一学期期末试卷

高一数学参考答案

2021.1

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

1. D                      2. C                      3. C                      4. A                      5. D  
6. B                      7. D                      8. D                      9. A                      10. C

二、填空题：本大题共 5 题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 5                                      12. (0,1)                                      13.  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$   
14. -1; (-1,0]                                      15. ② ③

注：第 14 题第一问 2 分，第二问 3 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分。其他正确解答过程，请参照评分标准给分。

16. (本小题 13 分)

解：(I) 由折线图，知样本中体育成绩大于或等于 70 分的学生有 30 人， .....2 分

所以该校高一年级学生中体育成绩大于或等于 70 分的学生约有  $1000 \times \frac{30}{40} = 750$  人。

.....5 分

(II) 设“其中恰有 1 人体育成绩在 [60,70)” 为事件  $M$ ， .....6 分

记体育成绩在 [60,70) 的数据为  $A_1, A_2$ ，体育成绩在 [80,90) 的数据为  $B_1, B_2, B_3$ ，

则从这两组数据中随机抽取 2 个，所有可能的结果有 10 种，它们是： $(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_2, B_3)$ 。 .....8 分

而事件  $M$  的结果有 6 种，它们是： $(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3)$ ， .....10 分

因此事件  $M$  的概率  $P(M) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 。 .....13 分

17. (本小题 15 分)

解: (I) 由  $f(x) = x + \frac{4}{x} + 3 = 2x$ , 解得  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$ . ..... 2 分

所以函数  $f(x)$  的图像与直线  $y = 2x$  的交点为  $(-1, -2)$ ,  $(4, 8)$ . ..... 4 分

(II) 因为  $x > 0$ ,

所以  $f(x) = x + \frac{4}{x} + 3 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} + 3 = 7$ . ..... 7 分

当且仅当  $x = \frac{4}{x}$ , 即  $x = 2$  时取等号.

故当  $x = 2$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上取到最小值 7. .... 9 分

(III) 任取  $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 那么

$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \frac{4}{x_1} + 3) - (x_2 + \frac{4}{x_2} + 3)$  ..... 11 分

$= (x_1 - x_2) + \frac{4(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 4)}{x_1 x_2}$ . ..... 13 分

因为  $2 < x_1 < x_2$ , 所以  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $x_1 x_2 - 4 > 0$ ,

从而  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ .

所以函数  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上单调递增. .... 15 分

18. (本小题 14 分)

解: (I) 依题意, 得  $\frac{1}{3}(88 + 92 + 92) = \frac{1}{3}[90 + 91 + (90 + a)]$ , ..... 3 分

解得  $a = 1$ . ..... 4 分

(II) 设“乙组平均成绩超过甲组平均成绩”为事件  $A$ , ..... 5 分

依题意  $a = 0, 1, 2, \dots, 9$ , 共有 10 种可能. .... 7 分

由 (I), 知当  $a = 1$  时甲、乙两个小组的数学平均成绩相同,

故当  $a = 2, 3, 4, \dots, 9$  时, 乙组平均成绩超过甲组平均成绩, 共有 8 种可能. .... 9 分

所以乙组平均成绩超过甲组平均成绩的概率  $P(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ . ..... 11 分

(III) 甲组同学数学成绩的方差大于乙组同学数学成绩的方差. .... 14 分

19. (本小题 15 分)

解: (I) 由  $f(a) = \frac{2^a + 1}{2^a - 1} = 2$ , 解得  $2^a = 3$ . ..... 2 分

所以  $a = \log_2 3$ . ..... 4 分

(II) 结论: 函数  $f(x)$  为奇函数. .... 5 分

证明如下:

函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . .... 6 分

因为  $f(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1}$  ..... 7 分

$$= \frac{(2^{-x} + 1)2^x}{(2^{-x} - 1)2^x} = \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x} = -f(x),$$

所以函数  $f(x)$  为奇函数. .... 9 分

(III)  $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = 1 + \frac{2}{2^x - 1}$ . .... 11 分

由  $x \in [1, +\infty)$ , 得  $2^x \geq 2$ , 即  $2^x - 1 \geq 1$ .

故  $\frac{1}{2^x - 1} \in (0, 1]$ , 则  $\frac{2}{2^x - 1} \in (0, 2]$ .

所以  $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = 1 + \frac{2}{2^x - 1} \in (1, 3]$ .

即  $f(x)$  的值域为  $(1, 3]$ . .... 13 分

由  $f(x) \leq m$  对于  $x \in [1, +\infty)$  恒成立, 得  $m \geq 3$ ,

所以实数  $m$  的最小值为 3. .... 15 分

20. (本小题 13 分) 公众号: 北京初高中数学

解: (I) 当  $x \in [100, 130)$  时,  $y = 500x - 300(130 - x) = 800x - 39000$ ; ..... 3 分

当  $x \in [130, 150]$  时,  $y = 500 \times 130 = 65000$ . .... 6 分

所以  $y = \begin{cases} 800x - 39000, & 100 \leq x < 130, \\ 65000, & 130 \leq x \leq 150. \end{cases}$  ..... 8 分

(II) 由  $y \geq 57000$ , 解得  $x \in [120, 150]$ .

故下一个销售季度利润  $y$  不少于 57000 元时, 市场需求量  $x \in [120, 150]$ . ..... 13 分

21. (本小题 15 分)

解: (I) 函数  $y=x$  不属于集合  $P$ ; 函数  $y=2$  属于集合  $P$ . ..... 3 分

(II) 证明: 设  $m=2$ , ..... 6 分

因为  $g(x+m)=(\sqrt{2})^{x+m}=2 \times (\sqrt{2})^x$ ,  $mg(x)=m(\sqrt{2})^x=2 \times (\sqrt{2})^x$ ,

所以  $g(x+m)=mg(x)$ .

故  $g(x) \in P$ . ..... 9 分

(注: 本小问中的  $m$  还可以等于 4)

(III) 设二次函数  $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$  为集合  $Q$  中的任意一个元素, ..... 10 分

假设存在常数  $m(m \neq 0)$ , 对于任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x+m)=mf(x)$  成立, ..... 11 分

因为  $f(x+m)=a(x+m)^2+b(x+m)+c$ ,  $mf(x)=amx^2+bm+cm$ ,

所以  $ax^2+(2ma+b)x+(am^2+bm+c)=amx^2+bm+cm$  对于任意  $x \in \mathbf{R}$  成立.

..... 13 分

所以  $a=am$  ①;  $2ma+b=bm$  ②;  $am^2+bm+c=cm$  ③ 同时成立.

由 ① 及  $a \neq 0$ , 得  $m=1$ .

代入 ②, 得  $a=0$ , 这与  $a \neq 0$  矛盾,

所以不存在常数  $m(m \neq 0)$ , 对于任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x+m)=mf(x)$  成立,

所以  $f(x) \notin P$ , 即  $P \cap Q = \emptyset$ . ..... 15 分

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯