

理科数学试题参考答案

一、选择题

1. C 2. C 3. B 4. B 5. D 6. A
7. B 8. A 9. A 10. B 11. C 12. D

二、填空题

13. $y=3x$ 14. $\frac{121}{3}$ 15. 0.18 16. 2

三、解答题

17. 解:

(1) 由已知得 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$, 故由正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$.

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$.

因为 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以 $A = 60^\circ$.

(2) 由(1)知 $B = 120^\circ - C$, 由题设及正弦定理得 $\sqrt{2} \sin A + \sin(120^\circ - C) = 2 \sin C$,
即 $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C = 2 \sin C$, 可得 $\cos(C + 60^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由于 $0^\circ < C < 120^\circ$, 所以 $\sin(C + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin(C + 60^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin(C + 60^\circ) \cos 60^\circ - \cos(C + 60^\circ) \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

18. 解:

(1) 连结 B_1C , ME . 因为 M , E 分别为 BB_1 , BC 的中点, 所以 $ME \parallel B_1C$, 且 $ME = \frac{1}{2} B_1C$. 又因为 N 为 A_1D 的中点, 所以 $ND = \frac{1}{2} A_1D$.

由题设知 $A_1B_1 \parallel DC$, 可得 $B_1C \parallel A_1D$, 故 $ME \parallel ND$, 因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形, $MN \parallel ED$. 又 $MN \not\subset$ 平面 EDC_1 , 所以 $MN \parallel$ 平面 C_1DE .

(2) 由已知可得 $DE \perp DA$. 以 D 为坐标原点, \overrightarrow{DA} 的方向为 x 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 则

$$A(2, 0, 0), A_1(2, 0, 4), M(1, \sqrt{3}, 2), N(1, 0, 2), \overrightarrow{A_1A} = (0, 0, -4),$$

$$\overrightarrow{A_1M} = (-1, \sqrt{3}, -2), \overrightarrow{A_1N} = (-1, 0, -2),$$

$$\overrightarrow{MN} = (0, -\sqrt{3}, 0).$$

设 $m = (x, y, z)$ 为平面 A_1MA 的法向量, 则

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{A_1M} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{A_1A} = 0. \end{cases}$$

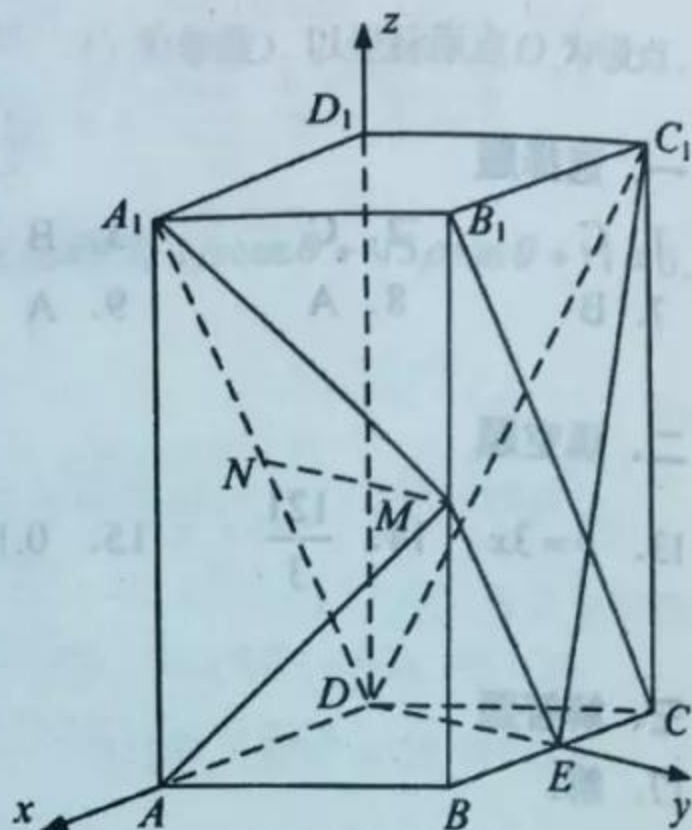
所以 $\begin{cases} -x + \sqrt{3}y - 2z = 0, \\ -4z = 0. \end{cases}$ 可取 $m = (\sqrt{3}, 1, 0)$.

设 $n = (p, q, r)$ 为平面 A_1MN 的法向量, 则

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{A_1N} = 0. \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} -\sqrt{3}q = 0, \\ -p - 2r = 0. \end{cases}$ 可取 $n = (2, 0, -1)$.

于是 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 所以二面角 $A - MA_1 - N$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



19. 解:

设直线 $l: y = \frac{3}{2}x + t, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

(1) 由题设得 $F(\frac{3}{4}, 0)$, 故 $|AF| + |BF| = x_1 + x_2 + \frac{3}{2}$, 由题设可得 $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$.

由 $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + t, \\ y^2 = 3x \end{cases}$ 可得 $9x^2 + 12(t-1)x + 4t^2 = 0$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{12(t-1)}{9}$.

从而 $-\frac{12(t-1)}{9} = \frac{5}{2}$, 得 $t = -\frac{7}{8}$.

所以 l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{8}$.

(2) 由 $\overline{AP} = 3\overline{PB}$ 可得 $y_1 = -3y_2$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + t, \\ y^2 = 3x \end{cases} \text{ 可得 } y^2 - 2y + 2t = 0.$$

所以 $y_1 + y_2 = 2$. 从而 $-3y_2 + y_2 = 2$, 故 $y_2 = -1$, $y_1 = 3$.

代入 C 的方程得 $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{故 } |AB| = \frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

20. 解:

$$(1) \text{ 设 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}, \quad g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}.$$

当 $x \in (-1, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x)$ 单调递减, 而 $g'(0) > 0$, $g'(\frac{\pi}{2}) < 0$, 可得 $g'(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 有

唯一零点, 设为 α . 则当 $x \in (-1, \alpha)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) < 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1, \alpha)$ 单调递增, 在 $(\alpha, \frac{\pi}{2})$ 单调递减, 故 $g(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点, 即 $f'(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(i) 当 $x \in (-1, 0]$ 时, 由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递增, 而 $f'(0) = 0$, 所以当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减. 又 $f(0) = 0$, 从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 的唯一零点.

(ii) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 单调递增, 在 $(\alpha, \frac{\pi}{2})$ 单调递减, 而 $f'(0) = 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) < 0$, 所以存在 $\beta \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\beta) = 0$, 且当 $x \in (0, \beta)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\beta, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $(0, \beta)$ 单调递增, 在 $(\beta, \frac{\pi}{2})$ 单调递减.

又 $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \ln(1 + \frac{\pi}{2}) > 0$, 所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) > 0$. 从而, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 没有零点.

(iii) 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递减. 而 $f(\frac{\pi}{2}) > 0$,

$f(\pi) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 有唯一零点.

(iv) 当 $x \in (\pi, +\infty)$ 时, $\ln(x+1) > 1$, 所以 $f(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(\pi, +\infty)$ 没有零点.

综上所述, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. 解:

(1) X 的所有可能取值为 $-1, 0, 1$.

$$P(X = -1) = (1 - \alpha)\beta,$$

$$P(X = 0) = \alpha\beta + (1 - \alpha)(1 - \beta),$$

$$P(X = 1) = \alpha(1 - \beta).$$

所以 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1 - \alpha)\beta$	$\alpha\beta + (1 - \alpha)(1 - \beta)$	$\alpha(1 - \beta)$

(2) (i) 由 (1) 得 $a = 0.4$, $b = 0.5$, $c = 0.1$.

因此 $p_i = 0.4p_{i-1} + 0.5p_i + 0.1p_{i+1}$, 故 $0.1(p_{i+1} - p_i) = 0.4(p_i - p_{i-1})$, 即

$$p_{i+1} - p_i = 4(p_i - p_{i-1}).$$

又因为 $p_1 - p_0 = p_1 \neq 0$, 所以 $\{p_{i+1} - p_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, 7)$ 为公比为 4, 首项为 p_1 的等比数列.

(ii) 由 (i) 可得

$$p_8 = p_8 - p_7 + p_7 - p_6 + \dots + p_1 - p_0 + p_0$$

$$= (p_8 - p_7) + (p_7 - p_6) + \dots + (p_1 - p_0)$$

$$= \frac{4^8 - 1}{3} p_1.$$

由于 $p_8 = 1$, 故 $p_1 = \frac{3}{4^8 - 1}$, 所以

$$p_4 = (p_4 - p_3) + (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1) + (p_1 - p_0)$$

$$= \frac{4^4 - 1}{3} p_1$$

$$= \frac{1}{257}.$$

p_4 表示最终认为甲药更有效的概率. 由计算结果可以看出, 在甲药治愈率为 0.5, 乙药治愈率为 0.8 时, 认为甲药更有效的概率为 $p_4 = \frac{1}{257} \approx 0.0039$, 此时得出错误结论

的概率非常小, 说明这种试验方案合理.

22. 解:

(1) 因为 $-1 < \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq 1$, 且 $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$, 所以 C 的直角坐标方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq -1)$.

l 的直角坐标方程为 $2x + \sqrt{3}y + 11 = 0$.

(2) 由 (1) 可设 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, $-\pi < \alpha < \pi$).

C 上的点到 l 的距离为

$$\frac{|2 \cos \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha + 11|}{\sqrt{7}} = \frac{4 \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + 11}{\sqrt{7}}.$$

当 $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ 时, $4 \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + 11$ 取得最小值 7, 故 C 上的点到 l 距离的最小值为 $\sqrt{7}$.

23. 解:

(1) 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ac$, 又 $abc = 1$, 故有

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$.

(2) 因为 a, b, c 为正数且 $abc = 1$, 故有

$$\begin{aligned} (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 &\geq 3\sqrt{(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3} \\ &= 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &\geq 3 \times (2\sqrt{ab}) \times (2\sqrt{bc}) \times (2\sqrt{ac}) \\ &= 24. \end{aligned}$$

所以 $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.