西南名校联盟
高考适应性月考卷

秘密★启用前

理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2\geqslant 0\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$

A. $(-\infty，-1]\cup[2，+\infty)$　　B. $[-1，2]$

C. $(-1，2)$　　D. $(-\infty，-1)\cup(2，+\infty)$

2. 已知命题 p：$\forall x>0$，$\ln(x+1)>0$；命题 q：$\exists x_0>0$，$\sin x_0-x_0>0$，下列命题为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $p\wedge\neg q$

C. $\neg p\wedge q$　　D. $\neg p\wedge\neg q$

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前11项和为44，$a_{12}=10$，则 $a_{70}=$

A. 2345　　B. 2346

C. 68　　D. 69

4. 设i为虚数单位，$5\bar{z}-\mathrm{i}=3+2\mathrm{i}$，则复数 z 对应的点在

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 向量 $\vec{a}=(1，-1)$，$\vec{b}=(-1，1)$，则 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}=$

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. -2

6. 设函数 $f(x)=a\cos x+\sin x$（a 为常数），则“$a=0$”是“$f(x)$为奇函数”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知正四面体(四个全等正三角形围成的空间封闭图形)的棱长为 2，则此正四面体的外接球表面积为

A. $\frac{\sqrt{6}\pi}{4}$

B. 4π

C. 5π

D. 6π

9. 已知$\mu\in\mathbf{R}$，若函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-1, & x\leqslant\mu,\\ x^2-4x+3, & x>\mu\end{cases}$恰有 2 个零点，则$\mu$的取值范围是

A. $[1, +\infty)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1]$

D. $(-\infty, 1)$

10. 如图 1，A，B 是半径为 2 的圆周上的定点，P 为圆周上的一动点，$\angle APB=30°$，图中阴影区域的面积的最大值为

A. $2+\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$

B. $2+\frac{2}{3}\pi$

C. $1+\frac{2}{3}\pi$

D. $2+\sqrt{3}$

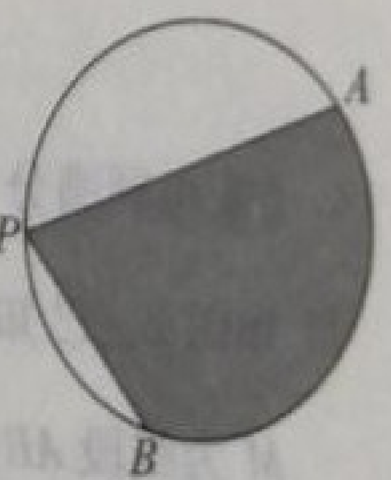

图 1

11. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$的最大值为

A. $4\sqrt{2}$

B. $3\sqrt{2}$

C. 4

D. 5

12. 已知数列

14. 若x，y满足$|x|\leqslant 1-y$，且$y\geqslant -2$，则$4x+y$的最大值为________.

15. 若函数$f(x)$满足$f(x+4)=f(x)(x\in \mathbf{R})$，且在区间$(-2,2]$上，$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{2}x, & 0<x\leqslant 2,\\ \left|x+\dfrac{1}{2}\right|, & -2<x\leqslant 0,\end{cases}$ 则$f(f($

为________.

16. 已知正方形$ABCD$的边长为1，当每个$\lambda_i(i=1,2,3,4)$取遍±1时，则$|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4$

的取值的集合为________.

三、解答题（共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

在$\triangle ABC$中，D是BC上的点，AD平分$\angle BAC$，$\triangle ABD$是$\triangle ADC$面积的2倍.

（1）求$\dfrac{AC}{AB}$；

（2）$AD=1$，$DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求BD和$\triangle ABC$的周长.

18.（本小题满分12分）

如图2，已知圆锥的顶点为P，底面圆心为O，半径为2，$PO=4$，OA，OB是底面半径，且$\angle AO$

M为线段AB的中点.

（1）求异面直线PM与OB所成的角的余弦值；

（2）求直线PO与平面PAB所成角的余弦值.

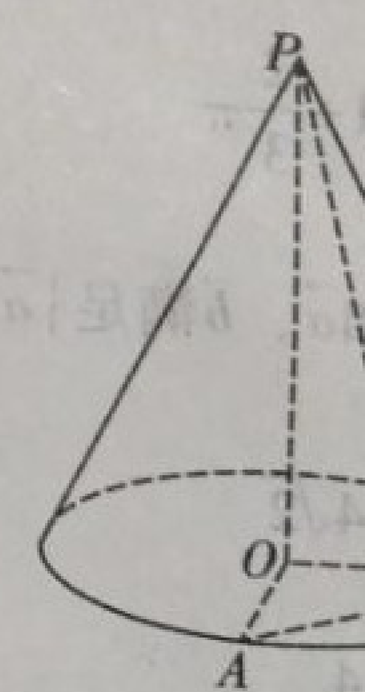

图2

19.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=x^3+ax^2+2x$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

21.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=x-\frac{1}{2}\sin x-\ln x$.

（1）求函数在$\left[1,\ \frac{\pi}{3}\right]$上的最大值；

（2）证明：$f'(x)$有唯一零点；

（3）$\exists x_1,\ x_2\in(0,\ +\infty)$，$x_1\neq x_2$且$f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1x_2<4$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在极坐标系下，射线 OA 和射线 OB 与曲线$\rho^2=\frac{2}{1+\sin^2\theta}$相交于$A(\rho_1,\ \alpha)$，$B\left(\rho_2,\ \alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

（1）证明：$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$为定值；

（2）求$\triangle ABC$面积的取值范围.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

曲靖一中高考复习质量监测卷四

理科数学参考答案

大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	D	D	C	B	D	D	B	A	A

0，$\therefore x\geqslant 2$或$x\leqslant -1$，$\therefore \complement_{\mathrm{R}}A=(-1,\ 2)$，故选 C.

2．p: $x+1>1$, $\therefore \ln(x+1)>0$, p为真命题，q: 当$x>0$时，$x>\sin x$, $\therefore q$为假命题，故选 B.

3．$\because S_{11}=44$, $a_{12}=10$, $\therefore a_1=-1$, $d=1$, $\therefore a_{70}=68$，故选 C.

4．$\because \bar{z}=\dfrac{3+3\mathrm{i}}{5}$, $\therefore z=\dfrac{3}{5}-\dfrac{3\mathrm{i}}{5}$, $\therefore z$对应的点在第四象限，故选 D.

5．$\because \vec{a}+2\vec{b}=(-1，1)$, $\therefore (\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}=-2$，故选 D.

6．若$a=0$，$f(x)=\sin x$为奇函数，若$f(x)$为奇函数，则$f(-x)=-f(x)$,

$\therefore a\cos x-\sin x=-a\cos x-\sin x$, $\therefore a=0$，故选 C.

7．$f(x)=\sin(2x+\varphi)$向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位得$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)$，又因为平移后为偶函数，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，所以$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以函数$f(x)$在$\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]$上的值域为$\left[-\dfrac{1}{2}，1\right]$，故选 B.

8．如图1，$AO=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$DO=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，$\therefore$在$\triangle ABC$中，$AO^2+EO^2=AE^2$,

$\dfrac{4}{3}+\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}-R\right)^2=R^2$，$\therefore R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\therefore$表面积$S=6\pi$，故选 D.

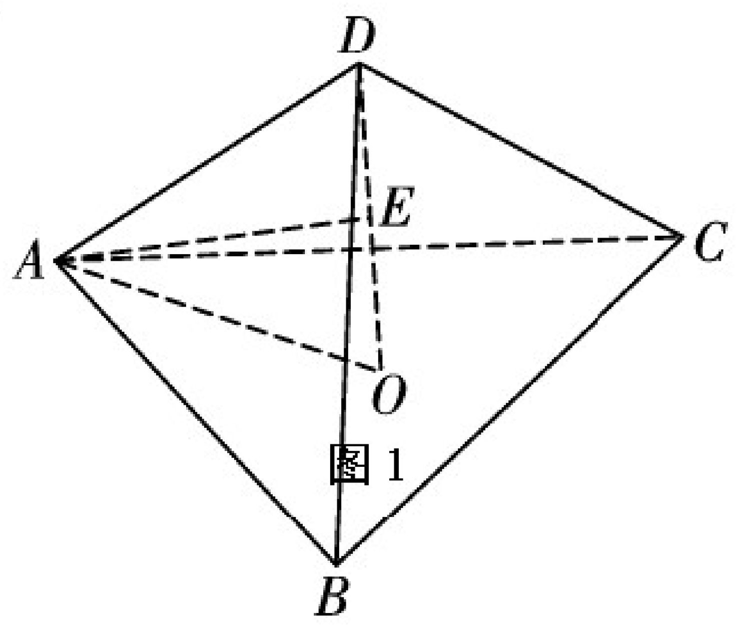

图1

9．由图2可知$\mu<1$，故选 D.

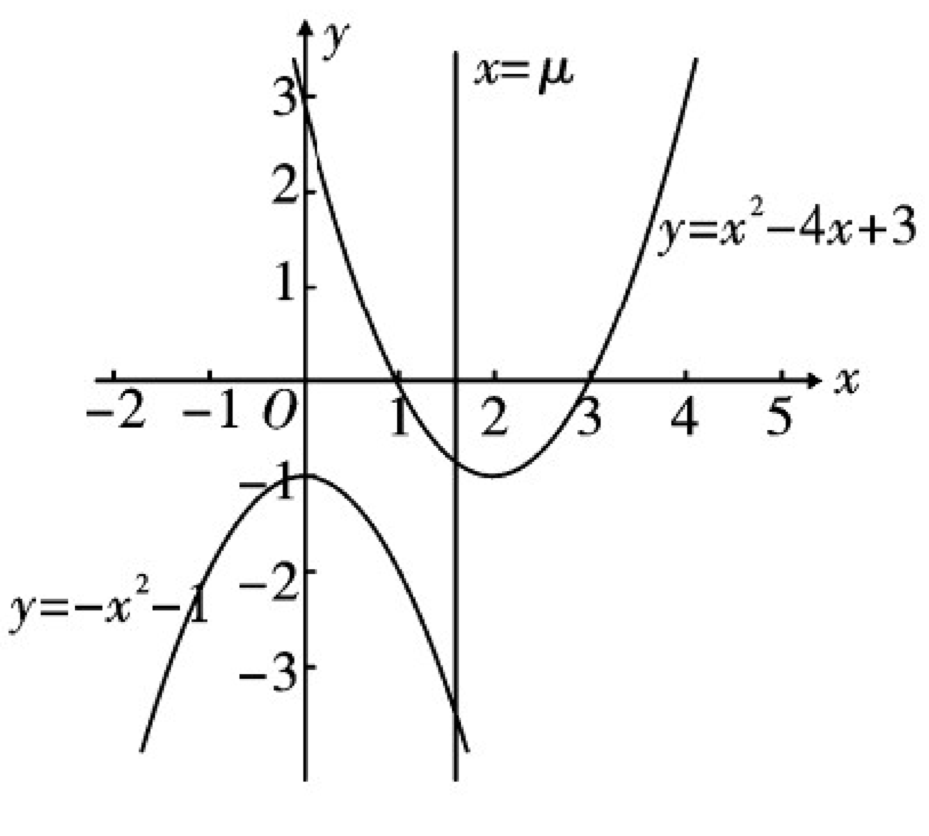

图2

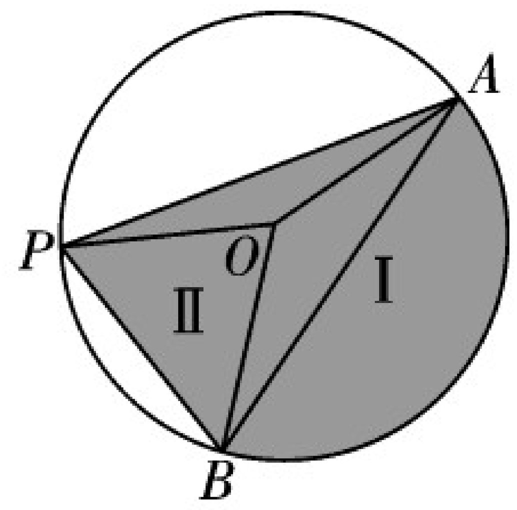

图3

10．如图3，当P为弧AB的中点时，阴影部分的面积S取最大值，$S_{阴影}=S_{扇AOB}+S_{\triangle ABP}-S_{\triangle AOB}$

$=2+\dfrac{2}{3}\pi$，故选 B.

11．设$\vec{a}$, $\vec{b}$夹角为θ, $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}+\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{8+2\vec{a}\cdot\vec{b}}+\sqrt{8-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{8+8\cos\theta}+$

$\sqrt{8-8\cos\theta}$，设$z=\sqrt{8+8\cos\theta}+\sqrt{8-8\cos\theta}$, $\therefore z^2=16+16\sqrt{1-\cos^2\theta}=16+16|\sin\theta|$,

$\therefore (z^2)_{\max}=32$，$\therefore z_{\max}=4\sqrt{2}$，故选 A．

12．$\because f(x)$为奇函数，$\therefore a_{n+1}-a_n-\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$，$\therefore a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=0$，

$a_4=0$，$a_5=1$，$\therefore \{a_n\}$是周期为4的数列，$\therefore S_{2020}=505\times 2=1010$，故选 A．

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\pm\dfrac{1}{3}$	10	$\dfrac{1}{2}$	$\{0，2，2\sqrt{2}\}$

【解析】

14．线性区域为$\begin{cases} x\leqslant 1-y，x\geqslant 0, \\ -x\leqslant 1-y，x<0, \\ y\geqslant -2, \end{cases}$ 则$z=4x+y$在$(3，-2)$处取得最大值10．

15．$f\left(f\left(\dfrac{23}{6}\right)\right)=f\left(f\left(4-\dfrac{1}{6}\right)\right)=f\left(f\left(-\dfrac{1}{6}\right)\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$．

16．$\because \lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}=(\lambda_1-\lambda_3)\overrightarrow{AB}+(\lambda_2-\lambda_4)\overrightarrow{AD}$，$\therefore |\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}|$

$=|(\lambda_1-\lambda_3)\overrightarrow{AB}+(\lambda_2-\lambda_4)\overrightarrow{AD}|=\sqrt{((\lambda_1-\lambda_3)\overrightarrow{AB}+(\lambda_2-\lambda_4)\overrightarrow{AD})^2}=\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)^2+(\lambda_2-\lambda_4)^2}$，

$\therefore |\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}|$的值的集合为$\{0，2，2\sqrt{2}\}$．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）因为$\triangle ABD$是$\triangle ADC$面积的 2 倍，

$\therefore \dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=2\cdot\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD$，……………………………………（4 分）

又$\because AD$平分$\angle BAC$，

$\therefore AB=2AC$，$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$．……………………………………………………（6 分）

（2）因为$\triangle ABD$是$\triangle ADC$面积的 2 倍，

$\therefore \dfrac{1}{2}BD\cdot AD\sin\angle ADB=2\cdot\dfrac{1}{2}DC\cdot AD\sin\angle ADC$，

$\therefore BD=2DC=\sqrt{2}$，……………………………………………………………（8 分）

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，设$AC=x$，

由余弦定理得$x^2=1+\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\angle ADC$，$4x^2=2+1-2\sqrt{2}\cos\angle ADB$，

$\therefore x=1$，$\therefore AC=1$，

$\therefore \triangle ABC$的周长为$3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$．……………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）$\because PO=4$，OA，OB是底面半径，且$\angle AOB=90^\circ$，M为线段AB的中点，

$\therefore$以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OP为z轴，建立如图 4 所示的空间直角坐标系，

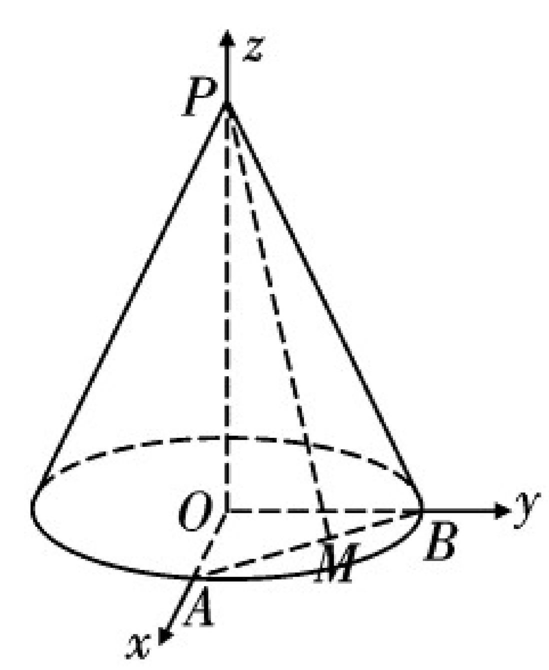

图 4

$P(0,0,4)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$M(1,1,0)$，$O(0,0,0)$，

$\overrightarrow{PM}=(1,1,-4)$，$\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$，…………………………（2 分）

设异面直线PM与OB所成的角为θ，

则$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{2}{\sqrt{18}\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$．…………………………………………………（6 分）

（2）$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,4)$，设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面$PAB$的法向量，

则$\begin{cases}-2x+2y=0,\\-2x+4z=0,\end{cases}$ $\therefore \vec{n}=(2,2,1)$，设$PO$与平面$PAB$所成角为$\alpha$，…………………（8 分）

$\therefore \sin\alpha=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{OP}||\vec{n}|}=\frac{4}{4\times 3}=\frac{1}{3}$,

$\therefore \cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore PO$与平面PAB所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1） $f'(x)=3x^2+2ax+2$， $\Delta=4a^2-24$，

①当$-\sqrt{6}\leqslant a\leqslant\sqrt{6}$时，$\Delta\leqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，

$\therefore f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增；……………………………………………………（2 分）

②当$a>\sqrt{6}$或$a<-\sqrt{6}$时，

当$\frac{-a+\sqrt{a^2-6}}{3}<x$或$x<\frac{-a-\sqrt{a^2-6}}{3}$时，$f'(x)>0$,

$f(x)$在$\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-6}}{3},\ +\infty\right)$, $\left(-\infty,\ \frac{-a-\sqrt{a^2-6}}{3}\right)$上单调递增；

当$\frac{-a-\sqrt{a^2-6}}{3}<x<\frac{-a+\sqrt{a^2-6}}{3}$时， $f'(x)<0$,

$f(x)$在$\left(\frac{-a-\sqrt{a^2-6}}{3},\ \frac{-a+\sqrt{a^2-6}}{3}\right)$上单调递减，

$\therefore$当$-\sqrt{6}\leqslant a\leqslant\sqrt{6}$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增；

当$a>\sqrt{6}$或$a<-\sqrt{6}$时，$f(x)$的单调增区间为$\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-6}}{3},\ +\infty\right)$, $\left(-\infty,\ \frac{-a-\sqrt{a^2-6}}{3}\right)$,

$f(x)$的单调减区间为$\left(\frac{-a-\sqrt{a^2-6}}{3},\ \frac{-a+\sqrt{a^2-6}}{3}\right)$. ……………………………（6 分）

（2） $f(x)=x^3+2x$，设切点为$(x_0,\ y_0)$， $\therefore$切线斜率$k=3x_0^2+2$，

$\therefore$切线方程为$y-x_0^3-2x_0=(3x_0^2+2)(x-x_0)$，

又∵切线过$(1, 3)$，∴$3-x_0^3-2x_0=(3x_0^2+2)(1-x_0)$，

∴$2x_0^3-3x_0^2+1=0$，∴$x_0=1$或$x_0=-\dfrac{1}{2}$，

∴切线方程为$5x-y-2=0$或$11x-4y+1=0$．……………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）∵$a_1a_5=a_3^2=16$，∴$a_3=4$，∴$q=2$．……………………………………………（4 分）

（2）由题可得 $n\geqslant 2$ 时，$(b_{n+1}-b_n)a_n=2n^2+n-[2(n-1)^2+(n-1)]=4n-1$，

……………………………………………………………………………………………（6 分）

当 $n=1$ 时，$(b_2-b_1)a_1=2+1=3$ 也满足上式，所以 $(b_{n+1}-b_n)a_n=4n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$，

而由（1）可得 $a_n=2^{n-1}$，所以 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{4n-1}{a_n}=\dfrac{4n-1}{2^{n-1}}$，…………………………（8 分）

所以 $b_n-b_1=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=\dfrac{3}{2^0}+\dfrac{7}{2^1}+\dfrac{11}{2^2}+\cdots+\dfrac{4n-5}{2^{n-2}}$，

……………………………………………………………………………………………（10 分）

错位相减得 $b_n-b_1=14-\dfrac{4n+3}{2^{n-2}}$，所以 $b_n=15-\dfrac{4n+3}{2^{n-2}}$．……………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）解：$f'(x)=1-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{x}$，

当$0<x<\pi$时，$f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，且$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{\pi}<0$，

∴$f(x)$在$\left[1，\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调递减，

∴$f(x)$在$\left[1，\dfrac{\pi}{3}\right]$上的最大值为$f(1)=1-\dfrac{1}{2}\sin 1$．……………………………………（3 分）

（2）证明：$f'(x)=1-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{x}$，

当$0<x<\pi$时，$f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，且$f'(\pi)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\pi}>0$，$f'(1)=-\dfrac{1}{2}\cos 1<0$，

∵$f'(1)\cdot f'(\pi)<0$，∴$f'(x)$在$(0，\pi)$上有且仅有一个零点，

当$x>\pi$时，$1-\frac{1}{2}\cos x\geqslant\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{x}>-\frac{1}{\pi}$，$\therefore 1-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{x}>\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}>0$，

故$f'(x)$有唯一零点. ……………………………………………………………………（7分）

（3）证明：$f(x_1)=f(x_2)$，$x_1-\frac{1}{2}\sin x_1-\ln x_1=x_2-\frac{1}{2}\sin x_2-\ln x_2$，

$x_1-x_2-\frac{1}{2}\sin x_1+\frac{1}{2}\sin x_2=\ln x_1-\ln x_2$，不妨设$x_1>x_2>0$，$g(x)=x-\sin x$，

$g'(x)=1-\cos x>0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$g(x_1)>g(x_2)$，$x_1-\sin x_1>x_2-\sin x_2$，$x_1-x_2>\sin x_1-\sin x_2$，

$-\frac{1}{2}(x_1-x_2)<-\frac{1}{2}(\sin x_1-\sin x_2)$，

$\ln x_1-\ln x_2>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$，$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<2$，

下证$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，

要证$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，

即证$\ln x_1-\ln x_2<\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}\Leftrightarrow\ln x_1-\ln x_2<\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\Leftrightarrow\ln\frac{x_1}{x_2}<\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$，

设$\frac{x_1}{x_2}=t$，则$t>1$，设$p(t)=\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}-\ln t$，$\therefore p'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{t^3}}-\frac{1}{t}=\frac{t-2\sqrt{t}+1}{2\sqrt{t^3}}=\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2\sqrt{t^3}}>0$，

$\therefore p(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，又$\because p(1)=0$，$\therefore p(t)>0$，$\therefore\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}>\ln t$，$\therefore\ln\frac{x_1}{x_2}<\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$，

$\therefore\sqrt{x_1x_2}<2$，$\therefore x_1x_2<4$. ………………………………………………………（12分）

22.（本小题满分10分）【选修4−4：坐标系与参数方程】

（1）证明：$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{1+\sin^2\alpha}{2}+\frac{1+\cos^2\alpha}{2}=\frac{3}{2}$. …………………（5分）

（2）解：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{(1+\sin^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)}}=\sqrt{\frac{1}{2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}}$，

当$\sin 2\alpha = 1$时，$(S_{\triangle ABC})_{\min} = \dfrac{2}{3}$；

当$\sin 2\alpha = 0$时，$(S_{\triangle ABC})_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$\triangle ABC$面积的取值范围为$\left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$．……………………………………………（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）因为$f(x)=\begin{cases}-2x-1, & x<-3,\\ 5, & -3\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x+1, & x>2,\end{cases}$ ……………………………………………（2 分）

所以当$x<-3$时，由$f(x)\leqslant 7$，得$-4\leqslant x<-3$；

当$-3\leqslant x\leqslant 2$时，由$f(x)\leqslant 7$，得$-3\leqslant x\leqslant 2$；

当$x>2$时，由$f(x)\leqslant 7$，得$2<x\leqslant 3$．

综上，$f(x)\leqslant 7$的解集为$[-4, 3]$．……………………………………………（5 分）

（2）由（1）可知$a^2+b^2+c^2=9$，所以$a^2+1+b^2+2+c^2+3=15$，

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+3}=\frac{\left(\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+2}+\dfrac{1}{c^2+3}\right)g(a^2+1+b^2+2+c^2+3)}{15}$$

$$=\frac{3+\dfrac{b^2+2}{a^2+1}+\dfrac{a^2+1}{b^2+2}+\dfrac{c^2+3}{a^2+1}+\dfrac{a^2+1}{c^2+3}+\dfrac{c^2+3}{b^2+2}+\dfrac{b^2+2}{c^2+3}}{15}\geqslant\frac{9}{15}=\frac{3}{5},$$ ……………………（8 分）

当且仅当$a^2+1=b^2+2=c^2+3=5$，即$a^2=4, b^2=3, c^2=2$时等号成立，

所以$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+2}+\dfrac{1}{c^2+3}$的最小值为$\dfrac{3}{5}$．……………………………………（10 分）