

# 2023 北京昌平一中高二（上）期中

## 数 学

考场号：\_\_\_\_\_ 座位号：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

本试卷共 3 页，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 直线  $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$  的倾斜角为( )

- (A)  $30^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $120^\circ$  (D)  $150^\circ$

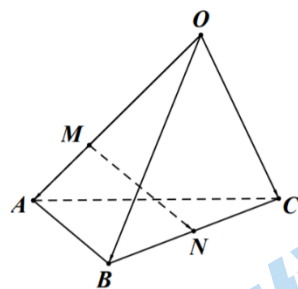
(2) 圆  $C_1: x^2 + y^2 - 6x = 0$  与圆  $(C_2: x^2 + (y+4)^2 = 16)$  的位置关系是( )

- (A) 相交 (B) 内切 (C) 外切 (D) 相离

(3) 在空间四边形  $OABC$  中,  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ , 点  $M$  在  $OA$  上, 且  $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{MA}$ ,  $N$  为  $BC$  的中点, 则  $\overrightarrow{MN} =$  ( )

- (A)  $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$  (B)  $-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$

- (C)  $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{c}$  (D)  $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$



(4) 若直线  $x - y + m = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切, 则实数  $m$  的值为( )

- (A)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\pm 1$  (C)  $A\sqrt{2}$  (D)  $\pm \sqrt{3}$

(5) 已知平面  $\alpha \perp$  平面  $\beta, \alpha \cap \beta = l$ . 下列结论中正确的是( )

- (A) 若直线  $m \perp$  平面  $\alpha$ , 则  $m \parallel \beta$  (B) 若平面  $\gamma \perp$  平面  $\alpha$ , 则  $\gamma \parallel \beta$

- (C) 若直线  $m \perp$  直线  $l$ , 则  $m \perp \beta$  (D) 若平面  $\gamma \perp$  直线  $l$ , 则  $\gamma \perp \beta$

(6) 设“ $m = 2$ ”是“直线  $l_1: 2x + (m+1)y + 4 = 0$  与直线  $l_2: mx + 3y - 6 = 0$  平行”的( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 已知直线  $l: 2x - my + m - 4 = 0$ , 则下述论断正确的是( )

- (A) 直线  $l$  不可能经过坐标原点 (B) 直线  $l$  的斜率可能为 0

- (C) 直线  $l$  的倾斜角不可能是  $\frac{\pi}{2}$  (D) 直线  $l$  恒过定点  $(2, 1)$

(8) 在正三棱锥  $P-ABC$  中,  $AB = 3, PA = 2$ , 则直线  $PA$  与平面  $ABC$  所成角的大小为( )

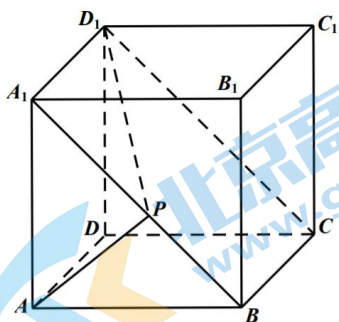
- (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $75^\circ$

(9)若圆  $O: x^2 + y^2 = 2$  上存在点  $P$ , 直线  $l: y = k(x+2)$  上存在点  $Q$ , 使得  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QO}$ , 则实数  $k$  的取值范围为( )

- (A)  $[-2, 2]$       (B)  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$       (C)  $[-1, 1]$       (D)  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

(10) 棱长为 1 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 若点  $P$  为线段  $A_1B$  上的动点(不含端点), 则下列结论错误的是( )

- (A) 平面  $A_1D_1P \perp$  平面  $AA_1P$       (B) 四面体  $D_1 - B_1CP$  的体积是定值  
 (C)  $\triangle APD_1$  可能是钝角三角形      (D) 直线  $D_1P$  与  $AB$  所成的角可能为  $\frac{\pi}{6}$



二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(11) 设平面  $\alpha, \beta$  的法向量分别为  $m = (1, -2, 3), n = (-3, y, z)$ . 若  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $y + z = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(12) 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中, 已知点  $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2), D(0, 0, 1)$ , 则直线  $AD$  与  $BC$  所成角的大小是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(13) 设直线  $l$  过点  $(-4, 0)$ , 其倾斜角的余弦值为  $\frac{4}{5}$ , 则直线  $l$  的方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(14) 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中, 若点  $A(-1, 3, 1), B(-1, 3, 4), D(1, 1, 1)$ , 且  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ , 则  $|\overrightarrow{PD}|$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(15) 在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 所有棱长均为 1, 且  $\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 60^\circ, AB \perp AD$ , 则线段  $AC_1$  的长度为  $\underline{\hspace{2cm}}$

(16) 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 曲线  $G: (|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 2$  就是其中之一. 给出下列四个结论:

- ① 曲线  $G$  有且仅有四条对称轴;
- ② 曲线  $G$  上任意两点之间的距离的最大值为 6;
- ③ 曲线  $G$  恰好经过 9 个整点(即横坐标、纵坐标均为整数的点);
- ④ 曲线  $G$  所围成的区域的面积为  $8 + 4\pi$ .

其中, 所有正确结论的序号是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题共 5 小题, 每小题 14 分, 共 70 分. 解答题应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(17)(本小题 14 分)

已知  $\triangle ABC$  的三个顶点分别是  $A(1,3), B(3,1), C(-1,0)$ .

(I)求边  $AB$  所在直线的方程, 以及这条边上的高所在直线的方程;

(II)求  $\triangle ABC$  的面积.

(18)(本小题 14 分)

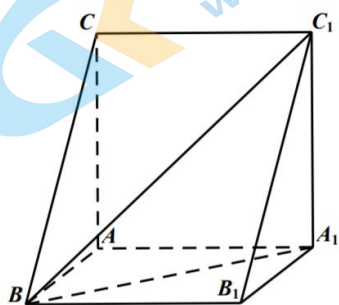
如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 四边形  $AA_1C_1C$  是边长为 4 的正方形,  $AB = 3$ . 再从条件①、条件②、条件③中选择两个能解决下面问题的条件作为已知, 并作答.

(I)求证:  $AB \perp$  平面  $AA_1C_1C$ ;

(II)求直线  $BC$  与平面  $A_1BC_1$  所成角的正弦值.

条件①:  $BC=5$ ; 条件②:  $AB \perp AA_1$ ; 条件③: 平面  $ABC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ .

注: 如果选择的条件不符合要求, 本题得 0 分; 如果选择多组符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.



(19)(本小题 14 分)

已知圆  $C: (x-1)^2 + y^2 = 9$  内有一点  $P(2,2)$ , 过点  $P$  作直线  $l$  交圆  $C$  于  $A, B$  两点.

(I)当直线  $l$  经过圆心时, 求直线  $l$  的方程;

(II)当点  $P$  平分弦  $AB$  时, 求直线  $l$  的方程;

(III)当弦长  $|AB| = 4\sqrt{2}$  时, 求直线  $l$  的方程.

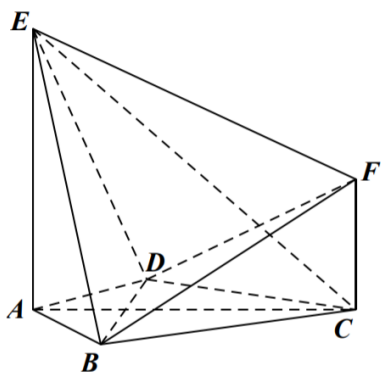
(20)(本小题 14 分)

如图,  $AE \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AE \parallel CF$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AB = AD = 1$ ,  $AE = BC = 2$ .

(I)求证:  $BF \parallel$  平面  $ADE$ ;

(II)求二面角  $E - BD - C$  的余弦值;

(III)若点  $E$  到平面  $BDF$  的距离为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 求三棱锥  $C-BDF$  的体积.



(21)(本小题 14 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 定义  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  两点间的“直角距离”为  $\rho(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .

(I) 填空: (直接写出结论)

①若  $A(1, -1), B(2, 3)$ , 则  $\rho(A, B) =$ ;

②到坐标原点的“直角距离”等于 1 的动点的轨迹方程是\_\_\_\_\_;

③记到  $M(-1, 0), N(1, 0)$  两点的“直角距离”之和为 4 的动点的轨迹为曲线  $G$ , 则曲线  $G$  所围成的封闭图形的面积的值为\_\_\_\_\_;

(II) 设点  $A(1, 0)$ , 点  $B$  是直线  $l: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$  上的动点, 求  $\rho(A, B)$  的最小值及取得最小值时点  $B$  的坐标;

(III) 对平面上给定的两个不同的点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 是否存在点  $C(x, y)$ , 同时满足下列两个条件:

①  $\rho(A, C) + \rho(C, B) = \rho(A, B)$ ;

②  $\rho(A, C) = \rho(C, B)$ .

若存在, 求出所有符合条件的点的集合; 若不存在, 请说明理由.



# 2023-2024 学年度高二年级第一学期期中考试

## 数 学 答 案

一、选择题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	B	C	D	C	D	A	C	D

二、填空题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分。

11.  $y + z = -3$ . 12.  $60^\circ$  或者写成  $\frac{\pi}{3}$ . 13.  $y = \frac{3}{4}x + 3$  或者写成  $3x - 4y + 12 = 0$ .

14.  $2\sqrt{3}$ . 15.  $\sqrt{5}$ .

16. ①③④. (不选或所选答案中含有②，得 0 分；所选结论都正确时，选①、③、④中一个得 1 分，两个得 3 分，三个得 5 分)

三、解答题共 5 小题，每小题 14 分，共 70 分。解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(17) (本小题 14 分)

解：(I) 因为直线  $AB$  的斜率为  $k_{AB} = \frac{3-1}{1-3} = -1$ ,

所以直线  $AB$  的方程为  $y - 1 = -(x - 3)$ , 即  $x + y - 4 = 0$ .

设  $\triangle ABC$  的边  $AB$  上的高为  $CM$ , 则  $k_{AB} \cdot k_{CM} = -1$ ,

所以  $k_{CM} = 1$ , 所以边  $AB$  上的高  $CM$  的方程为  $y = x + 1$ , 即  $x - y + 1 = 0$ . ……8 分

(II) 由题意可知,  $|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$ ,

点  $C$  到直线  $AB$  的距离为  $|CM| = d = \frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ ,

所以  $\triangle ABC$  的面积为  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |CM| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 5$ . ……14 分

(18) (本小题 14 分)

解：选择①②：

(I) 因为  $AC = 4$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ ,

所以  $AB \perp AC$ . 关注北京高考在线官方微信：京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

则  $l$  的方程为  $y = 2(x - 1)$ , 即  $2x - y - 2 = 0$ . .....3 分

(II) 由  $P$  为  $AB$  中点, 可知  $PC \perp AB$ , 则  $k_{PC} \cdot k_l = -1$ ,  $\therefore k_{PC} = \frac{2-0}{2-1} = 2$ ,

$\therefore k_l = -\frac{1}{2}$ , 则  $l$  的方程为  $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ , 即  $x + 2y - 6 = 0$ . .....8 分

(III) ① 当  $l$  的斜率  $k$  不存在时,  $l: x = 2$ , 此时  $|AB| = 4\sqrt{2}$ ,  $\therefore x = 2$  成立;

② 当  $l$  的斜率  $k$  存在时, 设直线  $l$  的方程:  $y - 2 = k(x - 2)$ , 即  $kx - y - 2k + 2 = 0$ ,

则圆心  $C$  到  $l$  的距离  $d = \frac{|k - 2k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$ , 得  $k = \frac{3}{4}$ ,  $\therefore l: \frac{3}{4}x - y + \frac{1}{2} = 0$ .

综上, 直线  $l$  的方程为:  $x = 2$ , 或  $3x - 4y + 2 = 0$ . .....14 分

(20) (本小题 14 分)

解: (I) 证明:

因为  $AE \parallel CF$ ,  $AE \subset$  平面  $ADE$ ,  $CF \not\subset$  平面  $ADE$ ,

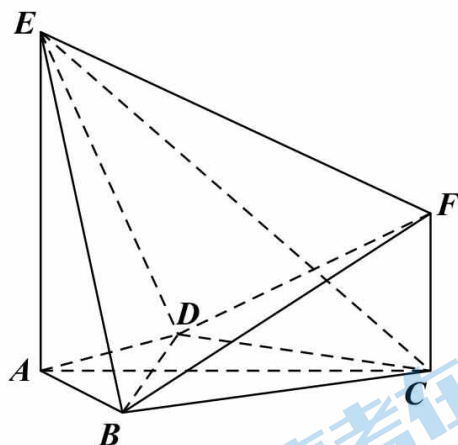
所以  $CF \parallel$  平面  $ADE$ .

因为  $AD \parallel BC$ ,  $AD \subset$  平面  $ADE$ ,  $BC \not\subset$  平面  $ADE$ ,

所以  $BC \parallel$  平面  $ADE$ .

因为  $CF \cap BC = C$ ,  $CF, CB \subset$  平面  $CFB$ , 所以平面  $CFB \parallel$  平面  $ADE$ .

因为  $BF \subset$  平面  $CFB$ , 所以  $BF \parallel$  平面  $ADE$ . .....4 分



(II) 因为  $AE \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $AE \perp AB$ ,  $AE \perp AD$ ,

因为  $AD \perp AB$ , 所以  $AB, AD, AE$  两两相互垂直.

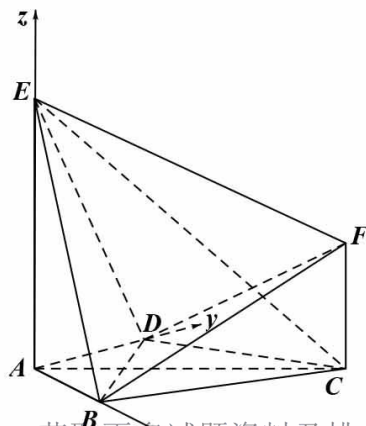
如图, 以点  $A$  为坐标原点, 建立空间直角坐标系  $A-xyz$ .

则  $A(0,0,0)$ ,  $B(1,0,0)$ ,  $C(1,2,0)$ ,  $D(0,1,0)$ ,  $E(0,0,2)$ .

所以  $\overrightarrow{BD} = (-1,1,0)$ ,  $\overrightarrow{BE} = (-1,0,2)$ .

设平面  $BDE$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ , 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x + y = 0, \\ -x + 2z = 0. \end{cases}$$



又因为  $AB \perp AA_1$ ,  $AC \cap AA_1 = A$ ,

所以  $AB \perp$  平面  $AA_1C_1C$ . .....5 分

(II) 由 (I) 知  $AB \perp AC$ ,  $AB \perp AA_1$ .

因为四边形  $AA_1C_1C$  是正方形, 所以  $AC \perp AA_1$ .

如图, 以  $A$  为原点建立空间直角坐标系  $A-xyz$ ,

则  $A(0,0,0)$ ,  $B(3,0,0)$ ,  $C(0,0,4)$ ,

$A_1(0,4,0)$ ,  $C_1(0,4,4)$ ,

$\overrightarrow{A_1B} = (3, -4, 0)$ ,  $\overrightarrow{A_1C_1} = (0, 0, 4)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-3, 0, 4)$ .

设平面  $A_1BC_1$  的一个法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ 4z = 0. \end{cases}$$

令  $y = 3$ , 则  $x = 4$ ,  $z = 0$ , 所以  $\mathbf{n} = (4, 3, 0)$ .

设直线  $BC$  与平面  $A_1BC_1$  所成角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BC}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BC}| |\mathbf{n}|} = \frac{12}{25}.$$

所以直线  $BC$  与平面  $A_1BC_1$  所成角的正弦值为  $\frac{12}{25}$ . .....14 分

选择①③:

(I) 因为  $AC = 4$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ ,

所以  $AB \perp AC$ .

又因为平面  $ABC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ , 平面  $ABC \cap$  平面  $AA_1C_1C = AC$ ,

所以  $AB \perp$  平面  $AA_1C_1C$ . .....5 分

(II) 同上. ....14 分

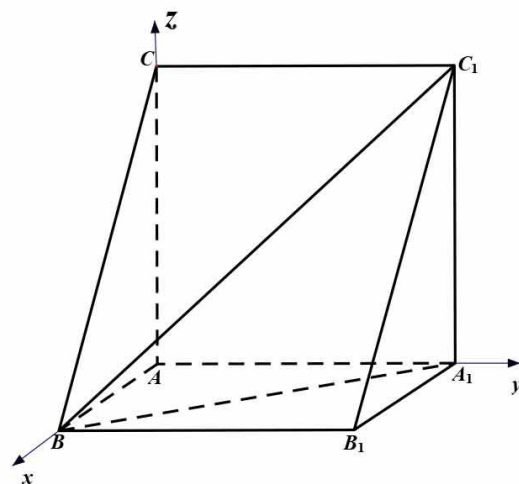
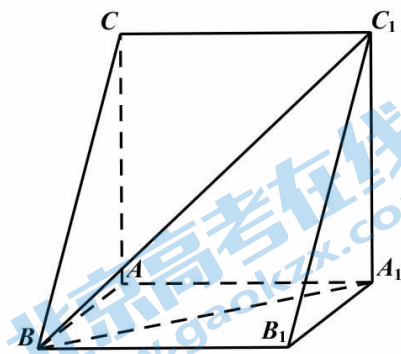
选择②③不能保证  $AB \perp$  平面  $AA_1C_1C$  成立, 不给分.

(19) (本小题 14 分)

解: 圆心  $C(1,0)$ , 半径  $r = 3$ .

(I) 由  $l$  经过圆心  $C(1,0)$  及点  $P(2,2)$ , 知直线  $l$  的斜率  $k = \frac{2-0}{2-1} = 2$ ,

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。



令  $x=2$ ，于是  $y=2$ ， $z=1$ ，所以  $\mathbf{n}=(2,2,1)$ 。

因为  $AE \perp$  平面  $ABCD$ ，所以平面  $BDC$  的法向量为  $\mathbf{m}=(0,0,1)$ 。

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{1}{3}.$$

由题可知二面角  $E-BD-C$  为钝角，

所以二面角  $E-BD-C$  的余弦值为  $-\frac{1}{3}$ 。

.....9 分

(III) 设  $F(1,2,f)$ ， $f > 0$ ，则  $\overrightarrow{BF}=(0,2,f)$

设平面  $BDF$  的法向量为  $\mathbf{u}=(x,y,z)$ ，

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2y + fz = 0, \\ -x + y = 0. \end{cases}$$

令  $y=f$ ，于是  $x=f$ ， $z=-2$ ，所以  $\mathbf{u}=(f,f,-2)$ 。

$$\text{点 } E \text{ 到平面 } BDF \text{ 的距离为 } d = \frac{|\overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{|f+4|}{\sqrt{2f^2+4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 整理得 } |f+4| = 3\sqrt{f^2+2},$$

解得  $f = \frac{1}{2}$ ，即  $CF = \frac{1}{2}$ ，所以，三棱锥  $F-BDC$  的高为  $CF = \frac{1}{2}$ 。

在四边形  $ABCD$  中， $BC \parallel AD$ ， $AB \perp AD$ ， $BC=2$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1,$$

所以四面体  $BCDF$  的体积为

$$V_{BCDF} = V_{F-DBC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle DBC} \times CF = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

注：此时，平面  $BDF$  与平面  $BDE$  相互垂直。

.....14 分

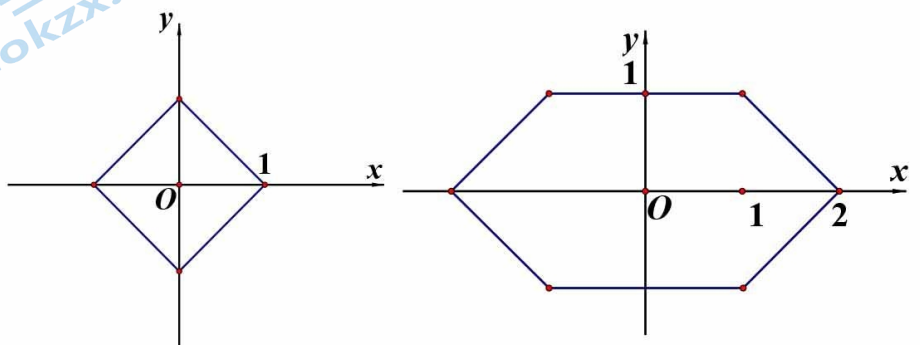
(21) (本小题 14 分)

解：(I) 填空：

①  $\rho(A, B) = 5$ ;

②  $|x| + |y| = 1$ ;

③  $S = 6$ 。.....4 分



关注北京高考在线官方微信：京考一点通 (微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。



(II)

解1: 因为点  $B$  为直线  $l: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$  上的动点, 故可设点  $B$  的坐标为  $B(\sqrt{2}t - 2, t)$ , 则

$$\rho(A, B) = |\sqrt{2}t - 3| + |t| = \sqrt{2} \left| t - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right| + |t| \geq \left| t - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right| + |t| \geq \left| \left( t - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) - t \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

当且仅当  $t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时等号成立, 故  $\rho(A, B)$  的最小值为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

此时点  $B$  的坐标为  $B(1, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ .

.....8 分

解2: 因为点  $B$  为直线  $l: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$  上的动点, 故可设点  $B$  的坐标为  $B(\sqrt{2}t - 2, t)$ , 则

$$\rho(A, B) = |\sqrt{2}t - 3| + |t|.$$

① 当  $t \leq 0$  时,  $\rho(A, B) = 3 - \sqrt{2}t - t = 3 - (\sqrt{2} + 1)t \geq 3$ , 当且仅当  $t = 0$  时取得等号;

② 当  $0 \leq t \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时,  $\rho(A, B) = 3 - \sqrt{2}t + t = 3 - (\sqrt{2} - 1)t \geq 3 - (\sqrt{2} - 1) \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

当且仅当  $t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时取得等号;

③ 当  $t \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时,  $\rho(A, B) = |\sqrt{2}t - 3| + |t| = (\sqrt{2} + 1)t - 3 \geq (\sqrt{2} + 1) \times \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

当且仅当  $t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时取得等号;

综上, 当且仅当  $t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时等号成立, 故  $\rho(A, B)$  的最小值为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,

此时点  $B$  的坐标为  $B(1, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ .

.....8 分

(III) 注意到点  $A(x_1, y_1)$  与点  $B(x_2, y_2)$  不同, 下面分三种情况讨论:

(1) 若  $x_1 = x_2$ , 则  $y_1 \neq y_2$ , 由条件②得  $|x - x_1| + |y - y_1| = |x_2 - x| + |y_2 - y|$ ,

即  $|y - y_1| = |y_2 - y|$ , 所以  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

由条件①得  $|x-x_1|+|y-y_1|+|x_2-x|+|y_2-y|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ ,

所以  $2|x-x_1|+\frac{1}{2}|y_2-y_1|+\frac{1}{2}|y_2-y_1|=|y_2-y_1|$ , 所以  $|x-x_1|=0$ , 即  $x=x_1$ .

因此, 所求的点  $C$  为  $(x_1, \frac{y_1+y_2}{2})$ .

(2) 若  $y_1=y_2$ , 则  $x_1 \neq x_2$ , 类似于前证, 可得符合条件的点  $C$  为  $(\frac{x_1+x_2}{2}, y_1)$ .

(3) 若  $x_1 \neq x_2$ , 且  $y_1 \neq y_2$  时, 不妨设  $x_1 < x_2$ .

由条件①得  $\rho(A, C) + \rho(C, B) = |x-x_1|+|y-y_1|+|x_2-x|+|y_2-y|$

$$= (|x-x_1|+|x_2-x|) + (|y-y_1|+|y_2-y|)$$

$$\geq |x-x_1+x_2-x|+|y-y_1+y_2-y|$$

$$= |x_2-x_1|+|y_2-y_1| = \rho(A, B)$$

当且仅当  $(x-x_1)(x_2-x) \geq 0$  与  $(y-y_1)(y_2-y) \geq 0$  同时成立时取等号.

即当且仅当  $(x-x_1)(x_2-x) \geq 0$  与  $(y-y_1)(y_2-y) \geq 0$  同时成立时条件①成立.

(i) 若  $y_1 < y_2$  时, 则由上述证明可知, 要使条件①成立, 则有  $x_1 \leq x \leq x_2$  且  $y_1 \leq y \leq y_2$ .

从而由条件②得  $x+y = \frac{1}{2}(x_1+x_2+y_1+y_2)$ , 因此所求点  $C$  的集合为

$$M = \left\{ (x, y) \mid x+y = \frac{1}{2}(x_1+x_2+y_1+y_2), x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2 \right\}$$

(ii) 若  $y_1 > y_2$  时, 类似地由条件①可得  $x_1 \leq x \leq x_2$  且  $y_1 \leq y \leq y_2$ .

从而由条件②得  $x-y = \frac{1}{2}(x_1+x_2-y_1-y_2)$ , 因此所求点  $C$  的集合为

$$M = \left\{ (x, y) \mid x-y = \frac{1}{2}(x_1+x_2-y_1-y_2), x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2 \right\}.$$

.....14 分

# 北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者底部栏目<**高一二三**>→**期中试题答案**>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

