

2023 北京高考真题

数 学

本试卷满分 150 分。考试时间 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $M = \{x \mid x+2 \geq 0\}$, $N = \{x \mid x-1 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x \mid -2 < x \leq 1\}$
C. $\{x \mid x \geq -2\}$ D. $\{x \mid x < 1\}$

2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(-1, \sqrt{3})$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ ()

- A. $1+\sqrt{3}i$ B. $1-\sqrt{3}i$
C. $-1+\sqrt{3}i$ D. $-1-\sqrt{3}i$

3. 已知向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $\vec{a}+\vec{b} = (2,3)$, $\vec{a}-\vec{b} = (-2,1)$, 则 $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

4. 下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $f(x) = -\ln x$ B. $f(x) = \frac{1}{2^x}$
C. $f(x) = -\frac{1}{x}$ D. $f(x) = 3^{|x-1|}$

5. $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中 x 的系数为 ()。

- A. -80 B. -40 C. 40 D. 80

6. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 点 M 在 C 上。若 M 到直线 $x = -3$ 的距离为 5, 则 $|MF| =$ ()

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $(a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$, 则 $\angle C =$ ()

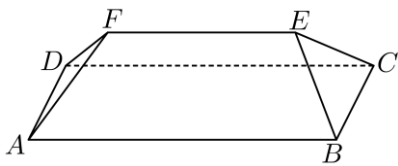
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 若 $xy \neq 0$, 则“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素。安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之

美. 如图, 某坡屋顶可视为一个五面体, 其中两个面是全等的等腰梯形, 两个面是全等的等腰三角形. 若 $AB = 25\text{m}$, $BC = AD = 10\text{m}$, 且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$, 则该五面体的所有棱长之和为 ()



- A. 102m
C. 117m

- B. 112m
D. 125m

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6 (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 ()

- A. 当 $a_1 = 3$ 时, $\{a_n\}$ 为递减数列, 且存在常数 $M \leq 0$, 使得 $a_n > M$ 恒成立
B. 当 $a_1 = 5$ 时, $\{a_n\}$ 为递增数列, 且存在常数 $M \leq 6$, 使得 $a_n < M$ 恒成立
C. 当 $a_1 = 7$ 时, $\{a_n\}$ 为递减数列, 且存在常数 $M > 6$, 使得 $a_n > M$ 恒成立
D. 当 $a_1 = 9$ 时, $\{a_n\}$ 为递增数列, 且存在常数 $M > 0$, 使得 $a_n < M$ 恒成立

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知函数 $f(x) = 4^x + \log_2 x$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.

12. 已知双曲线 C 的焦点为 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$, 离心率为 $\sqrt{2}$, 则 C 的方程为 _____.

13. 已知命题 p : 若 α, β 为第一象限角, 且 $\alpha > \beta$, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$. 能说明 p 为假命题的一组 α, β 的值为 $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____.

14. 我国度量衡的发展有着悠久的历史, 战国时期就已经出现了类似于砝码的、用来测量物体质量的“环权”. 已知 9 枚环权的质量 (单位: 铢) 从小到大构成项数为 9 的数列 $\{a_n\}$, 该数列的前 3 项成等差数列, 后 7 项成等比数列, 且 $a_1 = 1, a_5 = 12, a_9 = 192$, 则 $a_7 =$ _____; 数列 $\{a_n\}$ 所有项的和为 _____.

15. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -a, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & -a \leq x \leq a, \\ -\sqrt{x} - 1, & x > a. \end{cases}$ 给出下列四个结论:

- ① $f(x)$ 在区间 $(a-1, +\infty)$ 上单调递减;
② 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 存在最大值;
③ 设 $M(x_1, f(x_1)) (x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2 > a)$, 则 $|MN| > 1$;

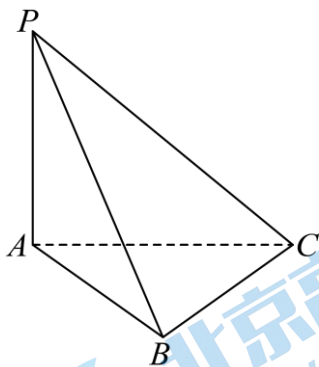
④设 $P(x_3, f(x_3))(x_3 < -a), Q(x_4, f(x_4))(x_4 \geq -a)$. 若 $|PQ|$ 存在最小值, 则 a 的取值范围是

$$\left(0, \frac{1}{2}\right].$$

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = AB = BC = 1, PC = \sqrt{3}$.



(1) 求证: $BC \perp$ 平面 PAB ;

(2) 求二面角 $A-PC-B$ 的大小.

17. 设函数 $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi \left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$.

(1) 若 $f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 φ 的值.

(2) 已知 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中

选择一个作为已知, 使函数 $f(x)$ 存在, 求 ω, φ 的值.

条件①: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$;

条件②: $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$;

条件③: $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (2) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. 为研究某种农产品价格变化的规律, 收集得到了该农产品连续 40 天的价格变化数据, 如下表所示. 在描述价格变化时, 用“+”表示“上涨”, 即当天价格比前一天价格高; 用“-”表示“下跌”, 即当天价格比前一天价格低; 用“0”表示“不变”, 即当天价格与前一天价格相同.

时段	价格变化

第 1 天到第 20 天	-	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	-	-	+	-	+	0	0	+
第 21 天到第 40 天	0	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	+	-	-	-	+	0	-	+

用频率估计概率.

- (1) 试估计该农产品价格“上涨”的概率;
- (2) 假设该农产品每天的价格变化是相互独立的. 在未来的日子里任取 4 天, 试估计该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率;
- (3) 假设该农产品每天的价格变化只受前一天价格变化的影响. 判断第 41 天该农产品价格“上涨”“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大. (结论不要求证明)

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, A, C 分别是 E 的上、下顶点, B, D 分别是 E 的左、右顶点, $|AC| = 4$.

- (1) 求 E 的方程;
- (2) 设 P 为第一象限内 E 上的动点, 直线 PD 与直线 BC 交于点 M , 直线 PA 与直线 $y = -2$ 交于点 N . 求证: $MN \parallel CD$.

20. 设函数 $f(x) = x - x^3 e^{ax+b}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -x + 1$.

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 设函数 $g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;
- (3) 求 $f(x)$ 的极值点个数.

21. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的项数均为 $m (m > 2)$, 且 $a_n, b_n \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n , 并规定 $A_0 = B_0 = 0$. 对于 $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$, 定义 $r_k = \max \{i \mid B_i \leq A_k, i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}\}$, 其中, $\max M$ 表示数集 M 中最大的数.

- (1) 若 $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3, b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 3$, 求 r_0, r_1, r_2, r_3 的值;
- (2) 若 $a_1 \geq b_1$, 且 $2r_j \leq r_{j+1} + r_{j-1}, j = 1, 2, \dots, m-1$, 求 r_n ;
- (3) 证明: 存在 $p, q, s, t \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$, 满足 $p > q, s > t$, 使得 $A_p + B_t = A_q + B_s$.

参考答案

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】A

【分析】先化简集合 M, N ，然后根据交集的定义计算.

【详解】由题意， $M = \{x | x + 2 \geq 0\} = \{x | x \geq -2\}$ ， $N = \{x | x - 1 < 0\} = \{x | x < 1\}$ ，

根据交集的运算可知， $M \cap N = \{x | -2 \leq x < 1\}$.

故选：A

2. 【答案】D

【分析】根据复数的几何意义先求出复数 z ，然后利用共轭复数的定义计算.

【详解】 z 在复平面对应的点是 $(-1, \sqrt{3})$ ，根据复数的几何意义， $z = -1 + \sqrt{3}i$ ，

由共轭复数的定义可知， $\bar{z} = -1 - \sqrt{3}i$.

故选：D

3. 【答案】B

【分析】利用平面向量数量积的运算律，数量积的坐标表示求解作答.

【详解】向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $\vec{a} + \vec{b} = (2, 3)$ ， $\vec{a} - \vec{b} = (-2, 1)$ ，

所以 $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2 \times (-2) + 3 \times 1 = -1$.

故选：B

4. 【答案】C

【分析】利用基本初等函数的单调性，结合复合函数的单调性判断 ABC，举反例排除 D 即可.

【详解】对于 A，因为 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增， $y = -x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x) = -\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故 A 错误；

对于 B，因为 $y = 2^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增， $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x) = \frac{1}{2^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故 B 错误；

对于 C，因为 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减， $y = -x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x) = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故 C 正确；

对于 D，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\left|\frac{1}{2}-1\right|} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ ， $f(1) = 3^{|1-1|} = 3^0 = 1$ ， $f(2) = 3^{|2-1|} = 3$ ，

显然 $f(x) = 3^{|x-1|}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调，D 错误.

故选：C.

5. 【答案】D

【分析】写出 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项即可

【详解】 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r 2^{5-r} C_5^r x^{5-2r}$

令 $5 - 2r = 1$ 得 $r = 2$

所以 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中 x 的系数为 $(-1)^2 2^{5-2} C_5^2 = 80$

故选：D

【点睛】本题考查的是二项式展开式通项的运用，较简单.

6. 【答案】D

【分析】利用抛物线的定义求解即可.

【详解】因为抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点 $F(2, 0)$ ，准线方程为 $x = -2$ ，点 M 在 C 上，

所以 M 到准线 $x = -2$ 的距离为 $|MF|$ ，

又 M 到直线 $x = -3$ 的距离为 5，

所以 $|MF| + 1 = 5$ ，故 $|MF| = 4$.

故选：D.

7. 【答案】B

【分析】利用正弦定理的边角变换与余弦定理即可得解.

【详解】因为 $(a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$ ，

所以由正弦定理得 $(a+c)(a-c) = b(a-b)$ ，即 $a^2 - c^2 = ab - b^2$ ，

则 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ ，故 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$ ，

又 $0 < C < \pi$ ，所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

故选：B.

8. 【答案】C

【分析】解法一：由 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ 化简得到 $x + y = 0$ 即可判断；解法二：证明充分性可由 $x + y = 0$ 得到

$x = -y$ ，代入 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 化简即可，证明必要性可由 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ 去分母，再用完全平方公式即可；解法三：

证明充分性可由 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 通分后用配凑法得到完全平方公式，再把 $x + y = 0$ 代入即可，证明必要性可由

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 通分后用配凑法得到完全平方公式，再把 $x + y = 0$ 代入，解方程即可。

【详解】解法一：

因为 $xy \neq 0$ ，且 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ，

所以 $x^2 + y^2 = -2xy$ ，即 $x^2 + y^2 + 2xy = 0$ ，即 $(x + y)^2 = 0$ ，所以 $x + y = 0$ 。

所以“ $x + y = 0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的充要条件。

解法二：

充分性：因为 $xy \neq 0$ ，且 $x + y = 0$ ，所以 $x = -y$ ，

所以 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{-y}{y} + \frac{y}{-y} = -1 - 1 = -2$ ，

所以充分性成立；

必要性：因为 $xy \neq 0$ ，且 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ，

所以 $x^2 + y^2 = -2xy$ ，即 $x^2 + y^2 + 2xy = 0$ ，即 $(x + y)^2 = 0$ ，所以 $x + y = 0$ 。

所以必要性成立。

所以“ $x + y = 0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的充要条件。

解法三：

充分性：因为 $xy \neq 0$ ，且 $x + y = 0$ ，

所以 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 2xy}{xy} = \frac{(x + y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{-2xy}{xy} = -2$ ，

所以充分性成立；

必要性：因为 $xy \neq 0$ ，且 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ，

所以 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 2xy}{xy} = \frac{(x + y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x + y)^2}{xy} - 2 = -2$ ，

所以 $\frac{(x + y)^2}{xy} = 0$ ，所以 $(x + y)^2 = 0$ ，所以 $x + y = 0$ ，

所以必要性成立。

所以“ $x + y = 0$ ”是“ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ”的充要条件。

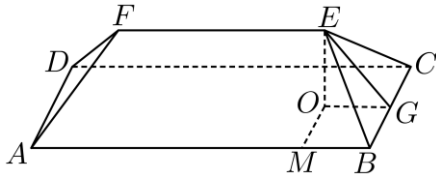
故选：C

9. 【答案】C

【分析】先根据线面角的定义求得 $\tan \angle EMO = \tan \angle EGO = \frac{\sqrt{14}}{5}$ ，从而依次求 EO ， EG ， EB ， EF ，

再把所有棱长相加即可得解。

【详解】如图，过 E 做 $EO \perp$ 平面 $ABCD$ ，垂足为 O ，过 E 分别做 $EG \perp BC$ ， $EM \perp AB$ ，垂足分别为 G ， M ，连接 OG, OM ，



由题意得等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角分别为 $\angle EMO$ 和 $\angle EGO$ ，

所以 $\tan \angle EMO = \tan \angle EGO = \frac{\sqrt{14}}{5}$ 。

因为 $EO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BC \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $EO \perp BC$ ，

因为 $EG \perp BC$ ， $EO, EG \subset$ 平面 EOG ， $EO \cap EG = E$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 EOG ，因为 $OG \subset$ 平面 EOG ，所以 $BC \perp OG$ ，

同理： $OM \perp BM$ ，又 $BM \perp BG$ ，故四边形 $OMBG$ 是矩形，

所以由 $BC = 10$ 得 $OM = 5$ ，所以 $EO = \sqrt{14}$ ，所以 $OG = 5$ ，

所以在直角三角形 EOG 中， $EG = \sqrt{EO^2 + OG^2} = \sqrt{(\sqrt{14})^2 + 5^2} = \sqrt{39}$

在直角三角形 EBG 中， $BG = OM = 5$ ， $EB = \sqrt{EG^2 + BG^2} = \sqrt{(\sqrt{39})^2 + 5^2} = 8$ ，

又因为 $EF = AB - 5 - 5 = 25 - 5 - 5 = 15$ ，

所有棱长之和为 $2 \times 25 + 2 \times 10 + 15 + 4 \times 8 = 117$ m。

故选：C

10. 【答案】B

【分析】法 1：利用数列归纳法可判断 ACD 正误，利用递推可判断数列的性质，故可判断 B 的正误。

法 2：构造 $f(x) = \frac{1}{4}(x-6)^3 + 6 - x$ ，利用导数求得 $f(x)$ 的正负情况，再利用数学归纳法判断得各选项

a_n 所在区间，从而判断 $\{a_n\}$ 的单调性；对于 A，构造 $h(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 26x - 47 (x \leq 3)$ ，判断得

$a_{n+1} < a_n - 1$ ，进而取 $m = -[M] + 4$ 推得 $a_n > M$ 不恒成立；对于 B，证明 a_n 所在区间同时证得后续结论；

对于 C，记 $m_0 = \log_3 \left[2 \log_{\frac{1}{4}} (M-6) + 1 \right]$ ，取 $m = [m_0] + 1$ 推得 $a_n > M$ 不恒成立；对于 D，构造

$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 26x - 49 (x \geq 9)$ ，判断得 $a_{n+1} > a_n + 1$ ，进而取 $m = [M] + 1$ 推得 $a_n < M$ 不恒成立。

【详解】法1：因为 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6$ ，故 $a_{n+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3$ ，

对于 A，若 $a_1 = 3$ ，可用数学归纳法证明： $a_n - 6 \leq -3$ 即 $a_n \leq 3$ ，

证明：当 $n = 1$ 时， $a_1 - 6 = -3 \leq -3$ ，此时不等关系 $a_n \leq 3$ 成立；

设当 $n = k$ 时， $a_k - 6 \leq -3$ 成立，

则 $a_{k+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 \in \left(-54, -\frac{27}{4}\right)$ ，故 $a_{k+1} - 6 \leq -3$ 成立，

由数学归纳法可得 $a_n \leq 3$ 成立。

而 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 - (a_n - 6) = (a_n - 6) \left[\frac{1}{4}(a_n - 6)^2 - 1 \right]$ ，

$\frac{1}{4}(a_n - 6)^2 - 1 \geq \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} > 0$ ， $a_n - 6 < 0$ ，故 $a_{n+1} - a_n < 0$ ，故 $a_{n+1} < a_n$ ，

故 $\{a_n\}$ 为减数列，注意 $a_{k+1} - 6 \leq -3 < 0$

故 $a_{n+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 = (a_n - 6) \times \frac{1}{4}(a_n - 6)^2 \leq \frac{9}{4}(a_n - 6)$ ，结合 $a_{n+1} - 6 < 0$ ，

所以 $6 - a_{n+1} \geq \frac{9}{4}(6 - a_n)$ ，故 $6 - a_{n+1} \geq 3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$ ，故 $a_{n+1} \leq 6 - 3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$ ，

若存在常数 $M \leq 0$ ，使得 $a_n > M$ 恒成立，则 $6 - 3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1} > M$ ，

故 $\frac{6 - M}{3} > \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$ ，故 $n < 1 + \log_{\frac{9}{4}} \frac{6 - M}{3}$ ，故 $a_n > M$ 恒成立仅对部分 n 成立，

故 A 不成立。

对于 B，若 $a_1 = 5$ ，可用数学归纳法证明： $-1 \leq a_n - 6 < 0$ 即 $5 \leq a_n < 6$ ，

证明：当 $n = 1$ 时， $-1 \leq a_1 - 6 = -1 \leq 0$ ，此时不等关系 $5 \leq a_n < 6$ 成立；

设当 $n = k$ 时， $5 \leq a_k < 6$ 成立，

则 $a_{k+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ ，故 $-1 \leq a_{k+1} - 6 < 0$ 成立即

由数学归纳法可得 $5 \leq a_{k+1} < 6$ 成立。

而 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 - (a_n - 6) = (a_n - 6) \left[\frac{1}{4}(a_n - 6)^2 - 1 \right]$ ，

$\frac{1}{4}(a_n - 6)^2 - 1 < 0$ ， $a_n - 6 < 0$ ，故 $a_{n+1} - a_n > 0$ ，故 $a_{n+1} > a_n$ ，故 $\{a_n\}$ 为增数列，

若 $M = 6$ ，则 $a_n < 6$ 恒成立，故 B 正确。

对于 C, 当 $a_1 = 7$ 时, 可用数学归纳法证明: $0 < a_n - 6 \leq 1$ 即 $6 < a_n \leq 7$,

证明: 当 $n = 1$ 时, $0 < a_1 - 6 \leq 1$, 此时不等关系成立;

设当 $n = k$ 时, $6 < a_k \leq 7$ 成立,

则 $a_{k+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$, 故 $0 < a_{k+1} - 6 \leq 1$ 成立即 $6 < a_{k+1} \leq 7$

由数学归纳法可得 $6 < a_n \leq 7$ 成立.

而 $a_{n+1} - a_n = (a_n - 6) \left[\frac{1}{4}(a_n - 6)^2 - 1 \right] < 0$, 故 $a_{n+1} < a_n$, 故 $\{a_n\}$ 为减数列,

又 $a_{n+1} - 6 = (a_n - 6) \times \frac{1}{4}(a_n - 6)^2 \leq \frac{1}{4}(a_n - 6)$, 结合 $a_{n+1} - 6 > 0$ 可得: $a_{n+1} - 6 \leq (a_1 - 6) \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 所以

$$a_{n+1} \leq 6 + \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

若 $a_{n+1} \leq 6 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$, 若存在常数 $M > 6$, 使得 $a_n > M$ 恒成立,

则 $M - 6 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 恒成立, 故 $n \leq \log_{\frac{1}{4}}(M - 6)$, n 的个数有限, 矛盾, 故 C 错误.

对于 D, 当 $a_1 = 9$ 时, 可用数学归纳法证明: $a_n - 6 \geq 3$ 即 $a_n \geq 9$,

证明: 当 $n = 1$ 时, $a_1 - 6 = 3 \geq 3$, 此时不等关系成立;

设当 $n = k$ 时, $a_k \geq 9$ 成立,

则 $a_{k+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 \geq \frac{27}{4} > 3$, 故 $a_{k+1} \geq 9$ 成立

由数学归纳法可得 $a_n \geq 9$ 成立.

而 $a_{n+1} - a_n = (a_n - 6) \left[\frac{1}{4}(a_n - 6)^2 - 1 \right] > 0$, 故 $a_{n+1} > a_n$, 故 $\{a_n\}$ 为增数列,

又 $a_{n+1} - 6 = (a_n - 6) \times \frac{1}{4}(a_n - 6)^2 > \frac{9}{4}(a_n - 6)$, 结合 $a_n - 6 > 0$ 可得:

$$a_{n+1} - 6 > (a_1 - 6) \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1} = 3 \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}, \text{ 所以 } a_{n+1} \geq 6 + 3 \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1},$$

若存在常数 $M > 0$, 使得 $a_n < M$ 恒成立, 则 $M > 6 + 3 \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$,

故 $M > 6 + 3 \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$, 故 $n < \log_{\frac{9}{4}} \left(\frac{M - 6}{3}\right) + 1$, 这与 n 的个数有限矛盾, 故 D 错误.

故选: B.

法2: 因为 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6 - a_n = \frac{1}{4}a_n^3 - \frac{9}{2}a_n^2 + 26a_n - 48$,

令 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 26x - 48$, 则 $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9x + 26$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $x > 6 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $6 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < x < 6 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 和 $(6 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 6 + \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 上单调递减,

令 $f(x) = 0$, 则 $\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 26x - 48 = 0$, 即 $\frac{1}{4}(x-4)(x-6)(x-8) = 0$, 解得 $x = 4$ 或 $x = 6$ 或 $x = 8$,

注意到 $4 < 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < 5$, $7 < 6 + \frac{2\sqrt{3}}{3} < 8$,

所以结合 $f(x)$ 的单调性可知在 $(-\infty, 4)$ 和 $(6, 8)$ 上 $f(x) < 0$, 在 $(4, 6)$ 和 $(8, +\infty)$ 上 $f(x) > 0$,

对于 A, 因为 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6$, 则 $a_{n+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 3$, $a_2 - 6 = \frac{1}{4}(a_1 - 6)^3 < -3$, 则 $a_2 < 3$,

假设当 $n = k$ 时, $a_k < 3$,

当 $n = k + 1$ 时, $a_{k+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 < \frac{1}{4}(3 - 6)^3 < -3$, 则 $a_{k+1} < 3$,

综上: $a_n \leq 3$, 即 $a_n \in (-\infty, 4)$,

因为在 $(-\infty, 4)$ 上 $f(x) < 0$, 所以 $a_{n+1} < a_n$, 则 $\{a_n\}$ 为递减数列,

因为 $a_{n+1} - a_n + 1 = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6 - a_n + 1 = \frac{1}{4}a_n^3 - \frac{9}{2}a_n^2 + 26a_n - 47$,

令 $h(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 26x - 47 (x \leq 3)$, 则 $h'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9x + 26$,

因为 $h'(x)$ 开口向上, 对称轴为 $x = -\frac{-9}{2 \times \frac{3}{4}} = 6$,

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty, 3]$ 上单调递减, 故 $h'(x) \geq h'(3) = \frac{3}{4} \times 3^2 - 9 \times 3 + 26 > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 3]$ 上单调递增, 故 $h(x) \leq h(3) = \frac{1}{4} \times 3^3 - \frac{9}{2} \times 3^2 + 26 \times 3 - 47 < 0$,

故 $a_{n+1} - a_n + 1 < 0$, 即 $a_{n+1} < a_n - 1$,

假设存在常数 $M \leq 0$, 使得 $a_n > M$ 恒成立,

取 $m = -[M] + 4$, 其中 $M - 1 < [M] \leq M$, 且 $[M] \in \mathbb{Z}$,

因为 $a_{n+1} < a_n - 1$, 所以 $a_2 < a_1 - 1, a_3 < a_2 - 1, \dots, a_{-[M]+4} < a_{-[M]+3} - 1$,

上式相加得, $a_{-[M]+4} < a_1 - (-[M] + 3) \leq 3 + M - 3 = M$,

则 $a_m = a_{[M]+4} < M$, 与 $a_n > M$ 恒成立矛盾, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $a_1 = 5$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 5 < 6$, $a_2 = \frac{1}{4}(a_1 - 6)^3 + 6 = \frac{1}{4} \times (5 - 6)^3 + 6 < 6$,

假设当 $n = k$ 时, $a_k < 6$,

当 $n = k + 1$ 时, 因为 $a_k < 6$, 所以 $a_k - 6 < 0$, 则 $(a_k - 6)^3 < 0$,

所以 $a_{k+1} = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 + 6 < 6$,

又当 $n = 1$ 时, $a_2 - 5 = \frac{1}{4}(a_1 - 6)^3 + 1 = \frac{1}{4} \times (5 - 6)^3 + 1 > 0$, 即 $a_2 > 5$,

假设当 $n = k$ 时, $a_k \geq 5$,

当 $n = k + 1$ 时, 因为 $a_k \geq 5$, 所以 $a_k - 6 \geq -1$, 则 $(a_k - 6)^3 \geq -1$,

所以 $a_{k+1} = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 + 6 \geq 5$,

综上: $5 \leq a_n < 6$,

因为在 $(4, 6)$ 上 $f(x) > 0$, 所以 $a_{n+1} > a_n$, 所以 $\{a_n\}$ 为递增数列,

此时, 取 $M = 6$, 满足题意, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6$, 则 $a_{n+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3$,

注意到当 $a_1 = 7$ 时, $a_2 = \frac{1}{4}(7 - 6)^3 + 6 = \frac{1}{4} + 6$, $a_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 6 - 6\right)^3 + 6 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 6$,

$a_4 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 6 - 6\right]^3 + 6 = \left(\frac{1}{4}\right)^{13} + 6$

猜想当 $n \geq 2$ 时, $a_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^k-1)} + 6$,

当 $n=2$ 与 $n=3$ 时, $a_2 = \frac{1}{4} + 6$ 与 $a_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 6$ 满足 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^n-1)} + 6$,

假设当 $n=k$ 时, $a_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^k-1)} + 6$,

当 $n=k+1$ 时, 所以 $a_{k+1} = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 + 6 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^k-1)} + 6 - 6 \right]^3 + 6 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^{k+1}-1)} + 6$,

综上: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^n-1)} + 6 (n \geq 2)$,

易知 $3^n - 1 > 0$, 则 $0 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^n-1)} < 1$, 故 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^n-1)} + 6 \in (6, 7) (n \geq 2)$,

所以 $a_n \in (6, 7]$,

因为在 $(6, 8)$ 上 $f(x) < 0$, 所以 $a_{n+1} < a_n$, 则 $\{a_n\}$ 为递减数列,

假设存在常数 $M > 6$, 使得 $a_n > M$ 恒成立,

记 $m_0 = \log_3 \left[2 \log_{\frac{1}{4}} (M - 6) + 1 \right]$, 取 $m = [m_0] + 1$, 其中 $m_0 - 1 < [m_0] \leq m_0, m_0 \in \mathbb{N}^*$,

则 $3^m > 3^{m_0} = 2 \log_{\frac{1}{4}} (M - 6) + 1$,

故 $\frac{1}{2}(3^m - 1) > \log_{\frac{1}{4}} (M - 6)$, 所以 $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^m-1)} < M - 6$, 即 $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^m-1)} + 6 < M$,

所以 $a_m < M$, 故 $a_n > M$ 不恒成立, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $a_1 = 9$,

当 $n=1$ 时, $a_2 - 6 = \frac{1}{4}(a_1 - 6)^3 = \frac{27}{4} > 3$, 则 $a_2 > 9$,

假设当 $n=k$ 时, $a_k \geq 9$,

当 $n=k+1$ 时, $a_{k+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_k - 6)^3 \geq \frac{1}{4}(9 - 6)^3 > 3$, 则 $a_{k+1} > 9$,

综上: $a_n \geq 9$,

因为在 $(8, +\infty)$ 上 $f(x) > 0$, 所以 $a_{n+1} > a_n$, 所以 $\{a_n\}$ 为递增数列,

因为 $a_{n+1} - a_n - 1 = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6 - a_n - 1 = \frac{1}{4}a_n^3 - \frac{9}{2}a_n^2 + 26a_n - 49$,

令 $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 26x - 49 (x \geq 9)$, 则 $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9x + 26$,

因为 $g'(x)$ 开口向上, 对称轴为 $x = -\frac{-9}{2 \times \frac{3}{4}} = 6$,

所以 $g'(x)$ 在 $[9, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g'(x) \geq g'(9) = \frac{3}{4} \times 9^2 - 9 \times 9 + 26 > 0$,

所以 $g(x) \geq g(9) = \frac{1}{4} \times 9^3 - \frac{9}{2} \times 9^2 + 26 \times 9 - 49 > 0$,

故 $a_{n+1} - a_n - 1 > 0$, 即 $a_{n+1} > a_n + 1$,

假设存在常数 $M > 0$, 使得 $a_n < M$ 恒成立,

取 $m = [M] + 1$, 其中 $M - 1 < [M] \leq M$, 且 $[M] \in \mathbb{Z}$,

因为 $a_{n+1} > a_n + 1$, 所以 $a_2 > a_1 + 1, a_3 > a_2 + 1, \dots, a_{[M]+1} > a_{[M]} + 1$,

上式相加得, $a_{[M]+1} > a_1 + [M] > 9 + M - 1 > M$,

则 $a_m = a_{[M]+1} > M$, 与 $a_n < M$ 恒成立矛盾, 故 D 错误.

故选: B.

【点睛】关键点睛: 本题解决的关键是根据首项给出与通项性质相关的相应的命题, 再根据所得命题结合放缩法得到通项所满足的不等式关系, 从而可判断数列的上界或下界是否成立.

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 【答案】1

【分析】根据给定条件, 把 $x = \frac{1}{2}$ 代入, 利用指数、对数运算计算作答.

【详解】函数 $f(x) = 4^x + \log_2 x$, 所以 $f(\frac{1}{2}) = 4^{\frac{1}{2}} + \log_2 \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$.

故答案为: 1

12. 【答案】 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

【分析】根据给定条件, 求出双曲线 C 的实半轴、虚半轴长, 再写出 C 的方程作答.

【详解】令双曲线 C 的实半轴、虚半轴长分别为 a, b , 显然双曲线 C 的中心为原点, 焦点在 x 轴上, 其半焦距 $c = 2$,

由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$, 得 $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, 解得 $a = \sqrt{2}$, 则 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2}$,

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

故答案为: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

13. 【答案】 ①. $\frac{9\pi}{4}$ ②. $\frac{\pi}{3}$

【分析】根据正切函数单调性以及任意角的定义分析求解.

【详解】因为 $f(x) = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 若 $0 < \alpha_0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan \alpha_0 < \tan \beta_0$,

取 $\alpha = 2k_1\pi + \alpha_0, \beta = 2k_2\pi + \beta_0, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$,

则 $\tan \alpha = \tan(2k_1\pi + \alpha_0) = \tan \alpha_0, \tan \beta = \tan(2k_2\pi + \beta_0) = \tan \beta_0$, 即 $\tan \alpha < \tan \beta$,

令 $k_1 > k_2$, 则 $\alpha - \beta = (2k_1\pi + \alpha_0) - (2k_2\pi + \beta_0) = 2(k_1 - k_2)\pi + (\alpha_0 - \beta_0)$,

因为 $2(k_1 - k_2)\pi \geq 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \alpha_0 - \beta_0 < 0$, 则 $\alpha - \beta = 2(k_1 - k_2)\pi + (\alpha_0 - \beta_0) > \frac{3\pi}{2} > 0$,

即 $k_1 > k_2$, 则 $\alpha > \beta$.

不妨取 $k_1 = 1, k_2 = 0, \alpha_0 = \frac{\pi}{4}, \beta_0 = \frac{\pi}{3}$, 即 $\alpha = \frac{9\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}$ 满足题意.

故答案为: $\frac{9\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$.

14. 【答案】 ①. 48 ②. 384

【分析】方法一: 根据题意结合等差、等比数列的通项公式列式求解 d, q , 进而可求得结果; 方法二: 根据等比中项求 a_7, a_3 , 在结合等差、等比数列的求和公式运算求解.

【详解】方法一: 设前 3 项的公差为 d , 后 7 项公比为 $q > 0$,

则 $q^4 = \frac{a_9}{a_5} = \frac{192}{12} = 16$, 且 $q > 0$, 可得 $q = 2$,

则 $a_3 = 1 + 2d = \frac{a_5}{q^2}$, 即 $1 + 2d = 3$, 可得 $d = 1$,

空 1: 可得 $a_3 = 3, a_7 = a_3 q^4 = 48$,

空 2: $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 1 + 2 + 3 + 3 \times 2 + \dots + 3 \times 2^6 = 3 + \frac{3(1-2^7)}{1-2} = 384$

方法二: 空 1: 因为 $\{a_n\}, 3 \leq n \leq 7$ 为等比数列, 则 $a_7^2 = a_5 a_9 = 12 \times 192 = 48^2$,

且 $a_n > 0$, 所以 $a_7 = 48$;

又因为 $a_5^2 = a_3 a_7$, 则 $a_3 = \frac{a_5^2}{a_7} = 3$;

空 2: 设后 7 项公比为 $q > 0$, 则 $q^2 = \frac{a_5}{a_3} = 4$, 解得 $q = 2$,

可得 $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3(a_1 + a_3)}{2} = 6, a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = \frac{a_3 - a_9 q}{1 - q} = \frac{3 - 192 \times 2}{1 - 2} = 381$,

所以 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 6 + 381 - a_3 = 384$.

故答案为: 48; 384.

15. 【答案】②③

【分析】先分析 $f(x)$ 的图像, 再逐一分析各结论: 对于①, 取 $a = \frac{1}{2}$, 结合图像即可判断; 对于②, 分段讨论 $f(x)$ 的取值范围, 从而得以判断; 对于③, 结合图像可知 $|MN|$ 的范围; 对于④, 取 $a = \frac{4}{5}$, 结合图像可知此时 $|PQ|$ 存在最小值, 从而得以判断.

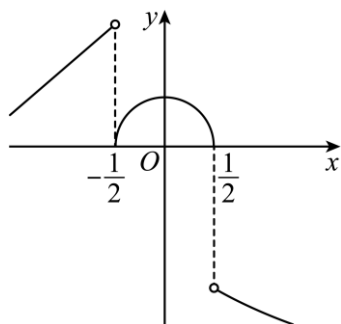
【详解】依题意, $a > 0$,

当 $x < -a$ 时, $f(x) = x + 2$, 易知其图像为一条端点取不到值的单调递增的射线;

当 $-a \leq x \leq a$ 时, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, 易知其图像是, 圆心为 $(0, 0)$, 半径为 a 的圆在 x 轴上方的图像 (即半圆);

当 $x > a$ 时, $f(x) = -\sqrt{x} - 1$, 易知其图像是一条端点取不到值的单调递减的曲线;

对于①, 取 $a = \frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 的图像如下,



显然, 当 $x \in (a - 1, +\infty)$, 即 $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 上单调递增, 故①错误;

对于②, 当 $a \geq 1$ 时,

当 $x < -a$ 时, $f(x) = x + 2 < -a + 2 \leq 1$;

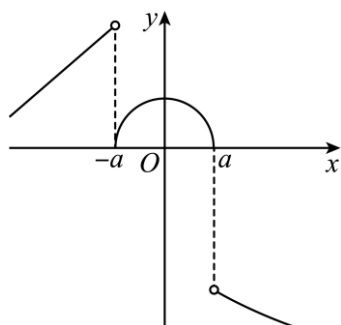
当 $-a \leq x \leq a$ 时, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ 显然取得最大值 a ;

当 $x > a$ 时, $f(x) = -\sqrt{x} - 1 < -\sqrt{a} - 1 \leq -2$,

综上： $f(x)$ 取得最大值 a ，故②正确；

对于③，结合图像，易知在 $x_1 = a$ ， $x_2 > a$ 且接近于 $x = a$ 处，

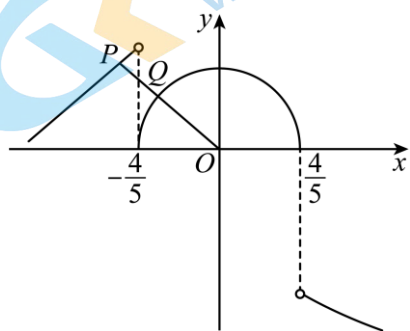
$M(x_1, f(x_1))(x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2))(x_2 > a)$ 的距离最小，



当 $x_1 = a$ 时， $y = f(x_1) = 0$ ，当 $x_2 > a$ 且接近于 $x = a$ 处， $y_2 = f(x_2) < -\sqrt{a} - 1$ ，

此时， $|MN| > y_1 - y_2 > \sqrt{a} + 1 > 1$ ，故③正确；

对于④，取 $a = \frac{4}{5}$ ，则 $f(x)$ 的图像如下，



因为 $P(x_3, f(x_3))(x_3 < -a), Q(x_4, f(x_4))(x_4 \geq -a)$ ，

结合图像可知，要使 $|PQ|$ 取得最小值，则点 P 在 $f(x) = x + 2 \left(x < -\frac{4}{5} \right)$ 上，点 Q 在

$$f(x) = \sqrt{\frac{16}{25} - x^2} \left(-\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{4}{5} \right),$$

同时 $|PQ|$ 的最小值为点 O 到 $f(x) = x + 2 \left(x < -\frac{4}{5} \right)$ 的距离减去半圆的半径 a ，

此时，因为 $f(x) = y = x + 2 \left(x < -\frac{4}{5} \right)$ 的斜率为1，则 $k_{OP} = -1$ ，故直线 OP 的方程为 $y = -x$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x \\ y = x + 2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}, \text{则} P(-1, 1),$$

显然 $P(-1, 1)$ 在 $f(x) = x + 2 \left(x < -\frac{4}{5} \right)$ 上，满足 $|PQ|$ 取得最小值，

即 $a = \frac{4}{5}$ 也满足 $|PQ|$ 存在最小值，故 a 的取值范围不仅仅是 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ ，故④错误。

故答案为：②③。

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是分析得 $f(x)$ 的图像，特别是当 $-a \leq x \leq a$ 时， $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ 的图像为半圆，解决命题④时，可取特殊值进行排除即可。

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\pi}{3}$

【分析】(1) 先由线面垂直的性质证得 $PA \perp BC$ ，再利用勾股定理证得 $BC \perp PB$ ，从而利用线面垂直的判定定理即可得证；

(2) 结合 (1) 中结论，建立空间直角坐标系，分别求得平面 PAC 与平面 PBC 的法向量，再利用空间向量夹角余弦的坐标表示即可得解。

【小问 1 详解】

因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PA \perp BC$ ，同理 $PA \perp AB$ ，

所以 $\triangle PAB$ 为直角三角形，

又因为 $PB = \sqrt{PA^2 + AB^2} = \sqrt{2}$ ， $BC = 1$, $PC = \sqrt{3}$ ，

所以 $PB^2 + BC^2 = PC^2$ ，则 $\triangle PBC$ 为直角三角形，故 $BC \perp PB$ ，

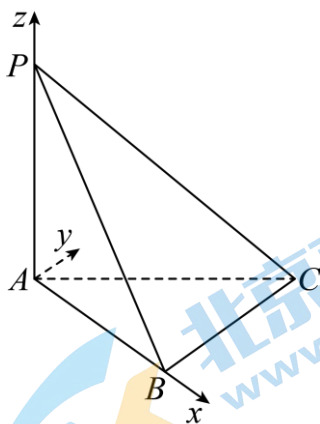
又因为 $BC \perp PA$ ， $PA \cap PB = P$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 PAB 。

【小问 2 详解】

由 (1) $BC \perp$ 平面 PAB ，又 $AB \subset$ 平面 PAB ，则 $BC \perp AB$ ，

以 A 为原点， AB 为 x 轴，过 A 且与 BC 平行的直线为 y 轴， AP 为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图，



则 $A(0, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$, $C(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 0)$ ，

所以 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{PC} = (1, 1, -1)$ ，

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AP} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} z_1 = 0, \\ x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$

令 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = -1$, 所以 $\vec{m} = (1, -1, 0)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} y_2 = 0 \\ x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{cases}$,

令 $x_2 = 1$, 则 $z_2 = 1$, 所以 $\vec{n} = (1, 0, 1)$,

所以 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,

又因为二面角 $A-PC-B$ 为锐二面角,

所以二面角 $A-PC-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

17. 【答案】(1) $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

(2) 条件①不能使函数 $f(x)$ 存在; 条件②或条件③可解得 $\omega = 1$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

【分析】(1) 把 $x = 0$ 代入 $f(x)$ 的解析式求出 $\sin \varphi$, 再由 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 即可求出 φ 的值;

(2) 若选条件①不合题意; 若选条件②, 先把 $f(x)$ 的解析式化简, 根据 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的单调性及

函数的最值可求出 T , 从而求出 ω 的值; 把 ω 的值代入 $f(x)$ 的解析式, 由 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$ 和 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 即可求

出 φ 的值; 若选条件③: 由 $f(x)$ 的单调性可知 $f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{3}$ 处取得最小值 -1 , 则与条件②所给的条件

一样, 解法与条件②相同.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$

所以 $f(0) = \sin(\omega \cdot 0) \cos \varphi + \cos(\omega \cdot 0) \sin \varphi = \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

因为 $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$,

所以 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x)$ 的最大值为1, 最小值为-1.

若选条件①: 因为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的最大值为1, 最小值为-1, 所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$ 无解, 故条件①不能使函数 $f(x)$ 存在;

若选条件②: 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1, f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$

所以 $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \pi$, 所以 $T = 2\pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$,

所以 $f(x) = \sin(x + \varphi)$,

又因为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$, 所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = -1$,

所以 $-\frac{\pi}{3} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

所以 $\omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{6}$;

若选条件③: 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{3}$ 处取得最小值-1, 即 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

以下与条件②相同.

18. 【答案】(1) 0.4

(2) 0.168

(3) 不变

【分析】(1) 计算表格中的+的次数, 然后根据古典概型进行计算;

(2) 分别计算出表格中上涨, 不变, 下跌的概率后进行计算;

(3) 通过统计表格中前一次上涨, 后一次发生的各种情况进行推断第41天的情况.

【小问1详解】

根据表格数据可以看出, 40天里, 有16个+, 也就是有16天是上涨的,

根据古典概型的计算公式, 农产品价格上涨的概率为: $\frac{16}{40} = 0.4$

【小问2详解】

在这40天里, 有16天上涨, 14天下跌, 10天不变, 也就是上涨, 下跌, 不变的概率分别是0.4, 0.35,

0.25,

于是未来任取4天, 2天上涨, 1天下跌, 1天不变的概率是 $C_4^2 \times 0.4^2 \times C_2^1 \times 0.35 \times 0.25 = 0.168$

【小问3详解】

由于第40天处于上涨状态, 从前39次的15次上涨进行分析, 上涨后下一次仍上涨的有4次, 不变的有9次, 下跌的有2次,

因此估计第41次不变的概率最大.

19. 【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 结合题意得到 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $2b=4$, 再结合 $a^2 - c^2 = b^2$, 解之即可;

(2) 依题意求得直线 BC 、 PD 与 PA 的方程, 从而求得点 M, N 的坐标, 进而求得 k_{MN} , 再根据题意求得 k_{CD} , 得到 $k_{MN} = k_{CD}$, 由此得解.

【小问1详解】

依题意, 得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 则 $c = \frac{\sqrt{5}}{3}a$,

又 A, C 分别为椭圆上下顶点, $|AC| = 4$, 所以 $2b = 4$, 即 $b = 2$,

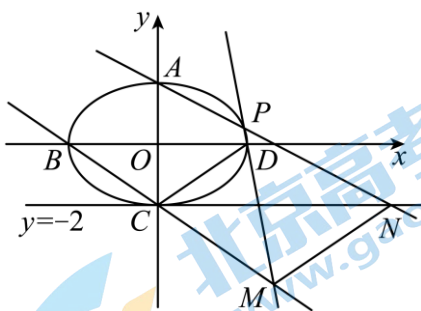
所以 $a^2 - c^2 = b^2 = 4$, 即 $a^2 - \frac{5}{9}a^2 = \frac{4}{9}a^2 = 4$, 则 $a^2 = 9$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

【小问2详解】

因为椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, 所以 $A(0, 2), C(0, -2), B(-3, 0), D(3, 0)$,

因为 P 为第一象限 E 上的动点, 设 $P(m, n) (0 < m < 3, 0 < n < 2)$, 则 $\frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{4} = 1$,



易得 $k_{BC} = \frac{0+2}{-3-0} = -\frac{2}{3}$, 则直线 BC 的方程为 $y = -\frac{2}{3}x - 2$,

$k_{PD} = \frac{n-0}{m-3} = \frac{n}{m-3}$, 则直线 PD 的方程为 $y = \frac{n}{m-3}(x-3)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{n}{m-3}(x-3) \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6} \\ y = \frac{-12n}{3n+2m-6} \end{cases}, \text{即 } M\left(\frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6}, \frac{-12n}{3n+2m-6}\right),$$

而 $k_{PA} = \frac{n-2}{m-0} = \frac{n-2}{m}$, 则直线 PA 的方程为 $y = \frac{n-2}{m}x + 2$,

令 $y = -2$, 则 $-2 = \frac{n-2}{m}x + 2$, 解得 $x = \frac{-4m}{n-2}$, 即 $N\left(\frac{-4m}{n-2}, -2\right)$,

又 $\frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{4} = 1$, 则 $m^2 = 9 - \frac{9n^2}{4}$, $8m^2 = 72 - 18n^2$,

$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{\frac{-12n}{3n+2m-6} + 2}{\frac{3(3n-2m+6)}{3n+2m-6} - \frac{-4m}{n-2}} = \frac{(-6n+4m-12)(n-2)}{(9n-6m+18)(n-2) + 4m(3n+2m-6)}$$

$$= \frac{-6n^2 + 4mn - 8m + 24}{9n^2 + 8m^2 + 6mn - 12m - 36} = \frac{-6n^2 + 4mn - 8m + 24}{9n^2 + 72 - 18n^2 + 6mn - 12m - 36}$$

$$= \frac{-6n^2 + 4mn - 8m + 24}{-9n^2 + 6mn - 12m + 36} = \frac{2(-3n^2 + 2mn - 4m + 12)}{3(-3n^2 + 2mn - 4m + 12)} = \frac{2}{3},$$

又 $k_{CD} = \frac{0+2}{3-0} = \frac{2}{3}$, 即 $k_{MN} = k_{CD}$,

显然, MN 与 CD 不重合, 所以 $MN \parallel CD$.

20. 【答案】(1) $a = -1, b = 1$

(2) 答案见解析 (3) 3 个

【分析】(1) 先对 $f(x)$ 求导, 利用导数的几何意义得到 $f(1) = 0$, $f'(1) = -1$, 从而得到关于 a, b 的方程组, 解之即可;

(2) 由 (1) 得 $g(x)$ 的解析式, 从而求得 $g'(x)$, 利用数轴穿根法求得 $g'(x) < 0$ 与 $g'(x) > 0$ 的解, 由此求得 $g(x)$ 的单调区间;

(3) 结合 (2) 中结论, 利用零点存在定理, 依次分类讨论区间 $(-\infty, 0)$, $(0, x_1)$, (x_1, x_2) 与 $(x_2, +\infty)$ 上 $f'(x)$ 的零点的情况, 从而利用导数与函数的极值点的关系求得 $f(x)$ 的极值点个数.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = x - x^3 e^{ax+b}$, $x \in \mathbb{R}$, 所以 $f'(x) = 1 - (3x^2 + ax^3)e^{ax+b}$,

因为 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -x + 1$,

所以 $f(1) = -1 + 1 = 0$, $f'(1) = -1$,

$$\text{则 } \begin{cases} 1 - 1^3 \times e^{a+b} = 0 \\ 1 - (3+a)e^{a+b} = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases},$$

所以 $a = -1, b = 1$.

【小问 2 详解】

由 (1) 得 $g(x) = f'(x) = 1 - (3x^2 - x^3)e^{-x+1} (x \in \mathbf{R})$,

则 $g'(x) = -x(x^2 - 6x + 6)e^{-x+1}$,

令 $x^2 - 6x + 6 = 0$, 解得 $x = 3 \pm \sqrt{3}$, 不妨设 $x_1 = 3 - \sqrt{3}$, $x_2 = 3 + \sqrt{3}$, 则 $0 < x_1 < x_2$,

易知 $e^{-x+1} > 0$ 恒成立,

所以令 $g'(x) < 0$, 解得 $0 < x < x_1$ 或 $x > x_2$; 令 $g'(x) > 0$, 解得 $x < 0$ 或 $x_1 < x < x_2$;

所以 $g(x)$ 在 $(0, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$, (x_1, x_2) 上单调递增,

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 3 - \sqrt{3})$ 和 $(3 + \sqrt{3}, +\infty)$, 单调递增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

【小问 3 详解】

由 (1) 得 $f(x) = x - x^3 e^{-x+1} (x \in \mathbf{R})$, $f'(x) = 1 - (3x^2 - x^3)e^{-x+1}$,

由 (2) 知 $f'(x)$ 在 $(0, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$, (x_1, x_2) 上单调递增,

当 $x < 0$ 时, $f'(-1) = 1 - 4e^2 < 0$, $f'(0) = 1 > 0$, 即 $f'(-1)f'(0) < 0$

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上存在唯一零点, 不妨设为 x_3 , 则 $-1 < x_3 < 0$,

此时, 当 $x < x_3$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减; 当 $x_3 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增;

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个极小值点;

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减,

则 $f'(x_1) = f'(3 - \sqrt{3}) < f'(1) = 1 - 2 < 0$, 故 $f'(0)f'(x_1) < 0$,

所以 $f'(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上存在唯一零点, 不妨设为 x_4 , 则 $0 < x_4 < x_1$,

此时, 当 $0 < x < x_4$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增; 当 $x_4 < x < x_1$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减;

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上有一个极大值点;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x)$ 在 (x_1, x_2) 上单调递增,

则 $f'(x_2) = f'(3 + \sqrt{3}) > f'(3) = 1 > 0$, 故 $f'(x_1)f'(x_2) < 0$,

所以 $f'(x)$ 在 (x_1, x_2) 上存在唯一零点, 不妨设为 x_5 , 则 $x_1 < x_5 < x_2$,

此时, 当 $x_1 < x < x_5$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减; 当 $x_5 < x < x_2$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增;

所以 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上有一个极小值点;

当 $x > x_2 = 3 + \sqrt{3} > 3$ 时, $3x^2 - x^3 = x^2(3-x) < 0$,

所以 $f'(x) = 1 - (3x^2 - x^3)e^{-x+1} > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上无极值点;

综上: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 (x_1, x_2) 上各有一个极小值点, 在 $(0, x_1)$ 上有一个极大值点, 共有 3 个极值点.

【点睛】 关键点睛: 本题第 3 小题的解题关键是判断 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 的正负情况, 充分利用 $f'(x)$ 的单调性, 寻找特殊点判断即可得解.

21. **【答案】** (1) $r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 2$

(2) $r_n = n, n \in \mathbf{N}$

(3) 证明见详解

【分析】 (1) 先求 $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, B_3$, 根据题意分析求解;

(2) 根据题意分析可得 $r_{i+1} - r_i \geq 1$, 利用反证可得 $r_{i+1} - r_i = 1$, 在结合等差数列运算求解;

(3) 讨论 A_m, B_m 的大小, 根据题意结合反证法分析证明.

【小问 1 详解】

(1) 列表如下, 对比可知 $r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 2$.

i	0	1	2	3
a_i		2	1	3
A_i	0	2	3	6
b_i		1	3	3
B_i	0	1	4	7
r_k	0	1	1	2

【小问 2 详解】

由题意可知: $r_n \leq m$, 且 $r_n \in \mathbf{N}$,

因为 $a_n \geq 1, b_n \geq 1$, 则 $A_n \geq a_1 = 1, B_n \geq b_1 = 1$, 当且仅当 $n = 1$ 时, 等号成立,

所以 $r_0 = 0, r_1 = 1$,

又因为 $2r_i \leq r_{i-1} + r_{i+1}$, 则 $r_{i+1} - r_i \geq r_i - r_{i-1}$, 即 $r_m - r_{m-1} \geq r_{m-1} - r_{m-2} \geq \dots \geq r_1 - r_0 = 1$,

可得 $r_{i+1} - r_i \geq 1$,

反证: 假设满足 $r_{n+1} - r_n > 1$ 的最小正整数为 $1 \leq j \leq m-1$,

当 $i \geq j$ 时, 则 $r_{i+1} - r_i \geq 2$; 当 $i \leq j-1$ 时, 则 $r_{i+1} - r_i = 1$,

则 $r_m = (r_m - r_{m-1}) + (r_{m-1} - r_{m-2}) + \cdots + (r_1 - r_0) + r_0 \geq 2(m-j) + j = 2m - j$,

又因为 $1 \leq j \leq m-1$, 则 $r_m \geq 2m - j \geq 2m - (m-1) = m+1 > m$,

假设不成立, 故 $r_{n+1} - r_n = 1$,

即数列 $\{r_n\}$ 是以首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $r_n = 0 + 1 \times n = n, n \in \mathbf{N}$.

【小问 3 详解】

(i) 若 $A_m \geq B_m$, 构建 $S_n = A_n - B_{r_n}, 1 \leq n \leq m$, 由题意可得: $S_n \geq 0$, 且 S_n 为整数,

反证, 假设存在正整数 K , 使得 $S_K \geq m$,

则 $A_K - B_{r_K} \geq m, A_K - B_{r_{K+1}} < 0$, 可得 $b_{r_{K+1}} = B_{r_{K+1}} - B_{r_K} = (A_K - B_{r_K}) - (A_K - B_{r_{K+1}}) > m$,

这与 $b_{r_{K+1}} \in \{1, 2, \dots, m\}$ 相矛盾, 故对任意 $1 \leq n \leq m, n \in \mathbf{N}$, 均有 $S_n \leq m-1$.

① 若存在正整数 N , 使得 $S_N = A_N - B_{r_N} = 0$, 即 $A_N = B_{r_N}$,

可取 $r = p = 0, q = N, s = r_N$, 使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$;

② 若不存在正整数 N , 使得 $S_N = 0$,

因为 $S_n \in \{1, 2m \cdots, m-1\}$, 且 $1 \leq n \leq m$,

所以必存在 $1 \leq X < Y \leq m$, 使得 $S_X = S_Y$,

即 $A_X - B_{r_X} = A_Y - B_{r_Y}$, 可得 $A_X + B_{r_Y} = A_Y + B_{r_X}$,

可取 $p = X, s = r_Y, q = Y, r = r_X$, 使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$;

(ii) 若 $A_m < B_m$, 构建 $S_n = B_{r_n} - A_n, 1 \leq n \leq m$, 由题意可得: $S_n \leq 0$, 且 S_n 为整数,

反证, 假设存在正整数 K , 使得 $S_K \leq -m$,

则 $B_{r_K} - A_K \leq -m, B_{r_{K+1}} - A_K > 0$, 可得 $b_{r_{K+1}} = B_{r_{K+1}} - B_{r_K} = (B_{r_{K+1}} - A_K) - (B_{r_K} - A_K) > m$,

这与 $b_{r_{K+1}} \in \{1, 2, \dots, m\}$ 相矛盾, 故对任意 $1 \leq n \leq m, n \in \mathbf{N}$, 均有 $S_n \geq 1-m$.

① 若存在正整数 N , 使得 $S_N = B_{r_N} - A_N = 0$, 即 $A_N = B_{r_N}$,

可取 $r = p = 0, q = N, s = r_N$, 使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$;

② 若不存在正整数 N , 使得 $S_N = 0$,

因为 $S_n \in \{-1, -2, \dots, 1-m\}$, 且 $1 \leq n \leq m$,

所以必存在 $1 \leq X < Y \leq m$, 使得 $S_X = S_Y$,

即 $B_{r_x} - A_x = B_{r_y} - A_y$ ，可得 $A_x + B_{r_y} = A_y + B_{r_x}$ ，

可取 $p = X, s = r_y, q = Y, r = r_x$ ，使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$ ；

综上所述：存在 $0 \leq p < q \leq m, 0 \leq r < s \leq m$ 使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$ 。

【点睛】方法点睛：对于一些直接说明比较困难的问题，可以尝试利用反证法分析证明。



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通