

石景山区 2018—2019 学年第一学期高三期末试卷

数 学 (理)

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $P = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}$ ， $Q = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，则 $P \cap Q =$

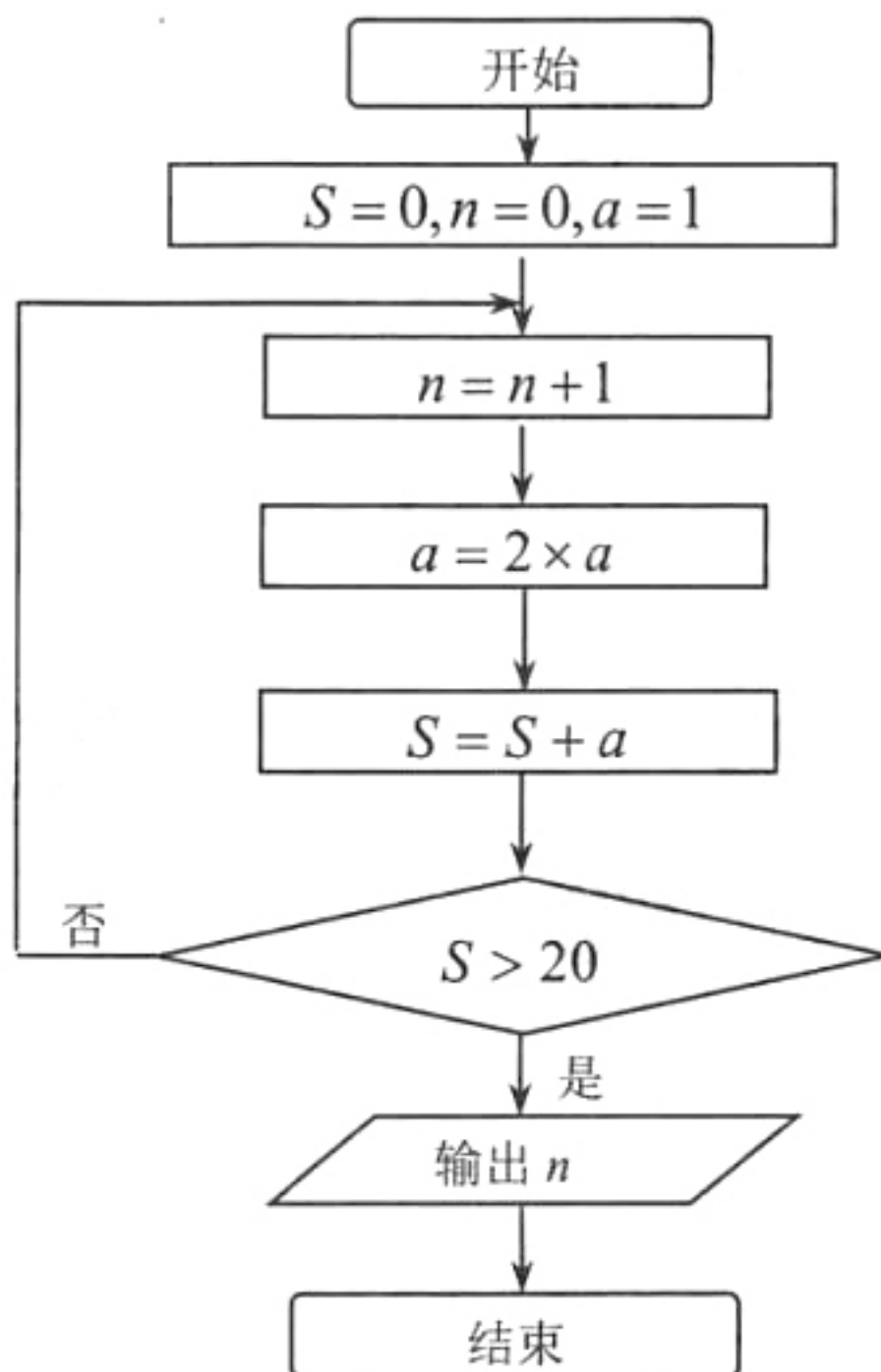
- A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 2\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 设 i 是虚数单位，复数 $z = \frac{2i}{1-i}$ ，则 z 的共轭复数为

- A. $-1+i$ B. $1+i$ C. $-1-i$ D. $1-i$

3. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，则输出 n 的值为

- A. 3
B. 4
C. 5
D. 6

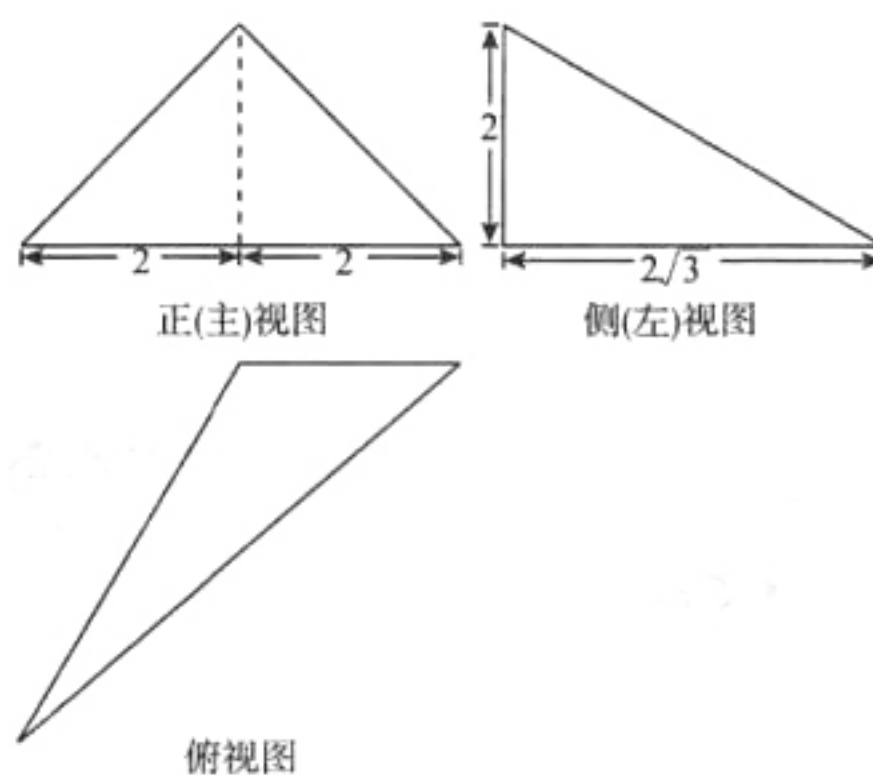


4. 下列函数中为偶函数的是

- A. $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ B. $y = \ln(1+x) + \ln(1-x)$
C. $y = x \cos x$ D. $y = x + \cos x$

5. 某四面体的三视图如图所示, 该四面体的体积为

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
C. $4\sqrt{3}$
D. $8\sqrt{3}$



6. 已知平面向量 $\vec{a} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\vec{b} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, 则下列关系正确的是

- A. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$
B. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$
C. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$
D. $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel (\vec{a} - \vec{b})$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=7, c=3, \angle A=60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

- A. $\frac{15}{2}\sqrt{3}$
B. $\frac{15}{4}\sqrt{3}$
C. $12\sqrt{3}$
D. $6\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq 0, \\ \log_2 x, & x > 0, \end{cases}$ 则下列关于函数 $y = f(f(x)) + 1$ 的零点个数

的判断正确的是

- A. 当 $a > 0$ 时, 有 4 个零点; 当 $a < 0$ 时, 有 1 个零点
B. 当 $a > 0$ 时, 有 3 个零点; 当 $a < 0$ 时, 有 2 个零点
C. 无论 a 为何值, 均有 2 个零点
D. 无论 a 为何值, 均有 4 个零点

第二部分 (非选择题共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 在 $(1+2x)^5$ 的展开式中, x^3 的系数为_____. (用数字作答)
10. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1=3, S_3=18$, 则其通项公式 $a_n =$ _____.

11. 若变量 x, y 满足约束条件 $x+1 \leq y \leq 2x$, 则 $z=2x+y$ 的最小值等于_____.
12. 写出 “ $x+\frac{1}{x} \leq -2$ ” 的一个充分不必要条件_____.
13. 已知双曲线中心在原点, 一个焦点为 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, 点 P 在双曲线上, 且线段 PF_1 的中点坐标为 $(0, 2)$, 则双曲线的离心率为_____.
14. 2018 年个税改革方案中专项附加扣除等内容将于 2019 年全面施行. 不过, 为了让老百姓尽早享受到减税红利, 自 2018 年 10 月至 2018 年 12 月, 先将工资所得税起征额由 3500 元/月提高至 5000 元/月, 并按新的税率表 (见附录) 计算纳税.

按照税法规定, 小王 2018 年 9 月和 10 月税款计算情况分别如下:

月份		纳税所得额	起征额	应纳税额	适用税率	速算扣除数	税款	税后工资
9		6000	3500	2500	10%	105	145	5855
10		6000	5000	1000	3%	0	30	5970

(相关计算公式为: 应纳税额=纳税所得额 - 起征额,

税款=应纳税额 $\times$ 适用税率 - 对应档的速算扣除数,

税后工资=纳税所得额 - 税款)

- (1) 某职工甲 2018 年 9 月应纳税额为 2000 元, 那么他 9 月份的税款为_____元;
- (2) 某职工乙 2018 年 10 月税后工资为 14660 元, 则他享受减税红利为_____元.

附录:

原税率表 (执行至 2018 年 9 月)

应纳税额	税率	速算扣除数
不超过 1500 元	3%	0 元
1500 元至 4500 元	10%	105 元
4500 元至 9000 元	20%	555 元
9000 元至 35000 元	25%	1005 元
.....		

新税率表 (2018 年 10 月起执行)

应纳税额	税率	速算扣除数
不超过 3000 元	3%	0 元
3000 元至 12000 元	10%	210 元
12000 元至 25000 元	20%	1410 元
25000 元至 35000 元	25%	2660 元
.....		

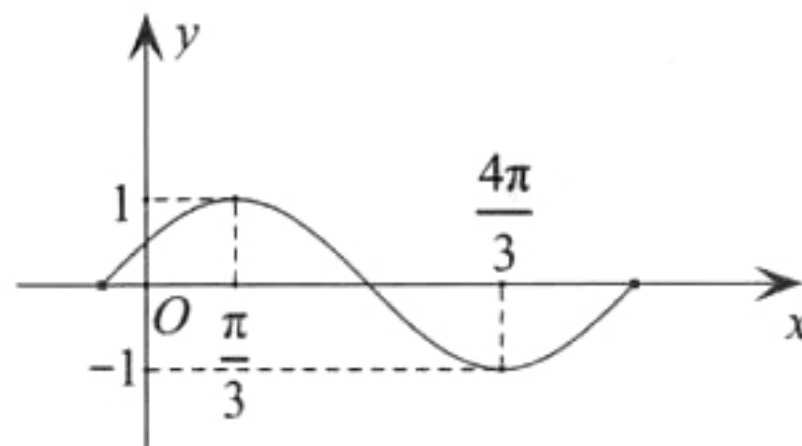
三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题 13 分)

函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式；

(II) 设 $g(x) = f(x) - \cos x$ ，求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值。



16. (本小题 13 分)

2018 年 9 月，某校高一年级新入学有 360 名学生，其中 200 名男生，160 名女生。学校计划为家远的高一新生提供 5 间男生宿舍和 4 间女生宿舍，每间宿舍可住 2 名同学。

该校“数学与统计”社团的同学为了解全体高一学生家庭居住地与学校的距离情况，按照性别进行分层抽样，其中共抽取 40 名男生家庭居住地与学校的距离数据(单位：km)如下：

5	6	7	7.5	8	8.4	4	3.5	4.5	4.3
5	4	3	2.5	4	1.6	6	6.5	5.5	5.7
3.1	5.2	4.4	5	6.4	3.5	7	4	3	3.4
6.9	4.8	5.6	5	5.6	6.5	3	6	7	6.6

(I) 根据以上样本数据推断，若男生甲家庭居住地与学校距离为 8.3 km，他是否能住宿？说明理由；

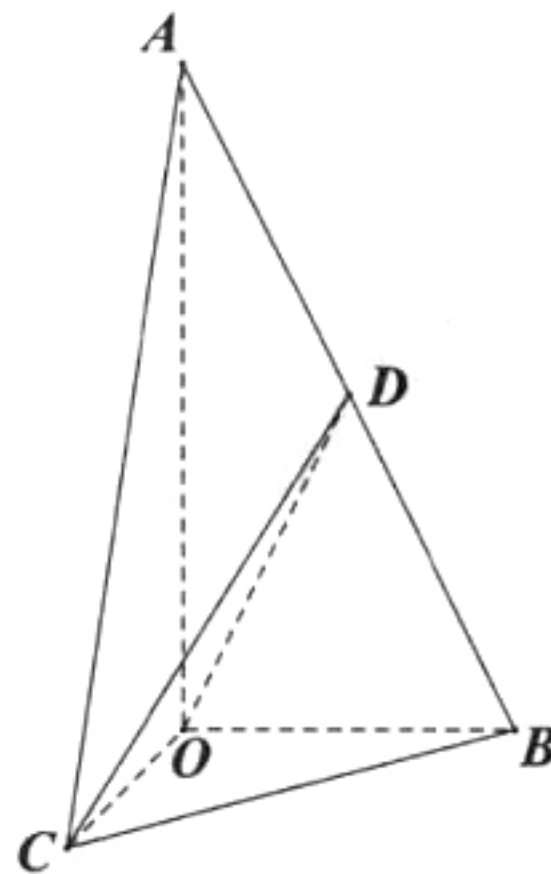
(II) 通过计算得到男生样本数据平均值为 5.1 km，女生样本数据平均值为 4.875 km，求所有样本数据的平均值；

(III) 已知能够住宿的女生中有一对双胞胎，如果随机分配宿舍，求双胞胎姐妹被分到同一宿舍的概率。

17. (本小题 14 分)

如图, 在 $\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$, $AO = 2$, $OB = 1$. $\triangle AOC$ 可以通过 $\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且 $OB \perp OC$, 动点 D 在斜边 AB 上.

- (I) 求证: 平面 $COD \perp$ 平面 AOB ;
(II) 当 D 为 AB 的中点时, 求二面角 $B-CD-O$ 的余弦值;
(III) 求 CD 与平面 AOB 所成的角中最大角的正弦值.



18. (本小题 14 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(1, 2)$, 其焦点为 F . M 为抛物线上除了原点外的任一点, 过 M 的直线 l 与 x 轴, y 轴分别交于 A, B .

- (I) 求抛物线 C 的方程以及焦点坐标;
(II) 若 $\triangle BMF$ 与 $\triangle ABF$ 的面积相等, 求证: 直线 l 是抛物线 C 的切线.

19. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = (x + a) \ln x$.

- (I) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;
(II) 当 $a > 0$ 时, 若 $f(x)$ 有极小值, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题 13 分)

将 1 至 n^2 这 n^2 个自然数随机填入 $n \times n$ 方格的 n^2 个方格中，每个方格恰填一个数 ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$)。对于同行或同列的每一对数，都计算较大数与较小数的比值，在这 $n^2(n-1)$ 个比值中的最小值，称为这一填数法的“特征值”。

(I) 若 $n = 2$ ，请写出一种填数法，并计算此填数法的“特征值”；

(II) 当 $n = 3$ 时，请写出一种填数法，使得此填数法的“特征值”为 $\frac{n+1}{n}$ ；

(III) 求证：对任意一个填数法，其“特征值”不大于 $\frac{n+1}{n}$ 。

石景山区 2018-2019 学年第一学期高三期末

数学（理）试卷答案及评分参考

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	B	A	C	D	A

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 80; 10. $3n$; 11. 4;

12. $(-\infty, 0)$ 的真子集即可; 13. $\sqrt{5}$; 14. 95, 1155.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分。解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (本小题 13 分)

解：(I) 由图可得 $A=1$,

.....1 分

$$\frac{T}{2} = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi, \text{ 所以 } T = 2\pi, \omega = 1.$$

.....3 分

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } f(x) = 1, \text{ 可得 } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 1,$$

$$\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

.....5 分

$$\therefore f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

.....6 分

$$(II) \quad g(x) = f(x) - \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos x = \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} - \cos x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

.....9 分

$$\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}.$$

.....11 分

$$\text{当 } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}, \text{ 即 } x = 0 \text{ 时, } g(x) \text{ 有最小值为 } -\frac{1}{2}.$$

.....13 分

16. (本小题 13 分)

解: (I) 能住宿.

.....4 分

(II) 根据分层抽样的原则, 抽取女生样本数为 32 人.

所有样本数据平均值为 $\frac{40 \times 5.1 + 32 \times 4.875}{40 + 32} = 5$8 分

(III) 解法一: 记住宿的双胞胎为 A_1, A_2 , 其他住宿女生为 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$.

考虑 A_1 的室友, 共有 $A_2, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ 七种情况,

所以双胞胎姐妹被分到同一宿舍的概率为 $\frac{1}{7}$.

解法二: 设“双胞胎姐妹被分到同一宿舍”为事件 A ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{4C_6^2 C_4^2 C_2^2}{C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2} = \frac{1}{7}.$$

所以双胞胎姐妹被分到同一宿舍的概率为 $\frac{1}{7}$.

.....13 分

17. (本小题 14 分)

(I) 证明: 在 $\triangle AOC$ 中, $AO \perp OC$,

$\because OB \perp OC$, 且 $AO \cap OB = O$,

$\therefore OC \perp$ 平面 AOB ,2 分

又 $OC \subset$ 平面 COD ,

$\therefore$ 平面 $COD \perp$ 平面 AOB4 分

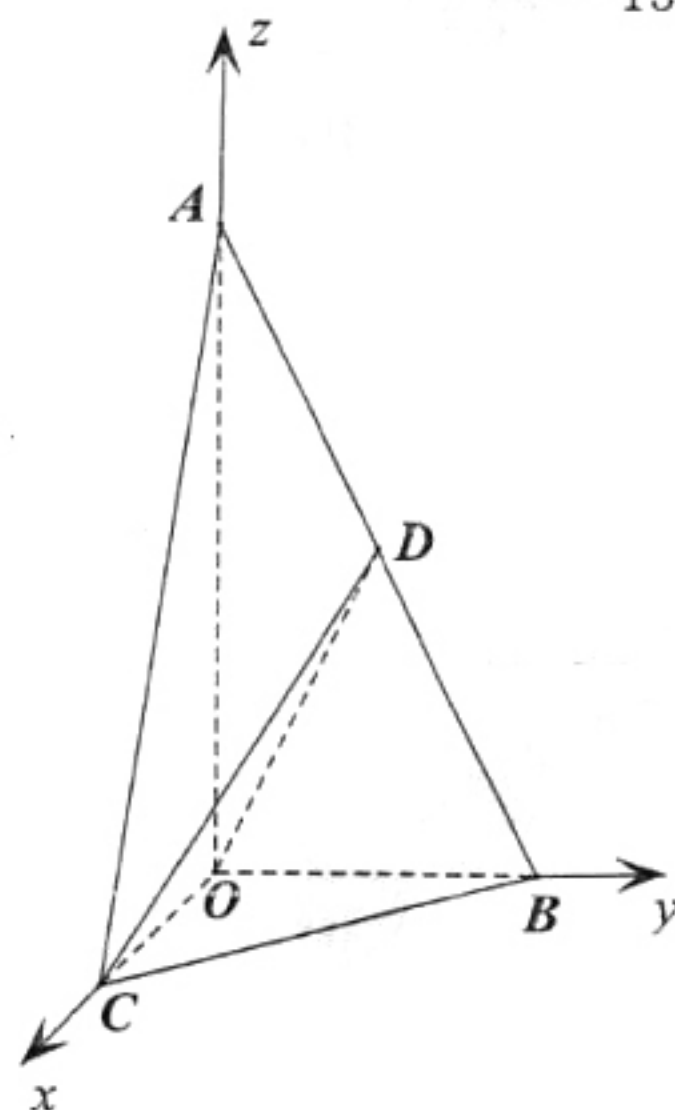
(II) 解: 如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$,5 分

$\because D$ 为 AB 的中点,

$\therefore O(0, 0, 0), A(0, 0, 2), B(0, 1, 0), C(1, 0, 0), D(0, \frac{1}{2}, 1)$,

$\therefore \overrightarrow{OC} = (1, 0, 0), \overrightarrow{OD} = (0, \frac{1}{2}, 1), \overrightarrow{BC} = (1, -1, 0), \overrightarrow{BD} = (0, -\frac{1}{2}, 1)$

设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 OCD 的法向量,



$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{OC} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{OD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = 0, \\ \frac{1}{2}y_1 + z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $z_1 = 1$, 则 $y_1 = -2$,

$\therefore \vec{n}_1 = (0, -2, 1)$ 是平面 BCD 的一个法向量,

.....7 分

设 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 OCD 的法向量,

$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{BC} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{BD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_2 - y_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}y_2 + z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $z_2 = 1$, 则 $x_2 = 2$, $y_2 = 2$,

$\therefore \vec{n}_2 = (2, 2, 1)$ 是平面 OCD 的一个法向量,

.....9 分

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{0 + (-2) \times 2 + 1 \times 1}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore$ 二面角 $B-CD-O$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

.....10 分

(III) 解法一: $\because OC \perp$ 平面 AOB ,

$\therefore \angle CDO$ 为 CD 与平面 AOB 所成的角,

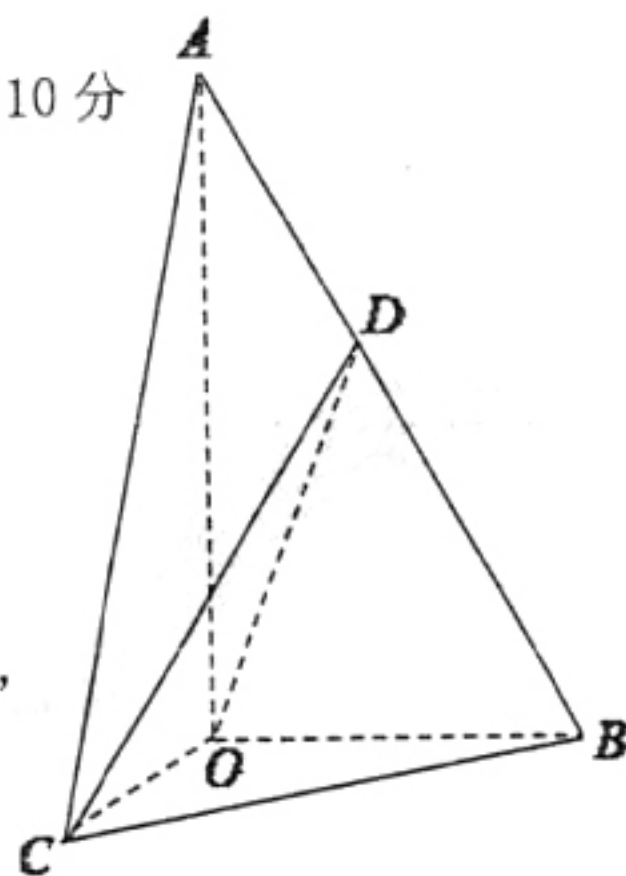
$\because OC = 1$,

$\therefore$ 点 O 到直线 AB 的距离最小时, $\angle CDO$ 的正弦值最大,

即当 $OD \perp AB$ 时, $\angle CDO$ 的正弦值最大,

$$\text{此时 } OD = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \therefore CD = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sin \angle CDO = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$



解法二：设 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ，所以 $D(0, \lambda, 2-2\lambda)$ 。

……11 分

$$\overrightarrow{CD} = (-1, \lambda, 2-2\lambda).$$

平面 AOB 的法向量 $\vec{n} = (1, 0, 0)$ 。

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{1}{\sqrt{5\lambda^2 - 8\lambda + 5}} = \frac{1}{\sqrt{5(\lambda - \frac{4}{5})^2 + \frac{9}{5}}} \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } \lambda = \frac{4}{5} \text{ 时, } CD \text{ 与平面 } AOB \text{ 所成的角最大, } \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}. \quad \dots\dots 14 \text{ 分}$$

18. (本小题 14 分)

解：(I) 因为抛物线 $C: y^2 = 2px$ 经过点 $P(1, 2)$ ，

$$\text{所以 } 2^2 = 2p, \quad p = 2.$$

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ ，焦点 F 点坐标为 $(1, 0)$ 。 …5 分

(II) 因为 $\triangle BMF$ 与 $\triangle ABF$ 的面积相等，

所以 $BM = AB$ ，所以 B 为 AM 的中点。 …7 分

设 $M(x_0, y_0) (x_0 y_0 \neq 0)$ ，则 $B(-x_0, 0)$ 。 …9 分

所以直线 l 的方程为 $y = \frac{y_0}{2x_0}(x + x_0)$ ， …11 分

与抛物线 $y^2 = 4x$ 联立得：

$$y^2 - \frac{8x_0}{y_0}x + 4x_0 = 0,$$

$$\Delta = \frac{64x_0^2}{y_0^2} - 16x_0 = \frac{64x_0^2}{4x_0} - 16x_0 = 0$$

所以直线 l 是抛物线 C 的切线。 …14 分

19. (本小题 13 分)

解: (I) 当 $a=0$ 时, $f(x)=x\ln x$, $f'(x)=\ln x+1$.

...1 分

$$f'(1)=1, f(1)=0,$$

...3 分

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

...4 分

(II) $f(x)$ 有极小值 $\Leftrightarrow$ 函数 $f'(x)$ 有左负右正的变号零点.

$$f'(x)=\ln x+(x+a)\frac{1}{x}=\ln x+\frac{a}{x}+1$$

...5 分

$$\text{令 } g(x)=f'(x), \text{ 则 } g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$$

令 $g'(x)=0$, 解得 $x=a$.

$x, g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	减	极小值 $\ln a + 2$	增

...8 分

① 若 $\ln a + 2 \geq 0$, 即 $a \geq e^{-2}$, 则 $g(x) \geq 0$, 所以 $f'(x)$ 不存在变号零点, 不合题意.

② 若 $\ln a + 2 < 0$, 即 $a < e^{-2}$ 时, $g(a) = \ln a + 2 < 0$, $g(1) = a + 1 > 0$.

所以 $\exists x_0 \in (a, 1)$, 使得 $g(x_0) = 0$;

且当 $x \in (a, x_0)$ 时, $g(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $g(x) > 0$.

所以当 $x \in (a, 1)$ 时, $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	(a, x_0)	x_0	$(x_0, 1)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	减	极小值	增

所以 $0 < a < e^{-2}$.

...13 分

20. (本题 13 分)

解: (I)

1	2
3	4

或

3	2
1	4

此填数法的“特征值”为 $\frac{4}{3}$. 此填数法的“特征值”为 $\frac{3}{2}$3 分

(II)

7	1	4
5	8	2
3	6	9

(前两问 答案不唯一, 请酌情给分) ...7 分

(III) 不妨设 A 为任意一个填数法, 记此填数法的“特征值”为 $C(A)$,

考虑含 $n+1$ 个元素的集合 $B = \{n^2, n^2-1, n^2-2, \dots, n^2-n\}$,

易知其中 必有至少两个数处于同一行, 设为 $x_1 < x_2 \leq n^2$

也必有至少两个数处于同一列, 设为 $y_1 < y_2 \leq n^2$.

①若 $\max(x_1, y_1) \geq n^2 - n + 1$

则有 $C(A) \leq \frac{n^2}{\max(x_1, y_1)} \leq \frac{n^2}{n^2 - n + 1} < \frac{n+1}{n}$ (因为 $n^3+1 > n^3$).

②若 $\max(x_1, y_1) < n^2 - n + 1$, 即 $x_1 = y_1 = n^2 - n$,

则 $x_2 \neq y_2$, $\min(x_2, y_2) \leq n^2 - 1$.

所以 $C(A) \leq \frac{\min(x_2, y_2)}{n^2 - n} \leq \frac{n^2 - 1}{n^2 - n} = \frac{(n+1)(n-1)}{n(n-1)} = \frac{n+1}{n}$.

即不论何种情况, 总有 $C(A) \leq \frac{n+1}{n}$13 分

【若有不同解法, 请酌情给分】