北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学试卷（文史类） 2016.3

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x\le 3\}$，$B=\{x|x<2\}$，则 $(\complement_U B)\cap A=$

A．$\{x|x\le 2\}$　　B．$\{x|1\le x\le 3\}$　　C．$\{x|2<x\le 3\}$　　D．$\{x|2\le x\le 3\}$

2.已知 i 为虚数单位，则复数 $\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$1-\mathrm{i}$　　C．$-1+\mathrm{i}$　　D．$-1-\mathrm{i}$

3.已知非零平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的

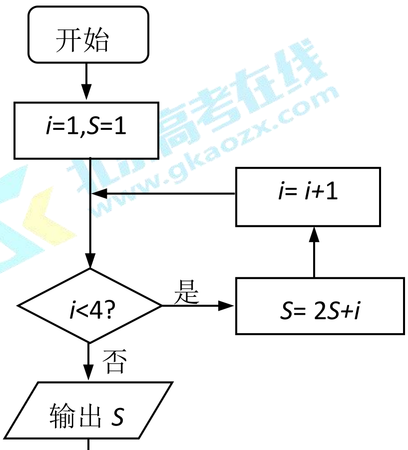
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4.执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为

A．42　　B．19

C．8　　D．3

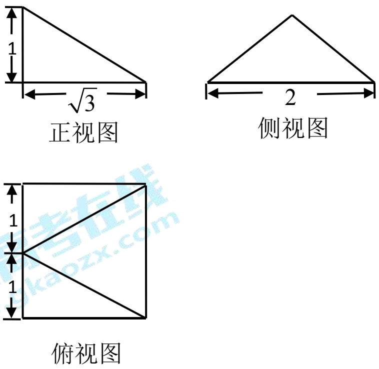


5.在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $\sqrt{3}a\cos B+b\sin A=0$，则 $B=$

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

6.已知某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的侧面积是

A. $3+\sqrt{3}$　B. $3+\sqrt{6}$　C. $1+2\sqrt{3}$　D. $1+2\sqrt{6}$



7. 某工厂一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示, 下列说法中错误的是

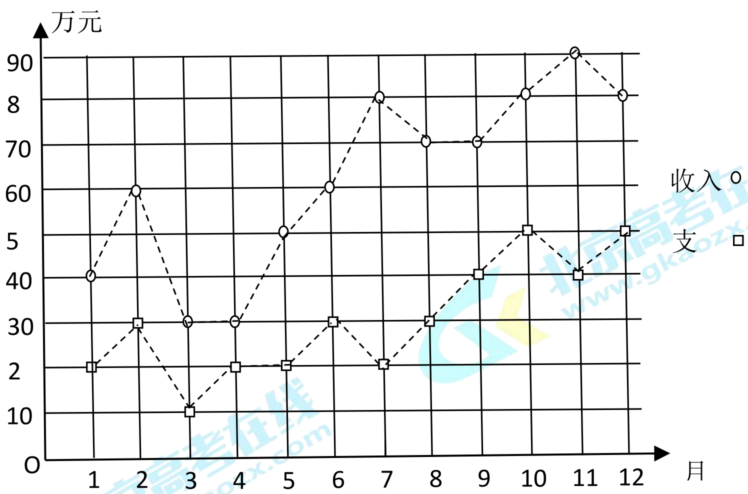
A. 收入最高值与收入最低值的比是 $3:1$

B. 结余最高的月份是 7 月份

C.1 至 2 月份的收入的变化率与 4 至 5 月份的收入的变化率相同

D. 前 6 个月的平均收入为 40 万元

（注：结余=收入−支出）



8. 若圆 $x^2+(y-1)^2=r^2$ 与曲线 $(x-1)y=1$ 的没有公共点，则半径 r 的取值范围是

A. $0<r<\sqrt{2}$　　B. $0<r<\frac{\sqrt{11}}{2}$　　C. $0<r<\sqrt{3}$　　D. $0<r<\frac{\sqrt{13}}{2}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+3), x\geq 0,\\ x^2, \quad x<0,\end{cases}$ 则 $f(f(-1))=$____.

10.已知双曲线 $\frac{x^2}{m}-y^2=1$ 过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，则此双曲线的渐近线方程为____.

11.已知递增的等差数列 $\{a_n\}$ $\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的首项 $a_1=1$，且 a_1, a_2, a_4 成等比数列，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$____； $a_4+a_8+a_{12}+\cdots+a_{4n+4}=$____.

12.已知不等式组 $\begin{cases}y\geq 0,\\ y\leq x,\\ 2x+y-9\leq 0\end{cases}$ 表示的平面区域为 D.若直线 $y=a\left(x+1\right)$ 与区域 D 有公共点，则实数 a 的取值范围是___.

13.已知圆 $C:(x-3)^2+(y-5)^2=5$，过圆心 C 的直线 l 交圆 C 于 A,B 两点，交 y 轴于点 P. 若 A 恰为 PB 的中点，则直线 l 的方程为___.

14.甲乙两人做游戏，游戏的规则是：两人轮流从 1（1 必须报）开始连续报数，每人一次最少要报一个数，最多可以连续报 7 个数（如，一个人先报数“1，2”，则下一个人可以有“3”，“3，4”，…，“3，4，5，6，7，8，9”等七种报数方法），谁抢先报到“100”则谁获胜. 如果从甲开始，则甲要想必胜，第一次报的数应该是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})$ （$\omega>0$）的最小正周期为 π.

（I）求 ω 的值；

（II）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

16.(本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2n^2-n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$b_n=(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

17. (本小题满分 13 分)

某班倡议假期每位学生至少阅读一本名著，为了解学生的阅读情况，对该班所有学生进行了调查.调查结果如下表:

阅读名著的本数	1	2	3	4	5
男生人数	3	1	2	1	3
女生人数	1	3	3	1	2

（Ⅰ）试根据上述数据，求这个班级女生阅读名著的平均本数;

（Ⅱ)若从阅读 5 本名著的学生中任选 2 人交流读书心得，求选到男生和女生各 1 人的概率；

（Ⅲ）试判断该班男生阅读名著本数的方差$s_1{}^2$与女生阅读名著本数的方差$s_2{}^2$的大小（只需写出结论）.（注：方差$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2]$，其中$\bar{x}$为$x_1$ x_2，…… x_n的平均数）

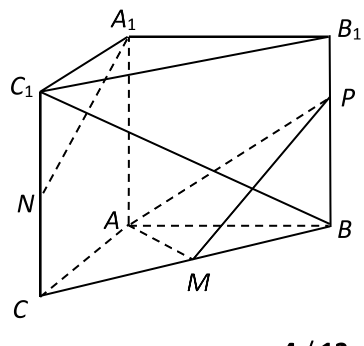
18.（本小题共 14 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$底面ABC，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2$，$AA_1=\sqrt{3}$. M,N分别为BC和CC_1的中点，P为侧棱BB_1上的动点.

（Ⅰ）求证：平面$APM\perp$平面BB_1C_1C；

（Ⅱ）若P为线段BB_1的中点，求证：$A_1N//$平面APM；

（Ⅲ）试判断直线BC_1与平面APM是否能够垂直.



若能垂直，求 PB 的值；若不能垂直，请说明理由.

19.(本小题共 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点分别为 F_1,F_2.

（Ⅰ）求以线段 F_1F_2 为直径的圆的方程；

（Ⅱ）过点 $P(4,0)$ 任作一条直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N. 在 x 轴上是否存在点 Q，使得 $\angle PQM+\angle PQN=180^\circ$？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

20. （本题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{k+x}{k-x}\cdot e^x\ (k\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $k=1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(0，f(0)\right)$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）设 $k\le 0$，若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\sqrt{3},2\sqrt{2}\right)$ 上存在极值点，求 k 的取值范围.

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学答案（文史类）

2016.3

一、选择题：（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	B	C	B	D	C

二、填空题：（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	2	$y=\pm\frac{1}{2}x$	$a_n=n$，$2n^2+6n+4$	$[0,\frac{3}{4}]$	$2x-y-1=0$ 或 $2x+y-11=0$	1，2，3，4

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：（满分 80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ） $f(x)=2\sin\omega x\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})$

$=2\sin\omega x(\frac{1}{2}\cos\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x)$

$=\sin\omega x\cos\omega x-\sqrt{3}\sin^2\omega x$

$=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，则 $\omega=1$. ……………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$, 所以 $0\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$.

则 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{3})\le 1$.

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值是 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值是 $-\sqrt{3}$.

$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 的最大值为 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小值为 $-\sqrt{3}$. ……………………13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $S_n=2n^2-n$，

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n-\left[2(n-1)^2-(n-1)\right]=4n-3.$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$, 而 $4\times 1-3=1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=4n-3$，$n\in\mathbf{N}^*$. ……………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $b_n=(-1)^n a_n=(-1)^n(4n-3)$,

当 n 为偶数时，$T_n=-1+5-9+13-17+\cdots+(4n-3)=4\times\frac{n}{2}=2n$,

当 n 为奇数时，$n+1$ 为偶数，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=2(n+1)-(4n+1)=-2n+1$.

综上，$T_n=\begin{cases}2n, n\text{为偶数},\\-2n+1, n\text{为奇数}.\end{cases}$ ……………………………13 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）女生阅读名著的平均本数 $\bar{x}=\dfrac{1\times1+3\times2+3\times3+1\times4+2\times5}{10}=3$ 本.

……………………………3 分

（Ⅱ）设事件 A = {从阅读 5 本名著的学生中任取 2 人，其中男生和女生各 1 人}.

男生阅读 5 本名著的 3 人分别记为 a_1,a_2,a_3，女生阅读 5 本名著的 2 人分别记为 b_1,b_2.

从阅读 5 本名著的 5 名学生中任取 2 人，共有 10 个结果，分别是：

$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{b_1,b_2\}$，$\{a_1,b_1\}$，$\{a_1,b_2\}$，

$\{a_2,b_1\}$，$\{a_2,b_2\}$，$\{a_3,b_1\}$，$\{a_3,b_2\}$.

其中男生和女生各 1 人共有 6 个结果，分别是：

$\{a_1,b_1\}$，$\{a_1,b_2\}$，$\{a_2,b_1\}$，$\{a_2,b_2\}$，$\{a_3,b_1\}$，$\{a_3,b_2\}$.

则 $P(A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. ……………………………10 分

（Ⅲ）$s_1^{\ 2}>s_2^{\ 2}$. ……………………………13 分

18. （本小题满分 14 分）

证明：

（Ⅰ）由已知，M 为 BC 中点，且 $AB=AC$，所以 $AM\perp BC$.

又因为 $BB_1 // AA_1$，且 $AA_1\perp$ 底面 ABC，所以 $BB_1\perp$ 底面 ABC.

因为 $AM\subset$ 底面 ABC，所以 $BB_1\perp AM$，

又 $BB_1\cap BC=B$，

所以 $AM\perp$ 平面 BB_1C_1C.

又因为 $AM\subset$ 平面 APM，

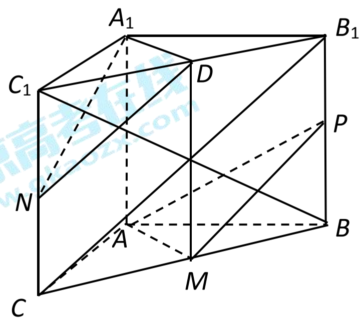
所以平面 $APM\perp$ 平面 BB_1C_1C. ……………………5 分

（II）

取 C_1B_1 中点 D，连结 A_1D， DN， DM， B_1C.

由于 D， M 分别为 C_1B_1， CB 的中点，

所以 $DM \parallel A_1A$,且 $DM = A_1A$.



则四边形 A_1AMD 为平行四边形，所以 $A_1D \parallel AM$.

又 $A_1D \not\subset$ 平面 APM， $AM \subset$ 平面 APM，

所以 $A_1D \parallel$ 平面 APM .

由于 D， N 分别为 C_1B_1， C_1C 的中点，

所以 $DN \parallel B_1C$.

又 P， M 分别为 B_1B， CB 的中点，

所以 $MP \parallel B_1C$.

则 $DN \parallel MP$.

又 $DN \not\subset$ 平面 APM， $MP \subset$ 平面 APM，

所以 $DN \parallel$ 平面 APM .

由于 $A_1D \cap DN=D$,所以平面 $A_1DN \parallel$ 平面 APM .

由于 $A_1N \subset$ 平面 A_1DN，

所以 $A_1N \parallel$ 平面 APM .　　　　……………10 分

（III）假设 BC_1 与平面 APM 垂直，

由 $PM \subset$ 平面 APM，

则 $BC_1 \perp PM$.

设 $PB = x$， $x \in [0, \sqrt{3}]$.

当 $BC_1 \perp PM$ 时， $\angle BPM = \angle B_1C_1B$，

所以 $\mathrm{Rt}\Delta PBM \backsim \mathrm{Rt}\Delta\angle B_1C_1B$，所以 $\dfrac{PB}{MB}=\dfrac{C_1B_1}{BB_1}$.

由已知 $MB=\sqrt{2}, C_1B_1=2\sqrt{2}, BB_1=\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，得 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

由于 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\notin[0,\sqrt{3}]$，

因此直线 BC_1 与平面 APM 不能垂直. ………………………………………14 分

19. （本小题满分 13 分）

解：（I）因为 $a^2=4$，$b^2=2$，所以 $c^2=2$.

所以以线段 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=2$. ……………………………3 分

（II）若存在点 $Q(m,0)$，使得 $\angle PQM+\angle PQN=180°$，

则直线 QM 和 QN 的斜率存在, 分别设为 k_1，k_2.

等价于 $k_1+k_2=0$.

依题意，直线 l 的斜率存在，故设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-4) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，得 $(2k^2+1)x^2-16k^2x+32k^2-4=0$.

因为直线 l 与椭圆 C 有两个交点，所以 $\Delta>0$.

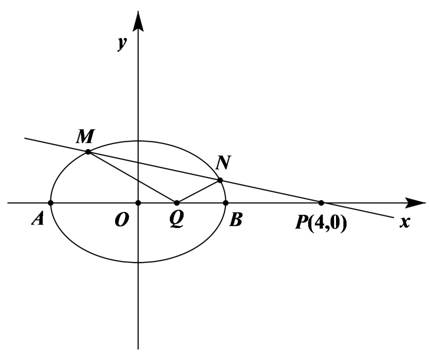
即 $(16k^2)^2-4(2k^2+1)(32k^2-4)>0$，解得 $k^2<\dfrac{1}{6}$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{32k^2-4}{2k^2+1}$，

$y_1=k(x_1-4)$，$y_2=k(x_2-4)$.

令 $k_1+k_2=\dfrac{y_1}{x_1-m}+\dfrac{y_2}{x_2-m}=0$，

$(x_1-m)y_2+(x_2-m)y_1=0,$



$(x_1-m)k(x_2-4)+(x_2-m)k(x_1-4)=0$，

当 $k\neq 0$ 时，$2x_1x_2-(m+4)(x_1+x_2)+8m=0$，

所以 $2\times\dfrac{32k^2-4}{2k^2+1}-(m+4)\times\dfrac{16k^2}{2k^2+1}+8m=0$，

化简得，$\dfrac{8(m-1)}{2k^2+1}=0$，

所以 $m=1$.

当 $k=0$ 时，也成立.

所以存在点 $Q(1,0)$，使得 $\angle PQM+\angle PQN=180°$. ……………………………14 分

20. （本小题满分 13 分）

解：(Ⅰ)若 $k=1$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 1\}$，$f'(x)=\dfrac{e^x(3-x^2)}{(1-x)^2}$.

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处切线的斜率为 $f'(0)=3$.

而 $f(0)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处切线的方程为 $y=3x+1$.

……………3 分

(Ⅱ) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq k\}$，$f'(x)=\dfrac{e^x(2k+k^2-x^2)}{(k-x)^2}$.

(1) 当 $k>0$ 时，由 $x\neq k$,且此时 $\sqrt{k^2+2k}>k$，可得 $-\sqrt{k^2+2k}<k<\sqrt{k^2+2k}$.

令 $f'(x)<0$，解得 $x<-\sqrt{k^2+2k}$ 或 $x>\sqrt{k^2+2k}$，函数 $f(x)$ 为减函数；

令 $f'(x)>0$，解得 $-\sqrt{k^2+2k}<x<\sqrt{k^2+2k}$，但 $x\neq k$，

所以当 $-\sqrt{k^2+2k}<x<k$，$k<x<\sqrt{k^2+2k}$ 时，函数 $f(x)$ 也为增函数.

所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,-\sqrt{k^2+2k})$，$(\sqrt{k^2+2k},+\infty)$，

单调增区间为 $(-\sqrt{k^2+2k},k)$，$(k,\sqrt{k^2+2k})$.

(2) 当 $k=0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$.

当 $k=-2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,-2)$，$(-2,+\infty)$.

当 $-2<k<0$ 时，由 $2k+k^2<0$，所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,k)$，$(k,+\infty)$.

即当 $-2\leq k\leq 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,k)$，$(k,+\infty)$.

（3）当 $k<-2$ 时，此时 $-\sqrt{k^2+2k}>k$.

令 $f'(x)<0$，解得 $x<-\sqrt{k^2+2k}$ 或 $x>\sqrt{k^2+2k}$，但 $x\neq k$，所以当 $x<k$，

$k<x<-\sqrt{k^2+2k}$，$x>\sqrt{k^2+2k}$ 时，函数 $f(x)$ 为减函数；

令 $f'(x)>0$，解得 $-\sqrt{k^2+2k}<x<\sqrt{k^2+2k}$，函数 $f(x)$ 为增函数.

所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,k)$，$(k,-\sqrt{k^2+2k})$，$(\sqrt{k^2+2k},+\infty)$，

函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\sqrt{k^2+2k},\sqrt{k^2+2k})$. …………9 分

（III）（1）当 $-2\le k\le 0$ 时，由（II）问可知，函数 $f(x)$ 在 $(\sqrt{3},2\sqrt{2})$ 上为减函数，

所以不存在极值点;

（2）当 $k<-2$ 时，由（II）可知，$f(x)$ 在 $(-\sqrt{k^2+2k},\sqrt{k^2+2k})$ 上为增函数，

在 $(\sqrt{k^2+2k},+\infty)$ 上为减函数.

若函数 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{3},2\sqrt{2})$ 上存在极值点，则 $\sqrt{3}<\sqrt{k^2+2k}<2\sqrt{2}$，

解得 $-4<k<-3$ 或 $1<k<2$，

所以 $-4<k<-3$.

综上所述，当 $-4<k<-3$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\sqrt{3},2\sqrt{2}\right)$ 上存在极值点.

…………13 分