

# 2024 北京首都师大附中高三（下）开学考

## 数 学

2024.2.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 椭圆  $x^2 + 4y^2 = 1$  的焦距是（ ）

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  B. 1 C.  $\sqrt{3}$  D. 2

2. 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $8a_2 + a_5 = 0$ ，则下列式子中数值不能确定的是（ ）

- A.  $\frac{a_5}{a_3}$  B.  $\frac{S_5}{S_3}$  C.  $\frac{S_{n+1}}{S_n}$  D.  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

3. 已知圆  $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$  与  $x$  轴切于  $A$  点，与  $y$  轴切于  $B$  点，设弧  $AB$  的中点为  $M$ ，则过点  $M$  的圆  $C$  的切线方程是（ ）

- A.  $y = x + 2 - \sqrt{2}$  B.  $y = x + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$  C.  $y = x - 2 + \sqrt{2}$  D.  $y = x + 1 - \sqrt{2}$

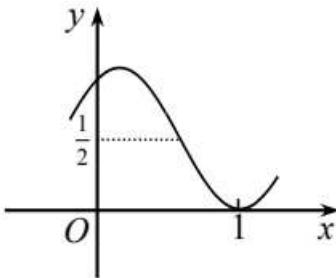
4. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $(x+2)f'(x) < 0$ ，又  $a = f\left(\log_{\frac{1}{2}} 3\right)$ ,  $b = f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}\right)$ ,  $c = f(\ln 3)$ , 则（ ）

- A.  $c < b < a$  B.  $b < c < a$  C.  $c < a < b$  D.  $a < b < c$

5. 由三个数字 1, 2, 3 组成的五位数中，1, 2, 3 都至少出现一次，这样的五位数的个数为（ ）

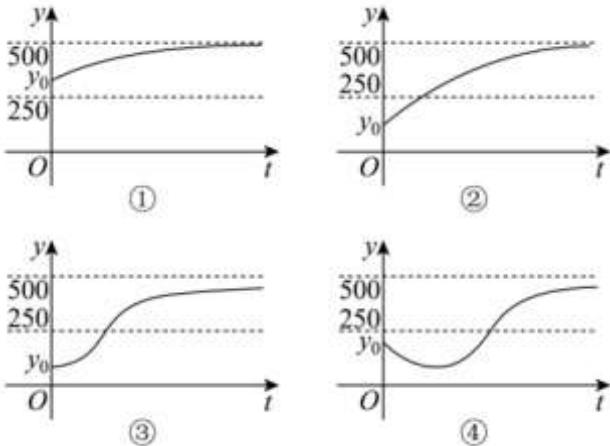
- A. 150 B. 240 C. 180 D. 236

6. 如果存在正整数  $\omega$  和实数  $\varphi$  使得函数  $f(x) = \cos^2(\omega x + \varphi)$  ( $\omega, \varphi$  为常数) 的图象如图所示 (图象经过点  $(1, 0)$ )，那么  $\omega$  的值为（ ）



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

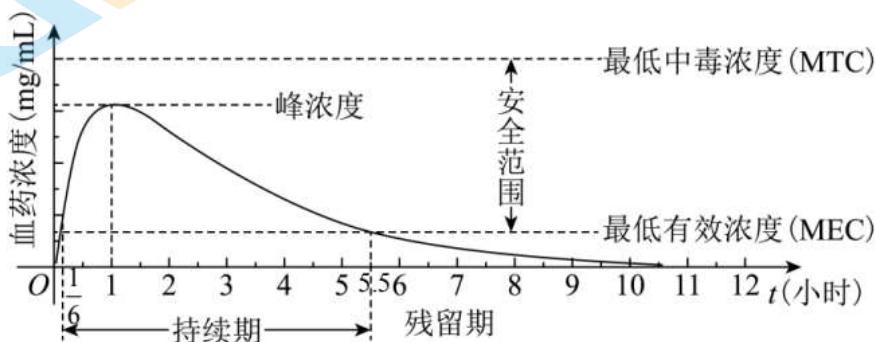
7. 某种新产品的社会需求量  $y$  是时间  $t$  的函数，记作： $y = f(t)$ . 若  $f(0) = y_0$ ，社会需求量  $y$  的市场饱和水平估计为 500 万件，经研究可得， $f(t)$  的导函数  $f'(t)$  满足： $f'(t) = kf(t)(500 - f(t))$  ( $k$  为正的常数)，则函数  $f(t)$  的图像可能为（ ）



- A. ①② B. ①③ C. ②④ D. ①②④

8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $A(\sqrt{3}, 0)$ ,  $B(1, 2)$ , 动点  $P$  满足  $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ , 其中  $\lambda, \mu \in [0, 1], \lambda + \mu \in [1, 2]$ , 则所有点  $P$  构成的图形面积为 ( )
- A. 1 B. 2 C.  $\sqrt{3}$  D.  $2\sqrt{3}$

9. 血药浓度 (Plasma Concentration) 是指药物吸收后在血浆内的总浓度. 药物在人体内发挥治疗作用时, 该药物的血药浓度应介于最低有效浓度和最低中毒浓度之间. 已知成人单次服用 1 单位某药物后, 体内血药浓度及相关信息如图所示:



根据图中提供的信息, 下列关于成人使用该药物的说法中:

- ①首次服用该药物 1 单位约 10 分钟后, 药物发挥治疗作用;  
 ②每次服用该药物 1 单位, 两次服药间隔小于 2 小时, 一定会产生药物中毒;  
 ③每相隔 5.5 小时服用该药物 1 单位, 可使药物持续发挥治疗作用;  
 ④首次服用该药物 1 单位 3 小时后, 再次服用该药物 1 单位, 不会发生药物中毒.

其中正确说法的个数是 ( )

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

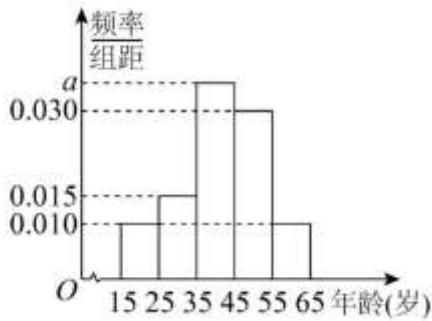
10. 已知抛物线  $M: y^2 = 4x$ , 圆  $N: (x-1)^2 + y^2 = r^2$  (其中  $r$  为常数,  $r > 0$ ). 过点  $(1, 0)$  的直线  $l$  交圆  $N$  于  $C$ 、 $D$  两点, 交抛物线  $M$  于  $A$ 、 $B$  两点, 且满足  $|AC| = |BD|$  的直线  $l$  只有三条的必要条件是 ( )

- A.  $r \in (0, 1]$  B.  $r \in (1, 2]$  C.  $r \in \left(\frac{3}{2}, 4\right)$  D.  $r \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

## 二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

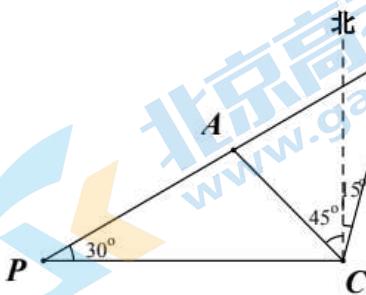
11. 复数  $z$  满足  $z(1-i) = |1+i|$ , 则复数  $z$  的实部为 \_\_\_\_\_.

12. 某直播间从参与购物的人群中随机选出 200 人, 并将这 200 人按年龄分组, 得到的频率分布直方图如图所示, 则在这 200 人中年龄在  $[25, 35)$  的人数  $n = \text{_____}$ , 直方图中  $a = \text{_____}$ .



13. 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \mathbb{N}^*$ , 且前 10 项的和  $S_{10} = 280$ , 则  $a_1$  的所有可能值共有 \_\_\_\_ 个.

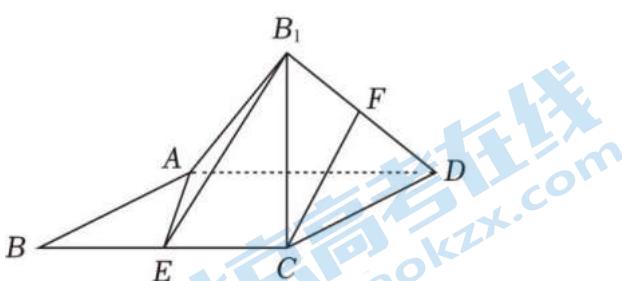
14. 一艘轮船在江中向正东方向航行, 在点  $P$  处观测到灯塔  $A, B$  在一直线上, 并与航线成  $30^\circ$  角. 轮船沿航线前进 1000 米到达  $C$  处, 此时观测到灯塔  $A$  在北偏西  $45^\circ$  方向, 灯塔  $B$  在北偏东  $15^\circ$  方向. 则此时轮船到灯塔  $B$  之间的距离  $CB$  为 \_\_\_\_ 米.



15. 如图, 已知菱形  $ABCD$  中,  $AB = 2, \angle BAD = 120^\circ, E$  为边  $BC$  的中点, 将  $\triangle ABE$  沿  $AE$  翻折成  $\triangle AB_1E$  (点  $B_1$  位于平面  $ABCD$  上方), 连接  $B_1C$  和  $B_1D, F$  为  $B_1D$  的中点, 则在翻折过程中, 给出下列四个结论:

- ①平面  $AB_1E \perp$  平面  $B_1EC$ ;
- ② $AB_1$  与  $CF$  的夹角为定值  $\frac{\pi}{3}$ ;
- ③三棱锥  $B_1 - AED$  体积最大值为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;
- ④点  $F$  的轨迹的长度为  $\frac{\pi}{2}$ .

其中所有正确结论的序号是 \_\_\_\_.



三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题 13 分)

已知函数  $f(x) = (1 + \sqrt{3}\tan 2x)\cos 2x$ .

(I) 求函数  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24}\right]$  上的最大值和最小值;

(II) 求方程  $f(x) = \sqrt{3}$  的根.

17. (本小题 14 分)

流行性感冒多由病毒引起, 据调查, 空气月平均相对湿度过大或过小时, 都有利于一些病毒繁殖和传播. 科学测定, 当空气月平均相对湿度大于 65% 或小于 40% 时, 有利于病毒繁殖和传播. 下表记录了某年甲、乙两个城市 12 个月的空气月平均相对湿度.

	第一季度			第二季度			第三季度			第四季度		
	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
甲地	54%	39%	46%	54%	56%	67%	64%	66%	78%	72%	72%	59%
乙地	38%	34%	31%	42%	54%	66%	69%	65%	62%	70%	a%	b%

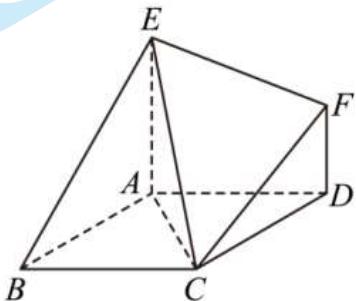
(I) 从上表 12 个月中, 随机取出 1 个月, 求该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率;

(II) 从上表第一季度和第二季度的 6 个月中随机取出 2 个月, 记这 2 个月中甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份的个数为  $X$ , 求  $X$  的分布列;

(III) 若  $a+b=108$ , 设乙地上表 12 个月的空气月平均相对湿度的中位数为  $M$ , 求  $M$  的最大值和最小值. (只需写出结论)

18. (本小题 14 分)

如图在几何体  $ABCDFE$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $AE \parallel DF$ ,  $AE \perp AD$ ,  $AB = AE = 2DF = 2$ .



(I) 判断  $AD$  是否平行于平面  $CEF$ , 并证明;

(II) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 求:

(i) 平面  $ABCD$  与平面  $CEF$  所成角的大小;

(ii) 求点  $A$  到平面  $CEF$  的距离.

条件①: 面  $EAB$  垂直面  $BCE$

条件②:  $BD \perp CE$

条件③:  $EF = CF$

注: 如果选择多个条件分别作答, 按第一个解答计分.

19. (本小题 14 分)

已知动圆过点  $M(2, 0)$ , 且被  $y$  轴截得的线段长为 4, 记动圆圆心的轨迹为曲线  $C$ . 过点  $F(1, 0)$  的直线  $l$  交  $C$  于  $A, B$  两点, 过  $F$  与  $l$  垂直的直线交  $C$  于  $D, E$  两点, 其中  $B, D$  在  $x$  轴上方,  $M, N$  分别为  $AB, DE$  的中点.

(I) 求曲线  $C$  的方程;

(II) 证明: 直线  $MN$  过定点;

20. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ .

- ( I ) 求  $f(x)$  的单调区间和极值;
- ( II ) 若  $x=0$  是函数  $g(x)=f(a)f(x)+\sin x$  的极值点.
  - ( i ) 证明:  $-2\ln 2 < a < 0$ ;
  - ( ii ) 讨论  $g(x)$  在区间  $(-\pi, \pi)$  上的零点个数.

21. (本小题 15 分)

对于各项均为整数的数列  $\{a_n\}$ , 如果满足  $a_i + i (i = 1, 2, 3, \dots)$  为完全平方数, 则称数列  $\{a_n\}$  具有“P 性质”;

不论数列  $\{a_n\}$  是否具有“P 性质”, 如果存在与  $\{a_n\}$  不是同一数列的  $\{b_n\}$ , 且  $\{b_n\}$  同时满足下面两个条件:

①  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  是  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  的一个排列; ② 数列  $\{b_n\}$  具有“P 性质”, 则称数列  $\{a_n\}$  具有“变换 P 性质”.

- ( I ) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \frac{n}{3}(n^2 - 1)$ , 证明数列  $\{a_n\}$  具有“P 性质”;
- ( II ) 试判断数列 1, 2, 3, 4, 5 和数列 1, 2, 3, ..., 11 是否具有“变换 P 性质”, 具有此性质的数列请写出相应的数列  $\{b_n\}$ , 不具此性质的说明理由;
- ( III ) 对于有限项数列  $A: 1, 2, 3, \dots, n$ , 某人已经验证当  $n \in [12, m^2] (m \geq 5)$  时, 数列  $A$  具有“变换 P 性质”, 试证明: 当  $n \in [m^2 + 1, (m+1)^2]$  时, 数列  $A$  也具有“变换 P 性质”.

## 参考答案

### 选择与填空

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	A	A	A	B	B	C	C	D

11.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  12.  $n = 30, a = 0.035$  13. 4 14.  $500\sqrt{2}$  15. ①②④

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 解：(I)  $f(x) = (1 + \sqrt{3}\tan 2x)\cos 2x$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{3}\sin 2x}{\cos 2x}\right)\cos 2x$$

$$= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

因为  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ,

所以  $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{12}$ .

所以  $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ .

即  $-1 \leq 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$ .

所以当  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，即  $x = \frac{\pi}{6}$  时，函数  $f(x)$  的最大值为 2；

当  $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ ，即  $x = -\frac{\pi}{6}$  时，函数  $f(x)$  的最小值为 -1.

(II) 因为  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  或  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ，或  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

由定义域舍去后者，综上根是  $x = k\pi + \frac{\pi}{12}$ ，

17. (1) 设事件  $A$ ：从上表 12 个月中，随机取出 1 个月，该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播。用  $A_i$  表示事件抽取的月份为第  $i$  月，

$\therefore \Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}\}$  共 12 个基本事件，

且  $A = \{A_2, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}\}$  共 6 个基本事件，

所以，该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率  $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ；

(2) 在第一季度和第二季度的 6 个月中，甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份只有 2 月和 6 月，

$\therefore X$  所有可能的取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

随机变量  $X$  的分布列为：

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

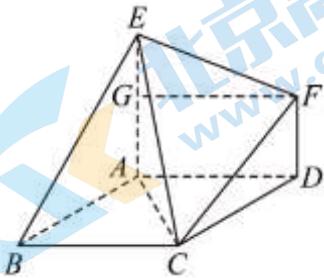
(3) 由表格已知数据：乙地数据从小到大为  $31\%, 34\%, 38\%, 42\%, 54\%, 62\%, 65\%, 66\%, 69\%, 70\%$ ，又  $a+b=108$ ，不妨假设  $a \leq b$ ，设乙地上表 12 个月的空气月平均相对湿度的中位数为  $M$ ，当  $a=b=54$  时，则  $M=54\%$ ；

当  $a < 54$ ，即  $b > 54$  时，若  $54 < b < 62$  有  $M = \frac{54\% + b\%}{2}$ ，若  $b \geq 62$  有  $M = \frac{54\% + 62\%}{2} = 58\%$ ，

$\therefore M$  的最大值为  $58\%$ ，最小值为  $54\%$ 。

18. (1)  $AD$  不平行于平面  $CEF$ ，理由如下：

取  $AE$  中点  $G$ ，



因为  $AE \parallel DF, AE = 2DF$ ，所以  $AG \parallel DF, AG = DF$

则四边形  $AGFD$  为平行四边形，所以  $AD \parallel GF$ ，又  $GF \cap EF = F$ ，所以  $AD$  不平行于  $EF$ ，

假设  $AD \parallel$  平面  $CEF$ ，因为平面  $CEF \cap$  平面  $ADFE = EF$ ，

$AD \subset$  平面  $ADFE$

所以  $AD \parallel EF$ ，

与  $AD$  不平行于  $EF$  矛盾，所以假设不成立，即  $AD$  不平行于平面  $CEF$ ；

(2) 选择条件①：矛盾

选择条件②：连接  $BD$ ，取  $CD$  中点  $M$ ，连接  $AM$

因为菱形  $ABCD, \angle ABC = 60^\circ$ ，所以  $\triangle ACD$  为正三角形，又  $M$  为  $CD$  中点，所以  $AM \perp CD$ ，由于  $AB \parallel CD$ ，

所以  $AM \perp AB$ ，

在菱形  $ABCD$  中，有  $AC \perp BD$ ，

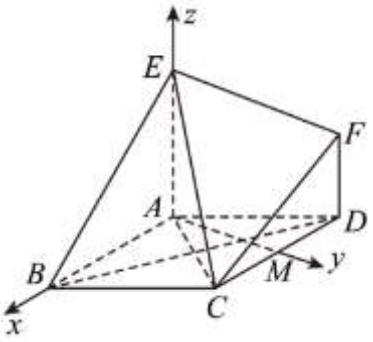
又因为  $BD \perp CE, AC \cap CE = E, AC, CE \subset$  平面  $ACE$ ，所以  $BD \perp$  平面  $ACE$ ，

因为  $AE \subset$  平面  $ACE$ ，所以  $BD \perp AE$

又因为  $AE \perp AD, BD \cap AD = D, BD, AD \subset$  面  $ABCD$ ，所以  $AE \perp$  面  $ABCD$ ，

而  $AB, AM \subset$  面  $ABCD$ ，所以  $AE \perp AB, AE \perp AM$

所以如图，以  $A$  为原点， $AB, AM, AE$  所在直线为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系，



则  $A(0,0,0), B(2,0,0), C(1,\sqrt{3},0), D(-1,\sqrt{3},0), E(0,0,2), F(-1,\sqrt{3},1)$

( i ) 因为  $AE \perp$  面  $ABCD$  , 所以  $\overrightarrow{AE} = (0,0,2)$  为平面  $ABCD$  的一个法向量

设平面  $CEF$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$  , 因为  $\overrightarrow{CE} = (-1, -\sqrt{3}, 2)$ ,  $\overrightarrow{CF} = (-2, 0, 1)$

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = -x - \sqrt{3}y + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = -2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ z = 2x \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$$

设平面  $ABCD$  与平面  $CEF$  所成角为  $\theta$  ,

$$\text{所以 } \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AE} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AE}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AE}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

则  $\theta = \frac{\pi}{4}$  即平面  $ABCD$  与平面  $CEF$  所成角大小为  $\frac{\pi}{4}$  ;

( ii ) 因为  $\overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3}, 0)$  , 由 ( i ) 知平面的一个法向量为  $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$

$$\text{所以点 } A \text{ 到平面 } CEF \text{ 的距离为 } \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1+3+0|}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

条件③:

取  $CD$  中点  $M$  , 连接  $AM$

因为菱形  $ABCD$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$  , 所以  $\triangle ACD$  为正三角形, 又  $M$  为  $CD$  中点, 所以  $AM \perp CD$  , 由于  $AB \parallel CD$  , 所以  $AM \perp AB$  ,

因为  $AE \perp AD$  , 由 (1) 可得  $EG \perp GF$  , 所以  $EF = \sqrt{EG^2 + GF^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

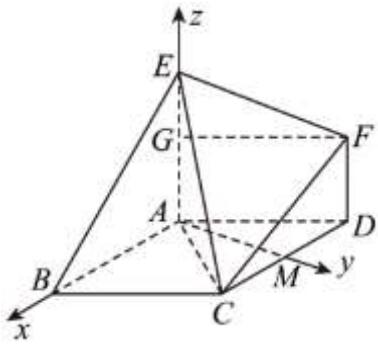
所以  $EF = CF = \sqrt{5} = \sqrt{DF^2 + CD^2}$  , 即  $DF \perp CD$

因为  $AE \parallel DF$  , 所以  $AE \perp CD$

又因为  $AE \perp AD, CD \cap AD = D, CD, AD \subset$  面  $ABCD$  , 所以  $AE \perp$  面  $ABCD$  ,

而  $AB, AM \subset$  面  $ABCD$  , 所以  $AE \perp AB, AE \perp AM$

所以如图, 以  $A$  为原点,  $AB, AM, AE$  所在直线为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系,



则  $A(0,0,0), B(2,0,0), C(1,\sqrt{3},0), D(-1,\sqrt{3},0), E(0,0,2), F(-1,\sqrt{3},1)$

(i) 因为  $AE \perp$  面  $ABCD$ , 所以  $\overrightarrow{AE} = (0,0,2)$  为平面  $ABCD$  的一个法向量

设平面  $CEF$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 因为  $\overrightarrow{CE} = (-1, -\sqrt{3}, 2)$ ,  $\overrightarrow{CF} = (-2, 0, 1)$

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = -x - \sqrt{3}y + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = -2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ z = 2x \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$$

设平面  $ABCD$  与平面  $CEF$  所成角为  $\theta$ ,

$$\text{所以 } \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AE} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AE}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AE}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 则 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

即平面  $ABCD$  与平面  $CEF$  所成角大小为  $\frac{\pi}{4}$ ;

(ii) 因为  $\overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3}, 0)$ , 由 (i) 知平面的一个法向量为  $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2)$

$$\text{所以点 } A \text{ 到平面 } CEF \text{ 的距离为 } \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1+3+0|}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

19. (I) 曲线  $C$  的方程是  $y^2 = 4x$

(II) 【方法一】: 由  $C: y^2 = 4x$ , 故  $F(1,0)$ , 由直线  $AB$  与直线  $CD$  垂直, 故两只直线斜率都存在且不为 0,

设直线  $AB$ 、 $CD$  分别为  $x = m_1 y + 1$ 、 $x = m_2 y + 1$ , 有  $m_1 m_2 = -1$ ,

$A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $E(x_3, y_3)$ 、 $D(x_4, y_4)$ ,

$$\text{联立 } C: y^2 = 4x \text{ 与直线 } AB, \text{ 即有 } \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = m_1 y + 1 \end{cases},$$

消去  $x$  可得  $y^2 - 4m_1 y - 4 = 0, \Delta = 16m_1^2 + 16 > 0$ ,

故  $y_1 + y_2 = 4m_1$ ,  $y_1 y_2 = -4$ ,

则  $x_1 + x_2 = m_1 y_1 + 1 + m_1 y_2 + 1 = m_1(y_1 + y_2) + 2 = 4m_1^2 + 2$ ,

$$\text{故 } \frac{x_1 + x_2}{2} = 2m_1^2 + 1, \frac{y_1 + y_2}{2} = 2m_1,$$

即  $M(2m_1^2 + 1, 2m_1)$ ,

同理可得  $N(2m_2^2 + 1, 2m_2)$ ,

当  $2m_1^2 + 1 \neq 2m_2^2 + 1$  时，

$$\text{则 } l_{MN} : y = \frac{2m_2 - 2m_1}{2m_2^2 + 1 - (2m_1^2 + 1)}(x - 2m_1^2 - 1) + 2m_1,$$

$$\text{即 } y = \frac{m_2 - m_1}{m_2^2 - m_1^2}(x - 2m_1^2 - 1) + 2m_1 = \frac{x}{m_2 + m_1} - \frac{2m_1^2 + 1}{m_2 + m_1}$$

$$+ \frac{2m_1(m_2 + m_1)}{m_2 + m_1} = \frac{x}{m_2 + m_1} - \frac{2m_1^2 + 1 - 2m_1m_2 - 2m_1^2}{m_2 + m_1} = \frac{x}{m_2 + m_1} - \frac{1 - 2m_1m_2}{m_2 + m_1},$$

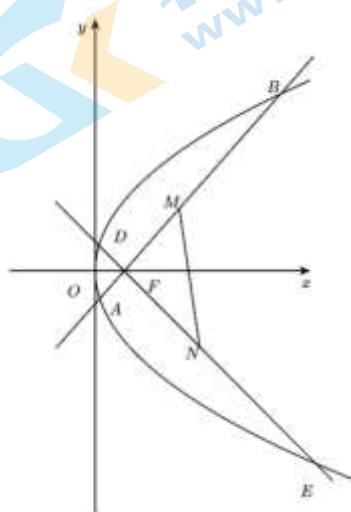
$$\text{由 } m_1m_2 = -1, \text{ 即 } y = \frac{x}{m_2 + m_1} - \frac{1 + 2}{m_2 + m_1} = \frac{1}{m_2 + m_1}(x - 3),$$

$$\text{故 } x = 3 \text{ 时, 有 } y = \frac{1}{m_2 + m_1}(3 - 3) = 0,$$

此时  $MN$  过定点，且该定点为  $(3, 0)$ ，

当  $2m_1^2 + 1 = 2m_2^2 + 1$  时，即  $m_1^2 = m_2^2$  时，由  $m_1m_2 = -1$ ，即  $m_1 = \pm 1$  时，

故直线  $MN$  过定点，且该定点为  $(3, 0)$ ；



【方法二】：设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，不妨设  $x_1 < x_2$ 。

设  $l: x = my + 1$ ，则  $m > 0$ 。由  $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases}$ ，得  $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，

$$\text{故 } y_1 + y_2 = 4m, y_1y_2 = -4, \frac{y_1 + y_2}{2} = 2m, \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m(y_1 + y_2) + 2}{2} = 2m^2 + 1.$$

所以  $M(2m^2 + 1, 2m)$ 。

同理可得  $N\left(\frac{2}{m^2} + 1, -\frac{2}{m}\right)$ 。

若  $m \neq 1$ ，则直线  $MN: y = \frac{m}{m^2 - 1}(x - 2m^2 - 1) + 2m = \frac{m}{m^2 - 1}(x - 3)$ ,  $MN$  过点  $(3, 0)$ 。

若  $m = 1$ ，则直线  $MN: x = 3$ ,  $MN$  过点  $(3, 0)$ 。

综上，直线  $MN$  过定点  $(3, 0)$ 。

20. 【答案】解：(1)  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ,  $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ , 取  $f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0$

得到  $x=1$ ,

当  $x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数单调递增; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数单调递减.

故函数在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 有极大值  $f(1) = \frac{1}{e}$ , 无极小值

$$(2) (i) g(x) = f(a) \cdot f(x) + \sin x = \frac{a}{e^a} \cdot \frac{x}{e^x} + \sin x, g'(x) = \frac{a}{e^a} \cdot \frac{1-x}{e^x} + \cos x$$

$$g'(0) = \frac{a}{e^a} + 1 = 0, \text{ 故 } e^a + a = 0,$$

设  $F(x) = e^x + x$ , 函数单调递增,

$$F(0) = 1 > 0, F(-2\ln 2) = e^{-2\ln 2} - 2\ln 2 = \frac{1}{4} - \ln 4 < 0.$$

根据零点存在定理知  $-2\ln 2 < a < 0$ .

$$(ii) g(x) = -\frac{x}{e^x} + \sin x, g(0) = 0, g'(x) = \frac{x-1}{e^x} + \cos x,$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{x-1}{e^x} + \cos x, h'(x) = \frac{2-x}{e^x} - \sin x,$$

当  $x \in (-\pi, 0)$  时,  $\frac{2-x}{e^x} > 0, \sin x < 0$ , 故  $h'(x) > 0, g'(x)$  单调递增,  $g'(x) < g'(0) = -1 + 1 = 0$ , 故函

数  $g(x)$  单调递减,  $g(x) > g(0) = 0$ ,

故函数在  $(-\pi, 0)$  上无零点; 1 分

$$\text{当 } x \in (0, \pi) \text{ 时, } g(x) = -\frac{x}{e^x} + \sin x = \frac{1}{e^x}(e^x \sin x - x),$$

$$\text{设 } F(x) = e^x \sin x - x, F'(x) = e^x(\sin x + \cos x) - 1,$$

$$\text{设 } k(x) = e^x(\sin x + \cos x) - 1, \text{ 则 } k'(x) = 2e^x \cos x,$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } k'(x) = 2e^x \cos x > 0, \text{ 当 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 时, } k'(x) = 2e^x \cos x < 0,$$

故  $k(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  单调递增, 在  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  上单调递减,

$$k(0) = 0, k\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 > 0, k(\pi) = -e^\pi - 1 < 0,$$

$$\text{故存在 } x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 使 } k(x_0) = 0,$$

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $k(x) > 0, F(x)$  单调递增;

当  $x \in (x_0, \pi)$  时,  $k(x) < 0, F(x)$  单调递减.  $F(0) = 0$ , 故  $F(x_0) > 0, F(\pi) = -\pi < 0$ , 故函数在  $(x_0, \pi)$  上有 1 个零点.

综上, 函数的零点个数为 2.

21. 解: (I) 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{3}(n^2 - 1) - \frac{n-1}{3}[(n-1)^2 - 1] = n^2 - n$ ,

又  $a_1 = 0$ , 所以  $a_n = n^2 - n (n \in \mathbf{N}^*)$ .

所以  $a_i + i = i^2 (i = 1, 2, 3, \dots)$  是完全平方数, 数列  $\{a_n\}$  具有“P 性质”.

(II) 数列 1, 2, 3, 4, 5 具有“变换 P 性质”,

数列  $\{b_n\}$  为 32154.

数列 1, 2, 3, ..., 11 不具有“变换 P 性质”.

因为 11, 4 都只有与 5 的和才能构成完全平方数,

所以数列 1, 2, 3, ..., 11 不具有“变换 P 性质”.

(III) 设  $n = m^2 + j, 1 \leq j \leq 2m + 1$ ,

注意到  $(m+2)^2 - (m^2 + j) = 4m + 4 - j$ ,

令  $h = 4m + 4 - j - 1$ ,

由于  $1 \leq j \leq 2m + 1, m \geq 5$ , 所以  $h = 4m + 4 - j - 1 \geq 2m + 2 \geq 12$ ,

又  $m^2 - h = m^2 - 4m - 4 + j + 1 \geq m^2 - 4m - 2$ ,

$m^2 - 4m - 2 = (m-2)^2 - 6 > 0$ ,

所以  $h < m^2$ ,

即  $h \in [12, m^2]$ .

因为当  $n \in [12, m^2] (m \geq 5)$  时, 数列  $\{a_n\}$  具有“变换 P 性质”,

所以  $1, 2, \dots, 4m + 4 - j - 1$  可以排列成  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_h$ , 使得  $a_i + i (i = 1, 2, \dots, h)$  都是平方数;

另外,  $4m + 4 - j, 4m + 4 - j + 1, \dots, m^2 + j$  可以按相反顺序排列, 即排列为  $m^2 + j, \dots, 4m + 4 - j + 1$ ,

$4m + 4 - j$ ,

使得  $(4m + 4 - j) + (m^2 + j) = (m+2)^2$ ,

$(4m + 4 - j + 1) + (m^2 + j - 1) = (m+2)^2$ ,

所 以  $1, 2, \dots, 4m + 4 - j - 1, 4m + 4 - j, \dots, m^2 - 1 + j, m^2 + j$  可 以 排 成  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_h$ ,

$m^2 + j, \dots, 4m + 4 - j$  满足  $a_i + i (i = 1, 2, \dots, m^2 + j)$  都是平方数.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的设计理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！



官方微博账号：京考一点通  
官方网站：[www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

咨询热线：010-5751 5980  
微信客服：gaokzx2018