师大二附 2021 届高三 10 月考

一、选择题（共 10 小题，共 40 分）

01.设集合 $M=\{x|0<x\le 3\}, N=\{x|0<x\le 2\}$,那么 " $a\in M$"是 " $a\in N$"的 【　】

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

02.若 $\log_3 b \bullet \log_5 3=3$,则 b= 【　】

A.6　　B.5

C.3^5　　D.5^3

03.已知 $xy\in R$,且 $x>y>0$,则 【　】

A.$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>0$　　B.$\cos x-\cos y<0$

C.$\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^y<0$　　D.$\ln(x-y)>0$

04.已知 $y=f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-2$,那么不等式 $f(x)<\frac{1}{2}$ 的解集是 【　】

A.$\left\{x\left|0<x<\frac{5}{2}\right.\right\}$　　B.$\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<0\right.\right\}$

C.$\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<0\text{或}0<x<\frac{5}{2}\right.\right\}$　　D.$\left\{x\left|x<-\frac{3}{2}\text{或}0\le x<\frac{5}{2}\right.\right\}$

05.已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$,则 $\sin\alpha=$ 【　】

A.$\frac{1}{5}$　　B.$\frac{\sqrt{5}}{5}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

06.若函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+a$ 在区间（1,e)上存在零点，则常数 a 的取值范围为 【　】

A.$0<a<1$　　B.$\frac{1}{e}<a<1$

C.$\frac{1}{e}-1<a<1$　　D.$\frac{1}{e}+1<a<1$

07.函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{ax}$ 在（$-\infty$,-1)上单调递增，则实数 a 的取值范围是 【 】

A.$[1,+\infty)$　　B.$(-\infty,0)\cup(0,1]$

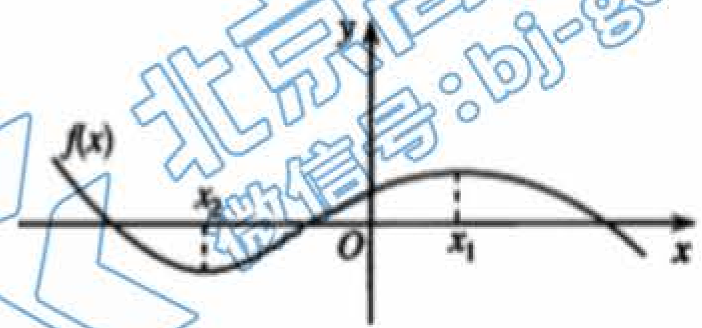
C.$(0,1]$　　D.$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

08.数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,已知 $a_1=\dfrac{1}{5}$，且对任意正整数 m,n,都有 $a_{m+n}=a_m a_n$,若 $S_n<a$ 恒成立，则实数 a 的最小值为 【 】

A.$\dfrac{1}{4}$　　B.$\dfrac{3}{4}$

C.$\dfrac{4}{3}$　　D.4

09.函数 $f\left(x\right)=ax^3-x^2+cx+d$ 的图象如图所示，则有 【 】



A.$a>0,c<0,d>0$

B.$a<0,c<0,d>0$

C.$a<0,c>0,d>0$

D.$a>0,c>0,d<0$

10.已知函数 $f\left(x\right)=\left|\lg x\right|,a>b,f\left(a\right)=f\left(b\right)$,且 $a^3+b^3>m$ 恒成立，那么 m 的最大值等于 【 】

A.8　　B.$2\sqrt{3}$

C.$\sqrt{3}$　　D.2

二、填空题（共 5 小题，共 25 分）

11.若集合 $A=\{x|-2<x<1\}$,$B=\{x|x\geq a\}$,且 $A\cup B=\{x|x>-2\}$,则实数 a 的取值范围是____________.

12.设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x+a,x<1\\2^x,x\geq 1\end{cases}$ 的最小值为 2,则实数 a 的取值范围是____________.

13.记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.若 $a_3=1,S_7=14$,则 $a_5=$____________.

14.已知函数 $f\left(x\right)=ax^3-x^2+1$ 在（0,1)上有增区间，则 a 的取值范围是____________.

15.已知函数 $f\left(x\right)=ae^x-x^2$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是____________.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

16.已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$2a_1+3a_2=1,a_3^2=9a_2a_6$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$,求数列$\{b_n\}$的通项公式。

17.在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c.已知$b^2+c^2=a^2+bc$.

（1）求A的大小；

（2）如果$\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{3},b=2$,求$\Delta ABC$的面积。

18.函数$f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}+2\sin x$.

（1）求函数$f(x)$的定义域；

（2）求$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$的值；

（3）求函数$f(x)$的最小正周期及其图象的所有对称轴的方程。

19.已知函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-2x+a+2\right)e^x$,其中 e 是自然对数的底数，$a\in R$.

（1）求函数 $f(x)$的单调区间；

（2）当 $x\in[0,4]$时，求函数 $f(x)$的最小值。

20.已知 $f\left(x\right)=\sin x, g\left(x\right)=\ln x, h\left(x\right)=x^2-ax-1$.

（1）若 $x\in[0,1]$,证明：$f(x)\geq g(x+1)$;

（2）对任意 $x\in(0,1]$,都有 $e^{f(x)}+h\left(x\right)-g\left(x\right)>0$,求整数 a 的最大值。

21.已知$\left\{a_n\right\}$是公差不等于0的等差数列，$\left\{b_n\right\}$是等比数列$\left(n\in N^*\right)$,且$a_1=b_1>0$.

（1）若$a_3=b_3$,比较a_2与b_2的大小关系；

（2）若$a_2=b_2,a_4=b_4$.

①判断b_{10}是否为数列$\left\{a_n\right\}$中的某一项，并请说明理由；

②若b_m是数列$\left\{a_n\right\}$中的某一项，写出正整数m的集合（不必说明理由）。

答案

第一部分

1. B　2 D　3. C　4. D　5. B

6. C　7. D　8. A　9. C　10 D

第二部分

11. $-2 < a \le 1$

12. $a \ge 3$

【解析】当 $x \ge 1$ 时，$f(x) = 2^x$ 为增函数，且 $f(1) = 2$.

当 $x < 1$ 时，$f(x) = -x + a$ 为减函数，且 $f(1) = a - 1$.

要满足题意，必有 $a - 1 \ge 2$，解得 $a \ge 3$.

13. 3

14. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

【解析】$f'(x) = 3ax^2 - 2x$，因为函数 $f(x) = ax^3 - x^2 + 1$ 在 $(0,1)$ 上有增区间，所以存在 $x \in (0,1)$ 使得 $f'(x) > 0$ 成立，即 $a > \frac{2}{3x}$ 成立，因为 $0 < x < 1$ 时，$\frac{2}{3x} > \frac{2}{3}$，所以 $a > \frac{2}{3}$.

15. $\left(0,\frac{2}{e}\right)$

【解析】$f'(x) = ae^x - 2x$，

若函数 $f(x) = ae^x - x^2$ 有两个极值点，

则 $y = a$ 和 $g(x) = \frac{2x}{e^x}$ 在 R 上有 2 个交点，

$g'(x) = \frac{2-2x}{e^x}$，

$x \in (-\infty,1)$ 时，即 $g'(x) > 0$，$g(x)$ 递增；

$x \in (1,+\infty)$ 时，$g'(x) < 0$，$g(x)$ 递减，

故 $g(x)_{max} = g(1) = \frac{2}{e}$，

而 $\frac{2x}{e^x} > 0$ 恒成立，所以 $0 < a < \frac{2}{e}$.

第三部分

16. （1）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由 $a_3^2 = 9a_2a_6$ 得 $a_3^2 = 9a_4^2$，

所以 $q^2 = \frac{1}{9}$.

由条件可知 $q > 0$，故 $q = \frac{1}{3}$.

由 $2a_1 + 3a_2 = 1$ 得 $2a_1 + 3a_1q = 1$，

所以 $a_1=\dfrac{1}{3}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项式为 $a_n=\dfrac{1}{3^n}$.

(2)

$$\begin{aligned} b_n &= \log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n \\ &= -(1+2+\cdots+n) \\ &= -\frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

17. (1) 因为 $b^2+c^2=a^2+bc$,

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$,

又因为 $A\in(0,\pi)$,

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $B\in(0,\pi)$,

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,

得 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=3$.

因为 $b^2+c^2=a^2+bc$,

所以 $c^2-2c-5=0$,

解得 $c=1\pm\sqrt{6}$,

因为 $c>0$,

所以 $c=\sqrt{6}+1$.

故 △ ABC 的面积

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.$$

18 (1) 由 $\sin x+\cos x\neq 0$ 得 $x\neq k\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $k\in Z$,

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}+2\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

(3) 因为 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}+2\sin x=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}+2\sin x=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$.

因为函数 $y=\sin x$ 的对称轴为 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$,

又由 $x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，得 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$，

所以 $f(x)$ 的对称轴的方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$.

19 (1)

因为 $f'(x)=(x^2+a)e^x$

若 $a\geq 0$,$(-\infty,+\infty)$单调递增；

若 $a<0$, $(-\infty,-\sqrt{-a})$,$(\sqrt{-a},+\infty)$单调递增；

$(-\sqrt{-a},\sqrt{-a})$单调递减；

(2)

由（1），得 $a\geq 0$ 时，$f(x)$的最小值为 $f(0)=a+2$

$a<-16$ 时，最小值为 $f(4)=(a+10)e^4$

$-16\leq a<0$ 时，最小值为 $f(\sqrt{-a})=(2-2\sqrt{-a})e^{\sqrt{-a}}$

20. （1） 设 $F(x)=\sin x-\ln(x+1)(0\leq x\leq 1)$，则 $F'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，

注意到 $F'(0)=0$，因为 $x\in[0,1]$，

因为 $F''(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x$，则 $F''(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，

所以 $F''(x)>F''(1)=\frac{1}{4}-\sin 1<0$，$F''(x)<F''(0)=1>0$，

所以存在唯一零点 $x_0\in(0,1)$，使得 $F''(x_0)=0$，

则 $F'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 时单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减，

又 $F'(1)=-\frac{1}{2}+\cos 1>-\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=0$，$F'(0)=0$，

所以 $F'(0)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

则 $F(x)\geq F(0)=0$，即 $F(x)\geq 0$. 所以 $f(x)\geq g(x+1)$.

（2） 因为对任意的 $x\in(0,1]$，不等式 $e^{f(x)}+h(x)-g(x)>0$，

即 $e^{\sin x}+x^2-ax-1-\ln x>0$ 恒成立，令 $x=1$，则 $e^{\sin 1}>a$，

由（1）知 $\sin 1>\ln 2$，所以 $2=e^{\ln 2}<e^{\sin 1}<e^1<3$，

由于 a 为 $e^{\sin x}+x^2-ax-1-\ln x>0$ 整数，则 $a\leq 2$，

因此 $e^{\sin x}+x^2-ax-1-\ln x\geq e^{\sin x}+x^2-2x-1-\ln x$.

下面证明 $H(x)=e^{\sin x}+x^2-2x-1-\ln x>0$ 在区间 $(0,1]$ 恒成立即可.

由（1）知 $\sin x>\ln(x+1)$，则 $e^{\sin x}>x+1$，

故 $H(x)>x+1+x^2-2x-1-\ln x=x^2-x-\ln x$，

设 $G(x)=x^2-x-\ln x$，$x\in(0,1]$，

则 $G'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}\leq 0$，

所以 $G(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，

所以 $G(x) \ge G(1) = 0$，所以 $H(x) > 0$ 在 $(0,1]$ 上恒成立.

综上所述，a 的最大值为 2.

21. （1） 设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则

$b_3 = b_1q^2 > 0$，$a_2 = \dfrac{a_1+a_3}{2} = \dfrac{b_1+b_3}{2}$，$b_2^2 = b_1b_3$，$b_2 = \pm\sqrt{b_1b_3}$.

当 $b_2 = -\sqrt{b_1b_3}$ 时，显然 $a_2 > b_2$；

当 $b_2 = \sqrt{b_1b_3}$ 时，由均值不等式知 $\dfrac{b_1+b_3}{2} \ge \sqrt{b_1b_3}$，当且仅当 $b_1 = b_3$ 时取等号，而 $b_1 \ne b_3$，所以

$\dfrac{b_1+b_3}{2} > \sqrt{b_1b_3}$，即 $a_2 > b_2$.

综上所述，$a_2 > b_2$.

（2） 设 $a_1 = b_1 = a$，数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

①因为 $a_2 = b_2$，$a_4 = b_4$，所以 $a + d = aq$，$a + 3d = aq^3$，得 $q^3-1 = 3(q-1)$.

所以 $q = 1$ 或 $q = -2$. 因为 $q \ne 1$，所以 $q = -2$，$d = a(q-1) = -3a$.

令 $a_k = b_{10}$，即 $a_1 + (k-1)d = b_1q^9$，$a-3(k-1)a = a(-2)^9$，得 $k = 172$，所以 b_{10} 是 $\{a_n\}$ 中的一项.

②设 $b_m = a_k$，则 $a_1 + (k-1)d = b_1q^{m-1}$，$a-3(k-1)a = a(-2)^{m-1}$，$4-3k = (-2)^{m-1}$.

当 $m = 1$ 或 $m = 2n(n\in N^*)$ 时，$k \in N^*$，故正整数 m 的集合是 $\{m|\ m=1 或 m=2n,n\in N^*\}$.