绝密★启用前

“天一大联考·安徽卓越县中联盟”

2022—2023 学年高三年级第二次联考

数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid\sqrt{x-1}\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围是

A. $[5,+\infty)$　　B. $(-\infty,5]$　　C. $[0,+\infty)$　　D. $(-\infty,0]$

2. 已知复数 $z=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，则 z 在复平面内所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

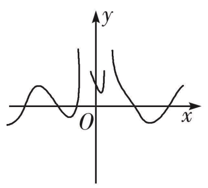
3. 已知△SAB 是圆锥 SO 的一个轴截面，C,D 分别为母线 SA,SB 的中点，$SO=2\sqrt{7}$，$CD=2$，则圆锥 SO 的侧面积为

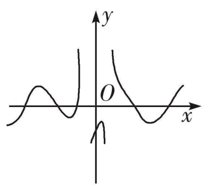
A. 4π　　B. $4\sqrt{2}\pi$　　C. 8π　　D. $8\sqrt{2}\pi$

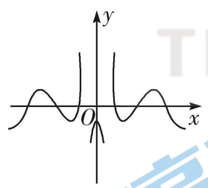
4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_3=a_5$，$a_3-a_1=8$，则 $a_7=$

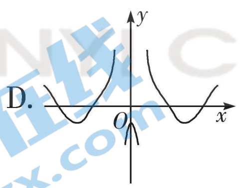
A. 30　　B. 28　　C. 26　　D. 13

5. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-1}+\sin 2x$ 的部分图象大致是

A. 

B. 

C. 

D. 

6. 已知 $x=6\log_{64}3$，$y=\dfrac{1}{3}\log_3 64$，$z=\dfrac{3}{2}\log_8 3$，则

A. $x>y>z$　　B. $z>x>y$　　C. $y>z>x$　　D. $y>x>z$

7. 已知点 D 为锐角△ABC 的外接圆 O 上任意一点，$AB=2$，$AC=4$，则 $(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值范围为

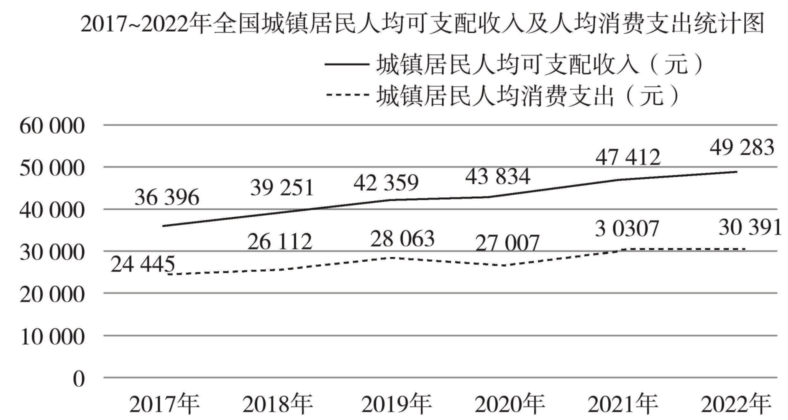
A. $[0,16)$　　B. $[-2,8)$　　C. $[0,8)$　　D. $[-2,16)$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与双曲线 C 的右支相交于点 P，过 O,F_2 作 $ON\perp PF_1$，$F_2M\perp PF_1$，垂足分别为 N,M，且 M 为线段 PN 的中点，$|ON|=a$，则双曲线 C 的离心率为

A. 2　　B. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 如图为国家统计局公布的 2017～2022 年全国城镇居民人均可支配收入及人均消费支出统计图，则



A. 2017～2022 年全国城镇居民人均可支配收入及人均消费支出均呈增长趋势

B. 2017～2022 年全国城镇居民人均消费支出的中位数为 27 535

C. 2017～2022 年全国城镇居民人均可支配收入的极差大于人均消费支出的极差

D. 2022 年全国城镇居民人均消费支出占人均可支配收入的比例大于 80%

10. 已知 O 为坐标原点，动点 P 满足 $|PO|=1$，记动点 P 的轨迹为 Ω，设 A,B 为轨迹 Ω 上的两点，$M(2,0)$，$N(0,2)$，Q 为直线 MN 上一动点，则下列结论中正确的是

A. 直线 MN 与轨迹 Ω 有两个公共点

B. 若直线 QA 为轨迹 Ω 的一条切线，则 $|QA|$ 的最小值为 1

C. 当 $|AB|=\sqrt{3}$ 时，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OQ}|$ 的最大值是 $\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$

D. 若 QA,QB 为轨迹 Ω 的两条切线，则四边形 $QAOB$ 面积的最小值为 1

11. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+2\sin^2\dfrac{\omega x}{2}(\omega>0)$ 的图象在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有三个对称中心，则

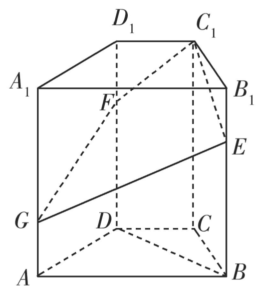
A. ω 的取值范围是 $\left[2,\dfrac{10}{3}\right)$

B. $f(x)$ 的图象在区间 $[0,\pi]$ 上有 2 条或 3 条对称轴

C. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上的最大值不可能为 2

D. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上为增函数

12. 如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB/\!/CD$，$AB=2AD=2DC=2CB=4$，E,F,G 分别为侧棱 BB_1,DD_1,AA_1 上一点，$BE=DF=A_1G=2$，则



A. $BD\perp GF$

B. $\angle GEC_1=\dfrac{\pi}{2}$

C. $\angle EGF$ 的最大值为$\dfrac{\pi}{6}$

D. 当 $AA_1=\dfrac{8}{3}$时，$GE/\!/C_1F$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\cos\theta$，则$\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=$__________.

14. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N\left(\dfrac{1}{2},\sigma^2\right)$，且 $P(\xi<-1)=P(\xi>m)$，则$(x+m)^6$ 的展开式中 x 的系数为__________.

15. 已知在平面直角坐标系 xOy 中椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-9}=1(a>3)$的离心率为$\dfrac{3}{4}$，$F_1,F_2$ 分别为椭圆 C 的左、右焦点，P 为椭圆上不同于四个顶点的任意一点，延长线段 F_2P 到 B，若在 x 轴上存在一点 A，满足$|AB|=|AF_1|$，$PA\perp BF_1$，垂足为 Q，则$|OQ|=$__________.

16. 已知 $x>0,y>0$，且 $\ln(xy)^y=e^x$，则 $x^2y-\ln x-x$ 的最小值为__________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

从①$(a_n+1)^2=a_{n-1}^2+4a_n+2a_{n-1}+1(n\geqslant2)$，$a_n>0$，②$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$，③前 n 项和 S_n 满足$\dfrac{nS_{n+1}}{S_n+n}=n+1$ 中任选一个，补充在下面的横线上，再解答.

已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，且__________.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)若 $b_n=\dfrac{2}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (12 分)

乡村民宿立足农村，契合了现代人远离喧嚣、亲近自然、寻味乡愁的美好追求. 某镇在旅游旺季前夕，为了解各乡村的普通型民宿和品质型民宿的品质，随机抽取了 8 家规模较大的乡村民宿，统计得到各家的房间数如下表：

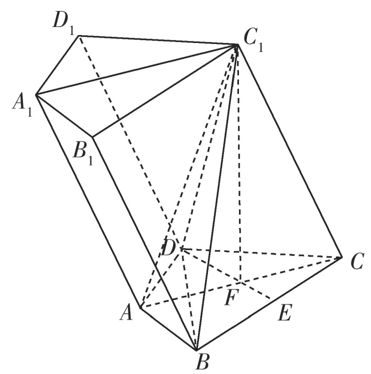
民宿点	甲	乙	丙	丁	戊	已	庚	辛
普通型民宿	16	8	12	14	13	18	9	20
品质型民宿	6	16	4	10	11	10	9	12

(Ⅰ)从这 8 家中随机抽取 3 家，在抽取的这 3 家的普通型民宿的房间均不低于 10 间的条件下，求这 3 家的品质型民宿的房间均不低于 10 间的概率；

(Ⅱ)从这 8 家中随机抽取 4 家，记 X 为抽取的这 4 家中普通型民宿的房间不低于 15 间的家数，求 X 的分布列和数学期望.

19. (12 分)

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC=CD=DB=\sqrt{3}AB=\sqrt{3}AD=2$，$C_1B=C_1D$.

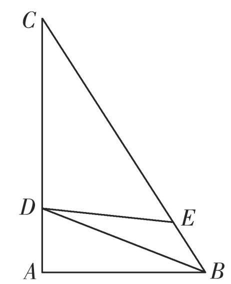


(Ⅰ)求证：平面 $BC_1D\perp$平面 ACC_1A_1；

(Ⅱ)设 E 为棱 BC 的中点，线段 AC,DE 交于点 F，$C_1F\perp$平面 $ABCD$，且 $C_1F=2$，求平面 ABC_1 与平面 CBC_1 的夹角的余弦值.

20. (12 分)

如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB\perp AC$，D,E 分别为边 CA,CB 上一点，$DE=2AD=8$，$\angle BDE=\dfrac{\pi}{6}$.



(Ⅰ)若 $BE=2\sqrt{7}$，求 AB 的长；

(Ⅱ)若$\angle ADE=\angle BED$，求 BE 的长.

21. (12 分)

已知点 F 是抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点，准线 l_0 与 x 轴的交点为 K，点 P 是抛物线 C 上任一动点. 当点 P 的横坐标为 8 时，$\triangle PFK$ 的面积为 $4\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求抛物线 C 的方程；

(Ⅱ)设 A,B 是抛物线 C 的准线上的两个不同点，点 P 的横坐标大于 1，坐标原点 O 到$\triangle PAB$ 的边 PA,PB 的距离都等于 1，求$\triangle PAB$ 的周长的最小值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+(a-2)e^x+(1-a)x(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)当 $a=-1$ 时，求函数 $F(x)=f(x)+x$ 的图象在点$(0,F(0))$处的切线方程；

(Ⅱ)若 $f(x)$的图象与直线 $y=1$ 恰有两个不同的公共点，求实数 a 的取值范围.

“天一大联考·安徽卓越县中联盟”
2022—2023 学年高三年级第二次联考

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查根据集合间的关系求参数的取值范围.

解析　因为 $A=\{x|0\leqslant x-1\leqslant 4,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{Z}\}=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{x|x\leqslant a\}$,$A\cap B=A$,所以 $a\geqslant 5$.

2. 答案　D

命题意图　本题考查复数的运算及几何意义.

解析　$z=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(2+3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$,所以 z 在复平面内所对应的点 $\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$ 位于第四象限.

3. 答案　D

命题意图　本题考查圆锥的侧面积公式.

解析　设圆锥底面半径为 r,母线长为 l,由题意知 CD 是 $\triangle SAB$ 的中位线,所以 $r=CD=2$,$l=\sqrt{r^2+SO^2}=\sqrt{4+28}=4\sqrt{2}$,所以侧面积 $S=\pi rl=2\times 4\sqrt{2}\pi=8\sqrt{2}\pi$.

4. 答案　C

命题意图　本题考查等差数列的性质.

解析　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,因为 $S_3=a_5$,$a_3-a_1=8$,所以 $3a_1+3d=a_1+4d$,$a_3-a_1=2d=8$,解得 $d=4$,$a_1=2$,所以 $a_7=a_1+6d=2+6\times 4=26$.

5. 答案　B

命题意图　本题考查函数图象的识别.

解析　因为 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{9}{4\pi^2-9}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{9}{4\pi^2-9}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,即 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$,所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数,排除 C,D,又 $f(0)=-1$,排除 A,故选 B.

6. 答案　A

命题意图　本题考查利用函数的单调性比较大小.

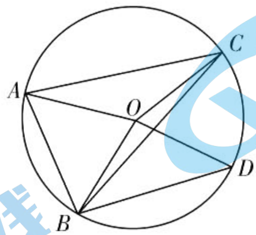
解析　$x=6\log_{64}3=6\log_{2^6}3=6\times\dfrac{1}{6}\log_2 3=\log_2 3>1$,$y=\dfrac{1}{3}\log_3 64=\dfrac{1}{3}\times\log_3 4^3=\log_3 4>1$,$z=\dfrac{3}{2}\log_8 3=\dfrac{3}{2}\log_{2^3}3=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}\log_2 3=\dfrac{1}{2}\log_2 3=\log_2\sqrt{3}<\log_2 2=1$. 又 $\log_2 3-\log_3 4=\dfrac{\lg 3}{\lg 2}-\dfrac{\lg 4}{\lg 3}=\dfrac{(\lg 3)^2-\lg 2\lg 4}{\lg 2\lg 3}$,$\lg 2>0$,$\lg 4>0$,所以 $\lg 2\lg 4<\left(\dfrac{\lg 2+\lg 4}{2}\right)^2=(\lg\sqrt{8})^2<(\lg 3)^2$,故 $\log_2 3-\log_3 4>0$,所以 $x>y$. 综上可知 $x>y>z$.

7. 答案　B

命题意图　本题考查向量的数量积运算、余弦定理.

解析　$(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}$. 设外接圆半径为 r,因为 $AB=2$,$AC=4$,所以由

余弦定理得 $2r^2(1-\cos\angle AOB)=2r^2(1-\cos 2\angle ACB)=4$,故 $\cos 2\angle ACB=1-\dfrac{2}{r^2}$,且 $2r>4$,即 $r>2$. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{BO}|\cos\angle AOB=r^2\cos 2\angle ACB=r^2-2$. 当 AD 为直径时,$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}=r^2$,当 A,D 重合时,$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}=-r^2$,所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}\in[-r^2,r^2]$. 所以,$(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BD}\in[-2,2r^2-2]$. 而在锐角三角形中,$\angle BAC<90°$,则 $BC<\sqrt{AC^2+AB^2}=2\sqrt{5}$,即 $BC=2r\sin\angle BAC<2\sqrt{5}$ 恒成立,所以 $2<r<\sqrt{5}$,则 $2r^2-2<8$ 恒成立. 综上,$(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值范围为 $[-2,8)$.



8. **答案**　D

命题意图　本题考查双曲线的定义及几何性质.

解析　设 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$c>0$. 因为 $ON\perp PF_1$,$F_2M\perp PF_1$,所以 $ON/\!/F_2M$. 又 O 为 F_1F_2 的中点,故 N 为 F_1M 的中点,即 $|F_1N|=|MN|$,$|F_2M|=2|ON|$. 在 Rt$\triangle ONF_1$ 中,$|OF_1|=c$,$|ON|=a$,故 $|F_1N|=\sqrt{c^2-a^2}=b$,则 $|MN|=b$. 由于 M 为 PN 的中点,所以 $|MP|=b$,即 $|PF_1|=3b$. 因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$,所以 $|PF_2|=3b-2a$. 在 Rt$\triangle F_2MP$ 中,$|MF_2|^2+|MP|^2=|PF_2|^2$,即 $4a^2+b^2=(3b-2a)^2$,化简得 $2b^2=3ab$,$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$,故双曲线 C 的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案**　BC

命题意图　本题考查折线图的实际应用.

解析　对于 A,由图知 2017 ~ 2022 年全国城镇居民人均可支配收入呈增长趋势,但人均消费支出 2020 年比 2019 年少,所以 A 不正确;

对于 B,由图可知 2017 ~ 2022 年全国城镇居民人均消费支出的中位数为 $\dfrac{28\,063+27\,007}{2}=27\,535$,所以 B 正确;

对于 C,2017 ~ 2022 年全国城镇居民人均可支配收入的极差为 $49\,283-36\,396=12\,887$,人均消费支出的极差为 $30\,391-24\,445=5\,946$,所以 C 正确;

对于 D,2022 年全国城镇居民人均消费支出占人均可支配收入的比例为 $\dfrac{30\,391}{49\,283}\approx 0.6$,小于 80%,所以 D 不正确.

10. **答案**　BD

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系、圆中的最值问题.

解析　设点 $P(x,y)$,则由 $|PO|=1$,得动点 P 的轨迹 Ω 的方程为 $x^2+y^2=1$. 由 $M(2,0)$,$N(0,2)$,得直线 MN 的方程为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=1$,即 $x+y-2=0$.

对于 A,因为轨迹 Ω 的圆心 O 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}>1$,所以直线 MN 与圆 O 相离,即直线 MN

与轨迹 Ω 无公共点，所以 A 不正确；

对于 B，$|QA|=\sqrt{|OQ|^2-r^2}\geqslant\sqrt{d^2-1}=1$，当且仅当 OQ 与直线 MN 垂直时等号成立，所以 $|QA|$ 的最小值为 1，所以 B 正确；

对于 C，令 AB 的中点为 D，连接 OD，则 $OD\perp AB$，$|OD|=\sqrt{|OA|^2-\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2}=\frac{1}{2}$，点 D 在以 O 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆上，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|2\overrightarrow{QD}|=2|\overrightarrow{QD}|$，显然当 Q 在 MN 上运动时，$|\overrightarrow{QD}|$ 无最大值，所以 C 不正确；

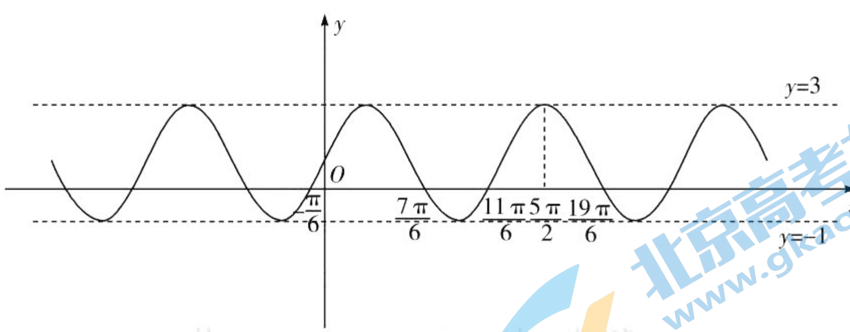
对于 D，因为 QA，QB 为轨迹 Ω 的两条切线，所以由圆的对称性知 $S_{OAQB}=2S_{\triangle OQA}=|OA|\cdot|QA|=|QA|$，由选项 B 的判断知 $|QA|$ 的最小值为 1，所以四边形 $QAOB$ 面积的最小值为 1，所以 D 正确.

11. **答案**　BCD

命题意图　本题考查二倍角公式、两角差的正弦公式、正弦函数的图象与性质.

解析　$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+2\sin^2\frac{\omega x}{2}=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x+1=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

对于 A，由题可知，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right]$，由 $2\sin x+1=0$，知 $x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，画出 $y=2\sin x+1$ 的大致图象如图，若 $f(x)$ 的图象在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有三个对称中心，根据函数 $y=2\sin x+1$ 的图象性质可知 $2\pi\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{6}<3\pi$，解得 $\frac{13}{6}\leqslant\omega<\frac{19}{6}$，所以 A 不正确；



对于 B，由 $\frac{13}{6}\leqslant\omega<\frac{19}{6}$ 可知，当 $\frac{13}{6}\leqslant\omega<\frac{8}{3}$ 时，$2\pi\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{2}$，此时 $f(x)$ 的图象在 $[0,\pi]$ 上有 2 条对称轴，当 $\frac{8}{3}\leqslant\omega<\frac{19}{6}$ 时，$\frac{5\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{6}<3\pi$，此时 $f(x)$ 的图象在 $[0,\pi]$ 上有 3 条对称轴，所以 B 正确；

对于 C，因为 $\frac{13}{6}\leqslant\omega<\frac{19}{6}$，所以当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{3\pi}{8}\leqslant\frac{\omega\pi}{4}-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{8}$，取 $\omega=\frac{13}{6}$，此时 $\frac{\omega\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{8}$，即当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{8}\right)$，因为 $2\sin\frac{3\pi}{8}+1>2\sin\frac{\pi}{6}+1=2$，所以由正弦函数图象的性质可知 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上的最大值不可能为 2，所以 C 正确；

对于 D，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$\frac{7\pi}{36}\leqslant\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{36}$，而 $\frac{13\pi}{36}<\frac{\pi}{2}$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$，由正弦函数图象的性质可知 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，所以 D 正确.

12. **答案**　AD

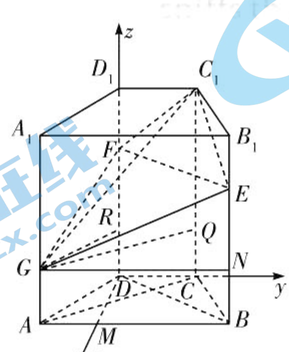
命题意图 本题考查线面垂直的判定定理与性质定理、空间直线间的位置关系、空间向量的应用.

解析 对于 A，过 D 作 $DM\perp AB$ 于 M，如图. 因为 $ABCD$ 为等腰梯形，且 $AB=2CD=4$，所以 $AM=1$，则 $DM=\sqrt{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DMB$ 中，$BD=\sqrt{DM^2+MB^2}=2\sqrt{3}$，所以 $AB^2=AD^2+BD^2$，则 $BD\perp AD$. 由 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，且 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，可知 $DD_1\perp BD$. 因为 $DD_1\cap AD=D$，所以 $BD\perp$ 平面 A_1ADD_1，又 $GF\subset$ 平面 A_1ADD_1，所以 $BD\perp GF$，所以 A 正确.

对于 B，过点 G 分别作 $GQ\perp CC_1$ 于 Q，$GN\perp BB_1$ 于 N，连接 AC，GC_1，如图. 由选项 A 的判断知 $AC=BD=2\sqrt{3}$，所以 $GQ=AC=2\sqrt{3}$，$QC_1=A_1G=2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle GQC_1$ 中，$GC_1=\sqrt{GQ^2+C_1Q^2}=4$. 设 $AG=t$，则 $CC_1=AA_1=2+t$，$B_1E=BN=AG=t$，所以 $EC_1=\sqrt{B_1C_1^2+B_1E^2}=\sqrt{4+t^2}$. 同理 $GE=\sqrt{GN^2+NE^2}=\sqrt{16+(2-t)^2}=\sqrt{t^2-4t+20}$. 若 $\angle GEC_1=\frac{\pi}{2}$，则 $GC_1^2=GE^2+EC_1^2$，即 $16=2t^2-4t+24$，也即 $t^2-2t+4=0$. 因为 $\Delta=2^2-4\times1\times4=-12<0$，所以方程无解，则 $\angle GEC_1=\frac{\pi}{2}$ 不可能，所以 B 不正确.

对于 C，过 G 作 $GR\perp DD_1$ 于 R，连接 EF，如图. 由题意知 $FR=2-t$，则 $GF=\sqrt{GR^2+FR^2}=\sqrt{4+(2-t)^2}=\sqrt{t^2-4t+8}$. 由选项 B 的判断知 $GE=\sqrt{t^2-4t+20}$. 因为 $BE=DF=2$，所以易知四边形 $BDFE$ 为矩形. 设 $\angle EGF=\alpha$，由选项 A 的判断及 $BD/\!/EF$，得 $GF\perp EF$，所以 $\cos\alpha=\frac{GF}{GE}=\frac{\sqrt{t^2-4t+8}}{\sqrt{t^2-4t+20}}$. 令 $t^2-4t+8=m^2(m\geqslant2)$，则 $\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+12}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{12}{m^2}}}$. 因为 $m^2\geqslant4$，所以 $0<\frac{12}{m^2}\leqslant3$，则 $1<\sqrt{1+\frac{12}{m^2}}\leqslant2$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\cos\alpha<1$，因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\angle EGF$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$，所以 C 不正确.

对于 D，易知 DM，DC，DD_1 两两互相垂直，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $F(0,0,2)$，$G\left(\sqrt{3},-1,\frac{2}{3}\right)$，$E(\sqrt{3},3,2)$，$C_1\left(0,2,\frac{8}{3}\right)$，则 $\overrightarrow{GE}=\left(0,4,\frac{4}{3}\right)$，$\overrightarrow{FC_1}=\left(0,2,\frac{2}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{GE}=2\overrightarrow{FC_1}$，则 $\overrightarrow{GE}/\!/\overrightarrow{FC_1}$，则 $GE/\!/FC_1$，所以 D 正确.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** 2

命题意图 本题考查两角和的正弦公式.

解析 因为 $3\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\theta+\cos\theta$，所以 $\tan\theta=2$，则 $\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\tan\theta-1}=2$.

14. 答案　192

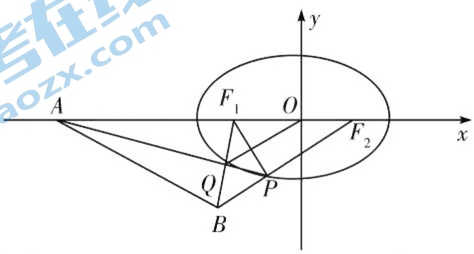
命题意图　本题考查正态分布及二项式定理.

解析　因为 $\xi \sim N\left(\frac{1}{2},\sigma^2\right)$，$P(\xi<-1)=P(\xi>m)$，所以 $\frac{-1+m}{2}=\frac{1}{2}$，解得 $m=2$. $(x+2)^6$ 的展开式中 x 的系数为 $C_6^5 2^5=192$.

15. 答案　4

命题意图　本题考查椭圆的方程及性质.

解析　由题可知椭圆 C 的离心率为 $\frac{3}{a}=\frac{3}{4}$，解得 $a=4$. 因为 $|AB|=|AF_1|$，$PA\perp BF_1$，所以 Q 为线段 BF_1 的中点，且 PA 是 BF_1 的垂直平分线，则 $|PF_1|=|PB|$. 由椭圆定义可知 $|BF_2|=|BP|+|PF_2|=|PF_1|+|PF_2|=2a=8$. 因为 O 为 F_1F_2 的中点，所以 $|OQ|=\frac{1}{2}|BF_2|=4$.



16. 答案　1

命题意图　本题考查利用导数求函数的最值.

解析　因为 $\ln(xy)^y=e^x$，所以 $x\ln(xy)^y=xe^x$，所以 $e^{\ln(xy)}\ln(xy)=xe^x$. 令 $f(x)=xe^x(x>0)$，则 $f'(x)=(x+1)\cdot e^x>0$，所以 $f(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\ln(xy)=x$，即 $xy=e^x$，所以 $x^2y-\ln x-x=xe^x-\ln x-x$. 令 $g(x)=xe^x-\ln x-x(x>0)$，则 $g'(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x}-1=(x+1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$. 令 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}(x>0)$，易知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $h(1)=e-1>0$，$h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上有唯一零点 x_0，即 $h(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，则在 $(0,x_0)$ 上，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0$，因为 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以 $x_0=-\ln x_0$，则 $g(x_0)=1+x_0-x_0=1$，即函数 $g(x)$ 的最小值为 1.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查根据递推关系求数列的通项、裂项相消法的应用.

解析　（Ⅰ）选①：

由 $(a_n+1)^2=a_{n-1}^2+4a_n+2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，

可得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$. ………………………………（2 分）

因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，………………………………（3 分）

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，所以 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$. ………………（5 分）

选②：

由 $na_{n+1}=(n+1)a_n+1$，得 $na_{n+1}+n=(n+1)a_n+(n+1)$，

所以 $n(a_{n+1}+1)=(n+1)(a_n+1)$，所以 $\frac{a_{n+1}+1}{n+1}=\frac{a_n+1}{n}$， ………………………………………………（2 分）

故数列 $\left\{\frac{a_n+1}{n}\right\}$ 是常数列， ……………………………………………………………………………（3 分）

所以 $\frac{a_n+1}{n}=\frac{a_1+1}{1}=2$，故 $a_n=2n-1$. ………………………………………………………………（5 分）

选③：

由 $\frac{nS_{n+1}}{S_n+n}=n+1$，得 $nS_{n+1}-(n+1)S_n=n(n+1)$，则 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=1$， ……………………（1 分）

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以 $\frac{S_n}{n}=1+(n-1)\times 1=n$，则 $S_n=n^2$. ………………………………………………………………（3 分）

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

易知 $a_1=1$ 也满足上式， ……………………………………………………………………………………（4 分）

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$. ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $b_n=\frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$， ………………………………（7 分）

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}$

$=\frac{2n}{2n+1}$. ……………………………………………………………………………………………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查条件概率、离散型随机变量的分布列和数学期望.

解析 （Ⅰ）由题可知这 8 家乡村民宿中普通型民宿的房间不低于 10 间的有 6 家，品质型民宿和普通型民宿的房间均不低于 10 间的有 4 家. ………………………………………………………………（2 分）

记“这 3 家的普通型民宿的房间均不低于 10 间”为事件 A，“这 3 家的品质型民宿的房间均不低于 10 间”为事件 B，则 $P(A)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{5}{14}$，$P(AB)=\frac{C_4^3}{C_8^3}=\frac{1}{14}$， ……………………………………………………（4 分）

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{5}$. …………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）这 8 家乡村民宿中普通型民宿的房间不低于 15 间的有 3 家，故 X 的所有可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\frac{C_3^0\cdot C_5^4}{C_8^4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_5^3}{C_8^4}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2\cdot C_5^2}{C_8^4}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3\cdot C_5^1}{C_8^4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$， ……………………………（9 分）

所以 X 的分布列如下表：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

（10 分）

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{1}{14}=\frac{3}{2}$. ······························ (12 分)

19. **命题意图** 本题考查面面垂直的判定定理及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)设 AC,BD 交于点 O,连接 C_1O,如图.

因为 $BC=CD,AB=AD$,所以点 A,C 在线段 BD 的垂直平分线上,

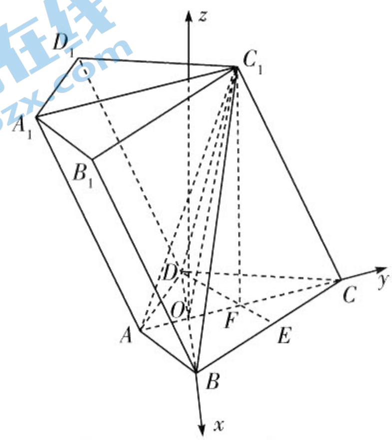
所以 $AC\perp BD$,O 为 BD 的中点. ······························ (2 分)

又因为 $C_1B=C_1D$,所以 $C_1O\perp BD$.

又因为 $C_1O\cap AC=O$,$C_1O,AC\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1. ······························ (4 分)

又因为 $BD\subset$ 平面 BC_1D,所以平面 $BC_1D\perp$ 平面 ACC_1A_1. ······························ (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)的解题过程可知,可以 O 为坐标原点,OB,OC 所在直线分别为 x,y 轴,以过 O 且与 C_1F 平行的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,$B(1,0,0)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,$F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,$C_1\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$, ······························ (6 分)

所以 $\overrightarrow{AB}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,$\overrightarrow{BC_1}=\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$,$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$. ······························ (7 分)

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+\frac{\sqrt{3}}{3}y_1=0,\\ -x_1+\frac{\sqrt{3}}{3}y_1+2z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},1)$. ······························ (9 分)

设平面 CBC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2+\sqrt{3}y_2=0,\\ -x_2+\frac{\sqrt{3}}{3}y_2+2z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=3$,得 $\boldsymbol{n}_2=(3,\sqrt{3},1)$. ······························ (11 分)

设平面 ABC_1 与平面 CBC_1 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{65}}{65}$,

即平面 ABC_1 与平面 CBC_1 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{65}}{65}$. ······························ (12 分)

20. **命题意图** 本题考查正弦定理、余弦定理、两角和差的正弦公式.

解析 (Ⅰ)在 $\triangle BDE$ 中,由余弦定理可得 $BE^2=BD^2+DE^2-2BD\cdot DE\cos\angle BDE$,

即$(2\sqrt{7})^2=BD^2+8^2-2BD\cdot 8\cos\dfrac{\pi}{6}$， …………………………………………………………………（1分）

解得 $BD=6\sqrt{3}$ 或 $BD=2\sqrt{3}$（舍去）. ……………………………………………………………………（3分）

所以在 Rt△ABD 中，由勾股定理可得 $AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-4^2}=2\sqrt{23}$. ………………（4分）

（Ⅱ）设 $\angle ADB=\theta$，则 $BD=\dfrac{AD}{\cos\theta}=\dfrac{4}{\cos\theta}$，$\angle BED=\angle ADE=\theta+\dfrac{\pi}{6}$，$\angle DBE=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$，……（5分）

由正弦定理可得$\dfrac{BD}{\sin\angle BED}=\dfrac{DE}{\sin\angle DBE}$，即$\dfrac{\frac{4}{\cos\theta}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{8}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}$，…………………………（6分）

所以 $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\theta=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)$，即 $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)\cos\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$. ………………（7分）

所以 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{2}=\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$

$=\sin\left(2\theta+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=-\cos\left(2\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}=2\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-1+\dfrac{1}{2}$，

所以 $2\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{1}{2}=0$. ……………………………………………………（9分）

因为 θ 是锐角，所以 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)>0$，

故解得 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. …………………………………………………………………（10分）

由正弦定理可得$\dfrac{DE}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{BE}{\sin\frac{\pi}{6}}$，

所以 $BE=\dfrac{\frac{1}{2}DE}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{4}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=4\sqrt{5}-4$. …………………………………………………（12分）

21. **命题意图** 本题考查抛物线的方程及性质、直线与抛物线的位置关系、抛物线中的最值问题.

解析 （Ⅰ）将 $x=8$ 代入抛物线方程，得 $|y|=4\sqrt{p}$. ……………………………………………………（1分）

因为△PFK 的面积为 $4\sqrt{2}$，$|FK|=p$，

所以$\dfrac{1}{2}\times|FK|\times|y|=\dfrac{1}{2}\times p\times 4\sqrt{p}=4\sqrt{2}$，解得 $p=2$，………………………………………（2分）

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………………………………（4分）

（Ⅱ）设点 $P(x_0,y_0)$，点 $A(-1,m)$，点 $B(-1,n)$，

则直线 PA 的方程为 $y-m=\dfrac{y_0-m}{x_0+1}(x+1)$，即 $(y_0-m)x-(x_0+1)y+(y_0-m)+m(x_0+1)=0$. ……（5分）

由原点(0,0)到直线 PA 的距离为1，可得$\dfrac{|y_0-m+m(x_0+1)|}{\sqrt{(y_0-m)^2+(x_0+1)^2}}=1$，

故 $(y_0-m)^2+(x_0+1)^2=(y_0-m)^2+2m(y_0-m)(x_0+1)+m^2(x_0+1)^2$.

由条件知 $x_0>1$，上式化简得 $(x_0-1)m^2+2y_0m-(x_0+1)=0$. ……………………………………（6分）

同理得 $(x_0-1)n^2+2y_0n-(x_0+1)=0$.

所以 m,n 是关于 s 的方程 $(x_0-1)s^2+2y_0s-(x_0+1)=0$ 的两个不等实根. ………………………………(7 分)

由根与系数的关系可得 $m+n=\dfrac{-2y_0}{x_0-1}$, $mn=\dfrac{-(x_0+1)}{x_0-1}$.

所以 $|AB|^2=(m-n)^2=(m+n)^2-4mn=\dfrac{4y_0^2}{(x_0-1)^2}+\dfrac{4(x_0+1)}{x_0-1}$. ………………………………(8 分)

因为 $y_0^2=4x_0$, 所以 $|AB|=\sqrt{\dfrac{16x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{4(x_0+1)}{x_0-1}}=2\sqrt{\dfrac{x_0^2+4x_0-1}{(x_0-1)^2}}$,

又点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $x=-1$ 的距离为 $d=x_0+1$,

所以 $\triangle PAB$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{\dfrac{x_0^2+4x_0-1}{(x_0-1)^2}}\times(x_0+1)=\sqrt{\dfrac{(x_0+1)^2(x_0^2+4x_0-1)}{(x_0-1)^2}}$. ……(9 分)

令 $x_0-1=t(t>0)$, 则 $S=\sqrt{\dfrac{(t^2+4+4t)(t^2+4+6t)}{t^2}}=\sqrt{t^2+10t+\dfrac{40}{t}+\dfrac{16}{t^2}+32}$.

因为 $t^2+\dfrac{16}{t^2}\geqslant 2\sqrt{t^2\cdot\dfrac{16}{t^2}}=8$, $10t+\dfrac{40}{t}\geqslant 2\sqrt{10t\cdot\dfrac{40}{t}}=40$,

上述两个不等式都当且仅当 $t=2$ 时取等号, 所以 $S\geqslant\sqrt{8+40+32}=4\sqrt{5}$,

故 $\triangle PAB$ 面积的最小值为 $4\sqrt{5}$. ………………………………(10 分)

因为原点 O 到 $\triangle PAB$ 的三边距离都等于 1, 所以 $S=\dfrac{1}{2}\times(|PA|+|PB|+|AB|)\times 1$,

所以 $\triangle PAB$ 的周长为 $|PA|+|PB|+|AB|=2S$,

所以 $\triangle PAB$ 的周长的最小值为 $8\sqrt{5}$. ………………………………(12 分)

22. **命题意图** 本题考查导数的几何意义、函数与方程的综合应用.

解析 (Ⅰ) 当 $a=-1$ 时, $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-3e^x+3x$, 则 $F(0)=-\dfrac{5}{2}$. ………………………………(1 分)

由 $F'(x)=e^{2x}-3e^x+3$, 可得 $F'(0)=1$, ………………………………(2 分)

所以 $F(x)$ 的图象在点 $(0,F(0))$ 处的切线方程为 $y+\dfrac{5}{2}=1\times(x-0)$, 即 $2x-2y-5=0$. ……………(3 分)

(Ⅱ) 设 $g(x)=f(x)-1=\dfrac{1}{2}e^{2x}+(a-2)e^x+(1-a)x-1$, 其定义域为 $\mathbf{R}$,

则 $g'(x)=e^{2x}+(a-2)e^x+(1-a)=(e^x+a-1)(e^x-1)$. ………………………………(4 分)

①若 $1-a<0$, 即 $a>1$, 当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$, 当 $x<0$ 时 $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $x\to-\infty$ 时, $g(x)\to+\infty$, $x\to+\infty$ 时, $g(x)\to+\infty$,

所以要使 $g(x)$ 有两个零点, 则 $g(0)=\dfrac{1}{2}+a-2-1<0$, 解得 $a<\dfrac{5}{2}$, 故 $1<a<\dfrac{5}{2}$. ………………(5 分)

②若 $1-a=0$, 即 $a=1$, 由 $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x-1=0$, 解得 $x=\ln(1+\sqrt{3})$, 所以 $g(x)$ 有且仅有 1 个零点, 故 $a=1$ 不符合题意. ………………………………(6 分)

③若 $0<1-a<1$, 即 $0<a<1$, 由 $g'(x)>0$, 得 $x<\ln(1-a)$ 或 $x>0$, 由 $g'(x)<0$, 得 $\ln(1-a)<x<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln(1-a))$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln(1-a),0)$ 上单调递减.

因为 $x\to-\infty$ 时, $g(x)\to-\infty$, $x\to+\infty$ 时, $g(x)\to+\infty$,

所以要使 $g(x)$ 有两个零点，则 $g(0)=\frac{1}{2}+a-2-1=0$ 或 $g(\ln(1-a))=\frac{1}{2}(1-a)^2+(a-2)(1-a)+(1-a)\ln(1-a)-1=0$. …………（7 分）

若 $g(0)=0$，解得 $a=\frac{5}{2}$，不符合题意；

若 $g(\ln(1-a))=0$，设 $t=1-a\in(0,1)$，

则 $g(\ln(1-a))=0$ 化为 $\frac{1}{2}t^2+t(-t-1)+t\ln t-1=-\frac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$.

当 $0<t<1$ 时，$t\ln t<0$，所以 $-\frac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1<0$，$-\frac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$ 无解，

即 $g(\ln(1-a))=0$ 无解，故 $0<a<1$ 不符合题意. …………（8 分）

④若 $1-a=1$，即 $a=0$，$g'(x)\geq 0$ 恒成立，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)$ 最多有 1 个零点，则 $a=0$ 不符合题意. …………（9 分）

⑤若 $1-a>1$，即 $a<0$，由 $g'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>\ln(1-a)$，由 $g'(x)<0$，得 $0<x<\ln(1-a)$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\ln(1-a),+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\ln(1-a))$ 上单调递减.

因为 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

所以要使 $g(x)$ 有两个零点，则 $g(0)=0$ 或 $g(\ln(1-a))=0$. …………（10 分）

若 $g(0)=\frac{1}{2}+a-2-1=0$，解得 $a=\frac{5}{2}$，不符合题意.

若 $g(\ln(1-a))=\frac{1}{2}(1-a)^2+(a-2)(1-a)+(1-a)\ln(1-a)-1=0$，

设 $t=1-a\in(1,+\infty)$，则 $g(\ln(1-a))=0$ 化为 $\frac{1}{2}t^2+t(-t-1)+t\ln t-1=-\frac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$.

令 $h(t)=-\frac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1$，则 $h'(t)=\ln t-t$.

设 $v(t)=h'(t)=\ln t-t$，则当 $t>1$ 时，$v'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}<0$，

所以 $v(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，即 $h'(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减， …………（11 分）

从而 $h'(t)<h'(1)=-1<0$，所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(t)<h(1)=-\frac{5}{2}<0$，则 $-\frac{1}{2}t^2-t+t\ln t-1=0$ 无解，

即 $g(\ln(1-a))=0$ 无解，故 $a<0$ 不符合题意.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(1,\frac{5}{2}\right)$. …………（12 分）