高中数学概念汇编

一.集合的概念

1.集合的表示法：

(1)列举法：如 {1，2，3，4，5}； (2)描述法：如$\{x|x\leq 2\}$；

2.集合间的关系：

(1)子集：A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$；任何一个集合是它本身的子集，空集是任何一个集合的子集。

(2)真子集 ：如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$。空集是任何一个非空集合的真子集。

(3)两个集合相等：对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么就说这两个集合相等，记作 A=B.

3.集合的运算：

(1)交集：$A\cap B=\{x|x\in A,且x\in B\}$；

(2)并集：$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$；

(3)补集：若全集为 U，则集合 A 的补集为$C_U A=\{x|x\in U 但 x\notin A\}$。

4.当集合用描述法表示时，注意弄清元素表示的意义是什么。

集合	{x|f(x)=0}	{x|f(x)>0}	{x|y=f(x)}	{y|y=f(x)}	{(x，y)|y=f(x)}
集合的意义	方程 f(x)=0 的解集	不等式 f(x)>0 的解集	函数 y=f(x) 的定义域	函数 y=f(x)的值域	函数 y=f(x)图像上的点集

5.集合中元素的三大属性；

(1)元素的确定性；(2)元素的无序性；(3)元素的互异性。

对于含有字母的集合，在求出字母的值后，要注意检验集合是否满足元素的互异性。

6.常用数集的记号：自然数集 N；整数集 Z；有理数集 Q；实数集 R；复数集 C. 空集 ϕ。

二.命题

1.四种命题形式：

如果一命题条件为 A，结论为 B，那么该命题的原命题形式是：若 A 成立，则 B 成立(即 A$\Rightarrow$B)；

它的逆命题形式是：若 B 成立，则 A 成立(即 B$\Rightarrow$A)；

它的否命题形式是：若 A 不成立，则 B 不成立(即 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$)；

它的逆否命题形式是：若 B 不成立，则 A 不成立(即 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$)。

等价命题：若甲，乙两命题满足：甲$\Rightarrow$乙，乙$\Rightarrow$甲，则称甲乙两命题是等价命题，记为甲$\Leftrightarrow$乙；

原命题与逆否命题是等价命题；逆命题与否命题是等价命题。

2.充分条件与必要条件：

设条件 A 和结论 B，如果 A$\Rightarrow B$，那么 A 是 B 的充分条件，或说 B 是 A 的必要条件；如果 $B\Rightarrow A$，那么 A 是 B 的必要条件，或说 B 是 A 的充分条件；如果 $A\Leftrightarrow B$，那么 A 是 B 的充分必要条件，简称充要条件。

设 A={a|a 具有性质α}，B={b|b 具有性质β}，则 $A\subseteq B$ 与α$\Rightarrow\beta$ 等价。

3.关于四个命题的真值表

原命题： 若 p，则 q	逆命题： 若 q，则 p	否命题： 若 $\overline{p}$，则 $\overline{q}$	逆否命题： 若 $\overline{q}$，则 $\overline{p}$
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

如果两个命题互为逆否命题，那么它们具有相同的真假值。如果两个命题为互逆命题或者是互否命题，那么它们的真假没有必然联系。

三.不等式

1.实数比较大小的基本方法：

即等价关系：$a>b \Leftrightarrow a-b>0; a=b \Leftrightarrow a-b=0; a<b \Leftrightarrow a-b<0$

2.掌握不等式的 8 个基本性质

(1)若 a>b，b>c，那么 a>c； (2)若 a>b，那么 a+c>b+c； (3)若 a>b.c>0.那么 ac>bc；若 a>b，c<0，那么 ac<bc； (4)若 a>b.c>d，那么 a+c>b+d； (5)若 a>b，c<d，那么 a-c>b-d；(6)若 a>b>0，那么 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；若 0>a>b，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$； (7)若 a>b>0，c>d>0，那么 ac>bd；(8)若 a>b>0，那么 $a^n>b^n$，且 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ (n$\in N^+$，n>1)

3.含有绝对值不等式的性质

$|a|+|b| \geq |a \pm b| \geq |a|-|b|$

4.基本不等式：

(1)当 a>0，b>0 时，$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$，当且仅当 a=b 时等号成立；

(2)因为 a+b≥2$\sqrt{ab}$，所以，若积 ab 为定值，则 a+b 有最小值 2$\sqrt{ab}$；

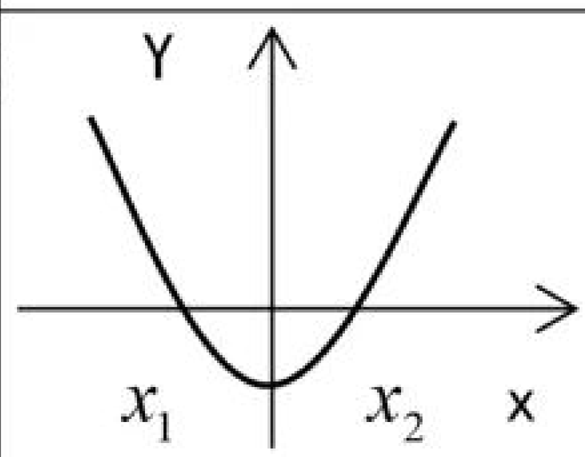
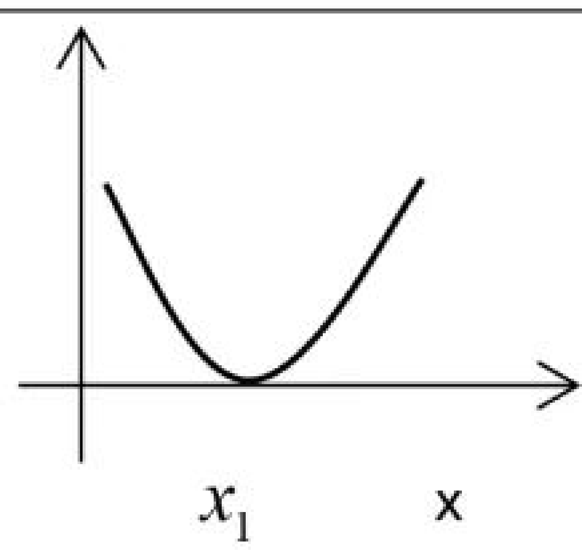
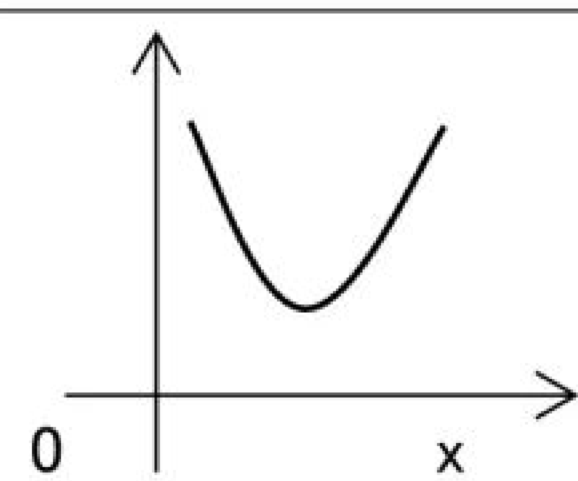
(3)因为 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$，所以，若和 a+b 为定值，则 ab 有最大值 $(\frac{a+b}{2})^2$

(4)当 a>0，b>0 时，有 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$(两个正数的平方平均数、算术平均数、几何平均数、调和平均数之间的大小关系)。

5.解不等式

(1)一元一次不等式：如果 a>0，那么 ax>b 的解为 $x > \frac{b}{a}$；如果 a<0，那么 ax>b 的解为 $x < \frac{b}{a}$；如果 a=0，b≥0 时，不等式无解；b<0 时，不等式的解为 R.

(2)一元二次不等式：任何一个一元二次不等式都可以化为 $ax^2+bx+c>0,(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0,(a>0)$ 可利用二次函数图像求解，其解的情况如下：

$ax^2+bx+c=0(a \ne 0$ 的两根的判别式	$\Delta=b^2-4ac>0$	$\Delta=b^2-4ac=0$	$\Delta=b^2-4ac<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0$			
$ax^2+bx+c>0(a>0$	解集 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	解集 $\{x \mid x \ne x_1，x \in R\}$	解集 R
$ax^2+bx+c<0(a>0$	解集 (x_1,x_2)	解集 ϕ	解集 ϕ
$ax^2+bx+c \ge 0(a>0$	解集 $(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$	解集 R	解集 R
$ax^2+bx+c \le 0(a>0$	解集 $[x_1,x_2]$	解集 $\{x_1\}$	解集 ϕ

(3)含有绝对值的不等式

当 a> 0 时，有

$|x|<a \Leftrightarrow x^2<a^2 \Leftrightarrow -a<x<a$.

$|x|>a \Leftrightarrow x^2>a^2 \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$

(4)形如 $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ (或<0)的分式不等式与一元二次不等式(ax+b)(cx+d)>0 同解；形

如

$\frac{ax+b}{cx+d}<0$的分式不等式与一元二次不等式(ax+b)(cx+d)<0同解。

解分式不等式一般不能去分母。

四.函数

1.函数的定义域：当函数是以解析式形式给出时，其定义域就是使函数解析式有意义的自变量的取值集合。当函数是以实际问题的形式给出时，其定义域不仅要考虑使其解析式有意义，还要考虑实际意义。

2.函数值域的主要求法：

(1)利用函数的单调性；(2)利用配方法；(3)利用函数的有界性；(4)利用判别式法：形如$y=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+h}$(a，p至少有一个不为零)的函数，求其值域，可利用判别式法；(5)利用换元法；(6)利用基本不等式；(7)几何法：利用数形结合的思想方法，通过函数的曲线图形间的关系，利用平面几何的知识求值域。

3.求函数解析式的四种常用方法：

(1)拼凑法：由已知条件$f[g(x)]=F(x)$，可将F(x)改写成g(x)的表达式，然后用x代替g(x)，便可得到f(x)的表达式；

(2)待定系数法：若已知函数的类型(如一次函数，二次函数)可用待定系数法；

(3)换元法：已知复合函数f[g(x)]的解析式，可用换元法，此时要注意“新元”的取值范围。

(4)解方程组法：已知关于f(x)与$\frac{1}{f(x)}$或f(-x)的表达式，可根据已知条件再构造出另外一个等式组成方程组，通过解方程组求出f(x).

4.函数的奇偶性：

对于函数定义域内的任意 x，恒有 f(-x)=-f(x)或 f(-x)=f(x)，那么分别称 f(x)是奇函数或偶函数。

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称。

5.函数的单调性：对于区间 I 上的函数 f(x)，若任取 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 f(x)在区间 I 上是增函数；恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 f(x)在区间 I 上是减函数，这个区间 I 叫做 f(x)的单调区间。

判断函数单调性的方法：

(1)定义法：利用定义法的关键是对 $f(x_1) - f(x_2)$ 的整理，化简，变形和符号的判断，其中变形的策略有因式分解，配方法，分子(分母)有理化等。

(2)图像观察法；

(3)利用已知函数的单调性；

(4)利用复合函数单调性法则：(里外函数单调性一致增；里外函数单调性相反减)

6.函数的零点：对于函数 y=f(x)，我们把使 f(x)=0 的实数 x 叫做函数 y=f(x)的零点。

(1)方程的根与函数零点的关系：方程 f(x)=0 有实数根，可得出 y=f(x)的图像与 x 轴有交点，进而得到：函数 y=f(x)有零点。

(2)零点存在性定理：如果函数 y=f(x)在区间[a，b]上的图像是一条不间断的曲线，且

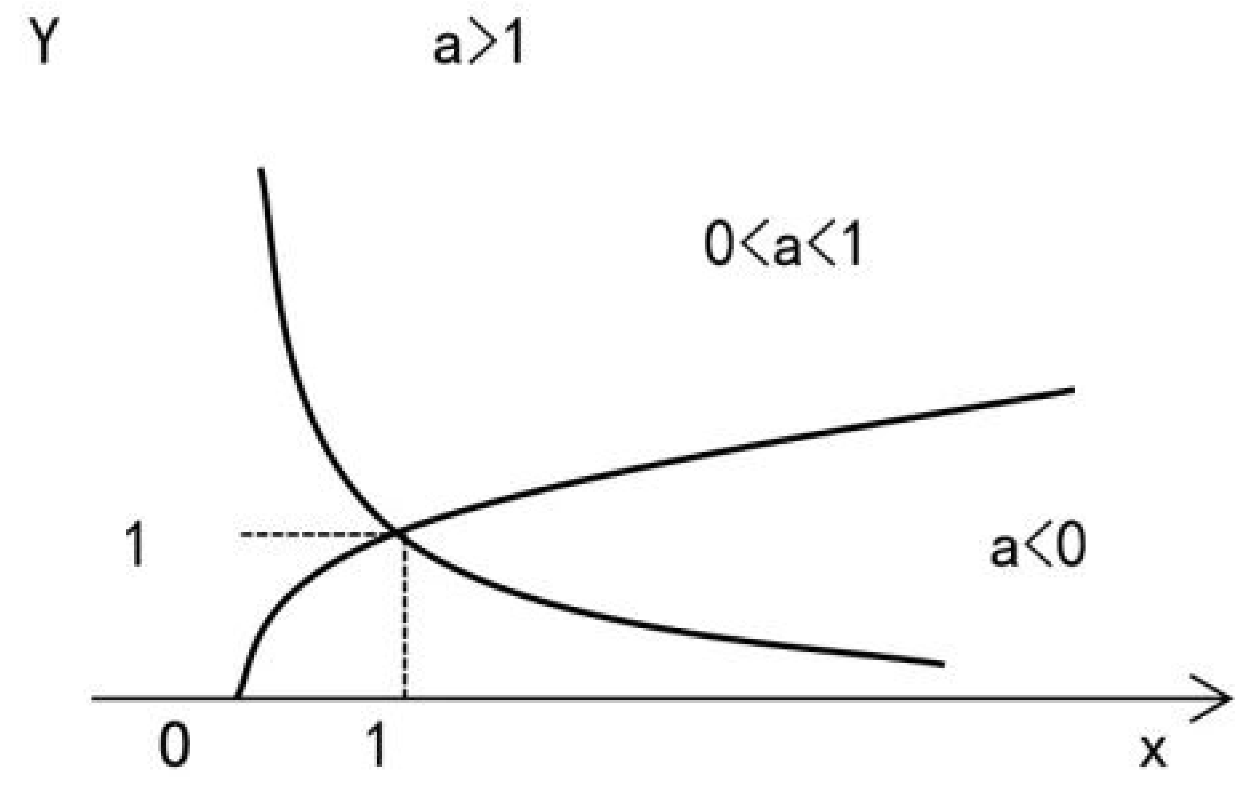
f(a)f(b)<0，那么函数 Y=f(x)在区间[a，b]上有零点，即存在 $c \in (a,b)$，使得 f(c)=0，这个 c 也是方程 f(x)=0 的根。

7.一元二次函数：

一元二次函数的三种表示方法：

① $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；② $y=a(x-n)^2+m$；③ $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 a≠0.

8.幂函数：形如 $y=x^{\alpha}$ (α∈R)的函数叫做幂函数。定义域因α而异，当α≠0，1 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在区间[0，+∞)上的图像分三类(如图)



要作幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在α≠0，1 时的图像，可分两步完成：首先根据α的大小，作出该函数在区间 $[0,+\infty)$ 上的图像，然后根据该函数的奇偶性，补全函数在 y 轴左侧的图像。

9.反函数：

(1)若函数 y=f(x) $(x\in D)$ 的值域为 A，则函数 f(x)有反函数的充要条件是对应法则使集合 D 与集合 A 中的元素是一一对应的，其反函数记作 $y=f^{-1}(x)(x\in A)$；

(2)求 y=f(x)的反函数的步骤分三步：①由方程 y=f(x)反解出 x=g(y)；②互换字母 x，y 得 y=g(x)；③由原函数的值域 A 确定 g(x)的定义域，于是 $f^{-1}(x)=g(x)$ $(x\in A)$ 即为所求函数；

(3)Y=f(x)及其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 y=x 对称；

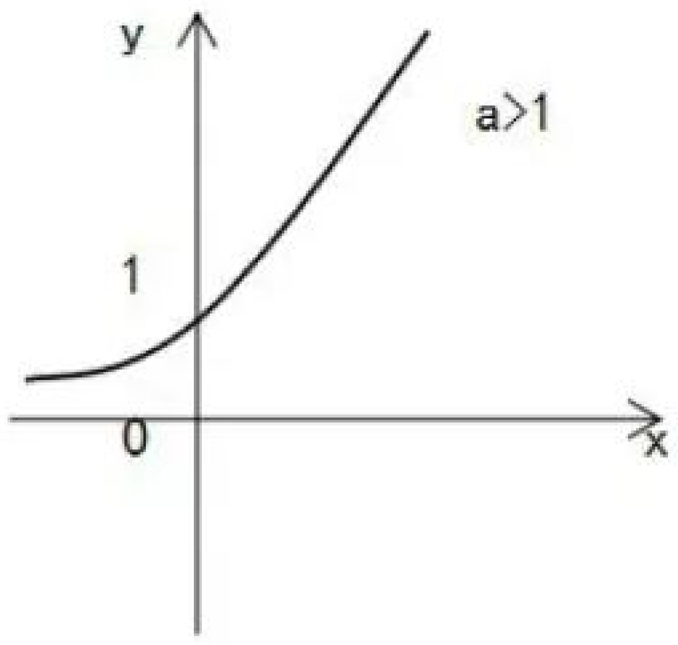
(4)关于互为反函数的两个函数间有如下的性质：① $f\left[f^{-1}(x)\right]=f^{-1}[f(x)]=x$；②y=f(x)与 $y=f^{-1}(x)$ 的奇偶性，单调性相同；

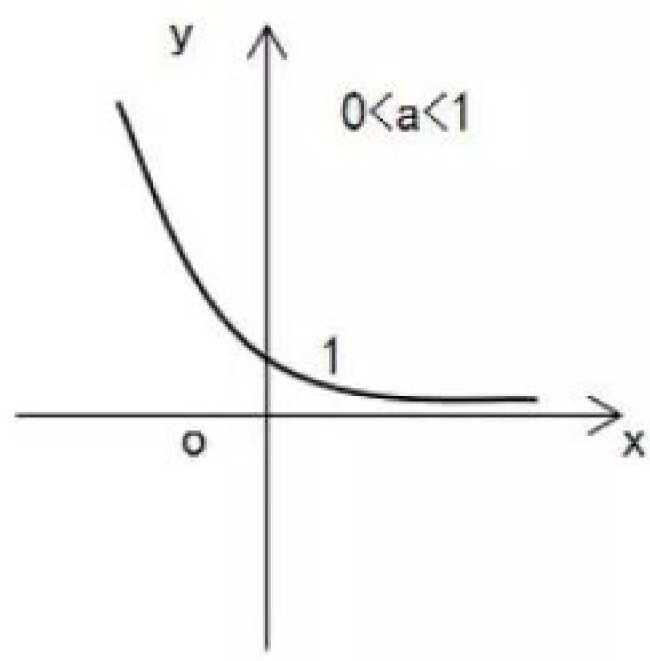
(5)在定义域上单调的函数一定有反函数，有反函数的函数不一定是单调函数。

10.指数函数及其性质：

(1)形如：$y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的函数叫做指数函数；

(2)图像：





(3)性质可由图直接得到；

(4)指数的运算性质：①$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$; ②$\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha\beta}$；③$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$.

11.对数函数及性质：

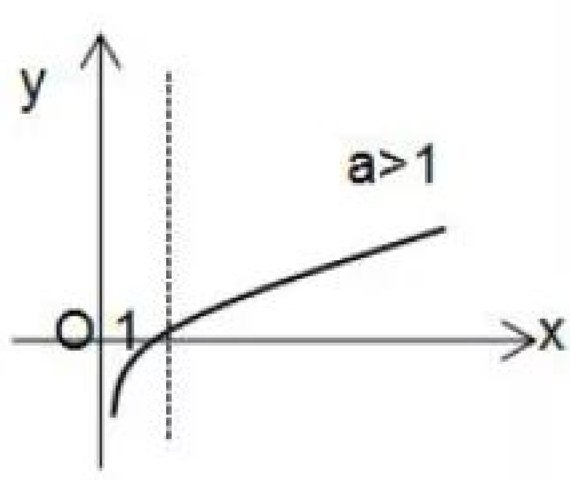
(1)对数的概念 $a^{b}=N(a>0,a\neq1)\Rightarrow b=\log_{a}N$ ，以 10 为底的对数叫常用对数，记为 lgN；以 e 为底的对数叫自然对数，记作 lnN；

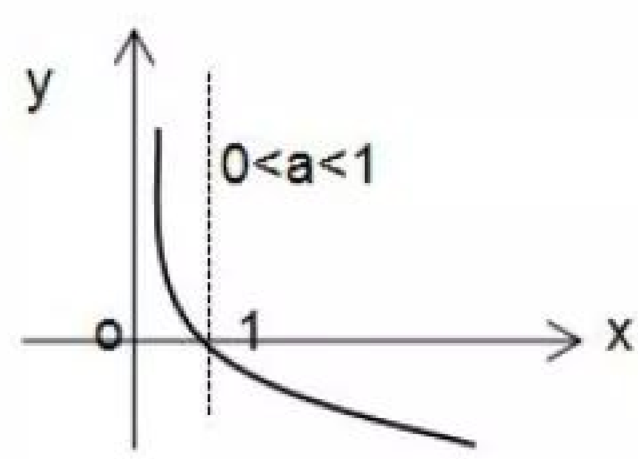
(2)对数的性质：$\log_{a}MN=\log_{a}M+\log_{a}N$； $\log_{a}\dfrac{M}{N}=\log_{a}M-\log_{a}N$；

$\log_{a}M^{n}=n\log_{a}M(M,N>0,a>0,a\neq1)$；换底公式 $\log_{a}N=\dfrac{\log_{b}N}{\log_{b}a}$(a，b>0，a≠1，b≠1)

(3)形如：$y=\log_{a}x$(a>0 且 a≠1)的函数叫做对数函数。$y=\log_{a}x$ 与 $y=a^{x}$ 是互为反函数

(4)对数函数的图像和性质：性质可由图直接得到。





12.指数方程和对数方程：

(1)某些指数方程的解法：①形如 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 的方程可利用指数性质，即同底的幂相等它们的指数相等，化成普通方程 f(x)=g(x)来解；②形如 $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ 的方程可两边取对数，化成 $\log_{a}f(x)=\log_{b}g(x)$ 来解；③形如 $f\left(a^{x}\right)=0$ 的方程，可利用换元法，设 y=a^{x}，解方程 f(x)=0，求出 y，即 a^{x}，再进一步求解。

(2)某些对数方程的解法：①形如 $\log_a f(x)=b$ 的方程，可利用对数定义，化成 $f(x)=a^x$ 来解；②形如 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 的方程，可利用对数性质，即同底数的对数相等，则它们的真数也相等。化成 f(x)=g(x)来解；其结果要检验，确保 f(x)>0.且 g(x)>0.③形如 $f(\log_a x)=b$ 的方程可利用换元法，设 y= $\log_a x$，先解 f(y)=0，再进一步求解；④对数式的底数中含有未知数的方程，可根据具体情况，利用对数定义或换底公式等，把原方程化成简单的形式再求解。

五.三角比

1.弧度制：长度等于半径的弧所对的圆心角的大小是 1 弧度，这种用“弧度”作为单位来度量角的单位制叫弧度制。

(1)弧长 L 和半径 r，及圆心角α的关系是 $|\alpha|=\frac{l}{r}$，一般规定，正角的弧度为正数，负角的弧度是负数，零角的弧度是零。

(2)弧度与角度不能混合书写。

(3) $360^0=2\pi$ 弧度，$180^0=\pi$ 弧度，$1^0=\frac{\pi}{180}$ 弧度≈0.01745 弧度，1 弧度 $=(\frac{180}{\pi})^0\approx 57.30^0=57^0 18'$。

(4)弧长公式与扇形面积公式：$l=\alpha\cdot r, S=\frac{1}{2}\alpha\cdot r^2=\frac{1}{2}lr$ (其中α为弧度数)。

2.任意角：角的定义：一条射线绕着它的端点，由初始位置旋转到最终位置就形成了一个角。

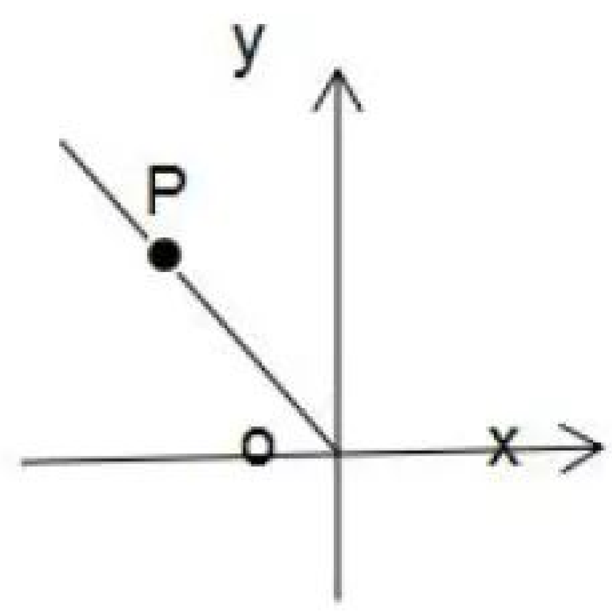
角可分正角(逆时针旋转)，负角(顺时针旋转)和零角(不旋转)。

3.与α终边相同的角的集合可表示为：$\{\beta|\beta=k\cdot 360^0+\alpha，k\in Z\}$ 或 $\{\beta|\beta=2k\pi+\alpha，k\in Z\}$。

4.任意角的三角比：

定义：设α是一个任意角，其终边上任意一点 P 的坐标是(x，y)，它与原点的距

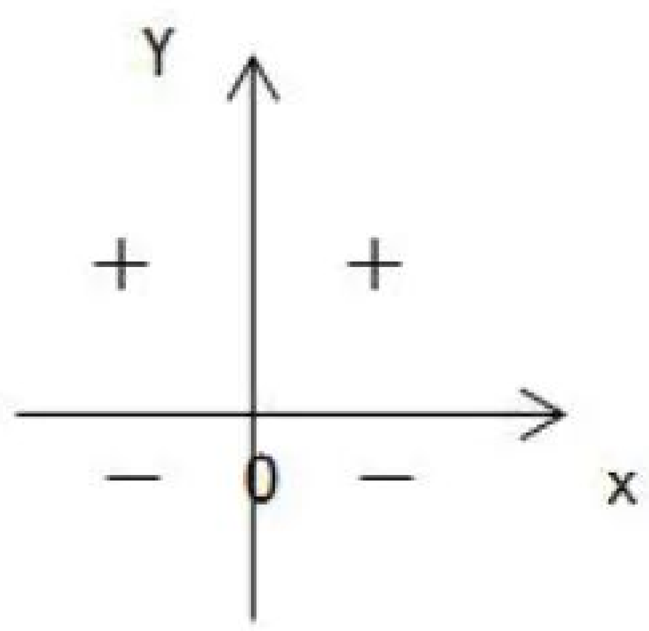
离是 r(r>0)，如图



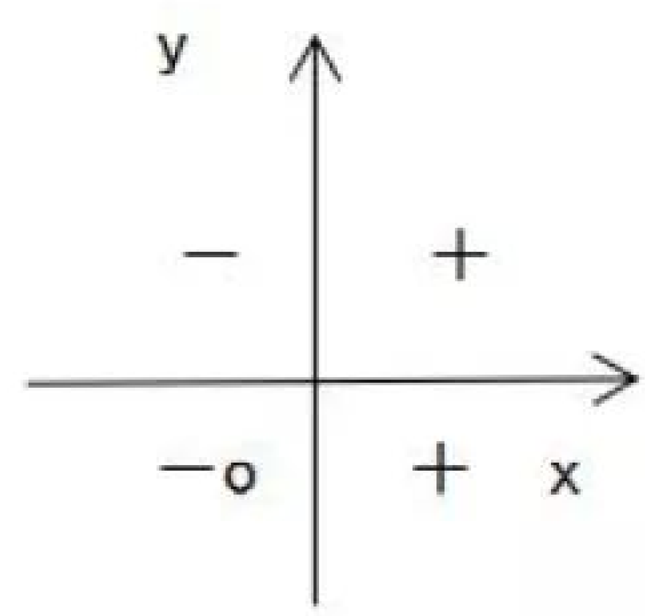
那么$\sin\alpha=\dfrac{y}{r},\cos\alpha=\dfrac{x}{r},\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$　　$\cot\alpha=\dfrac{x}{y},\sec\alpha=\dfrac{r}{x},\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$

注：三角比的值与 p 的位置无关。

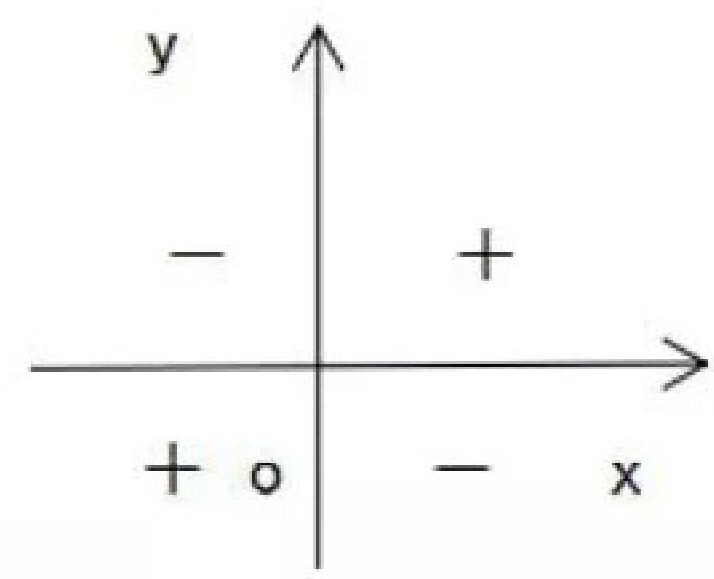
5.三角比在各象限内的符号，如图：



sinα与 cscα



cosα与 secα



tanα与 cotα

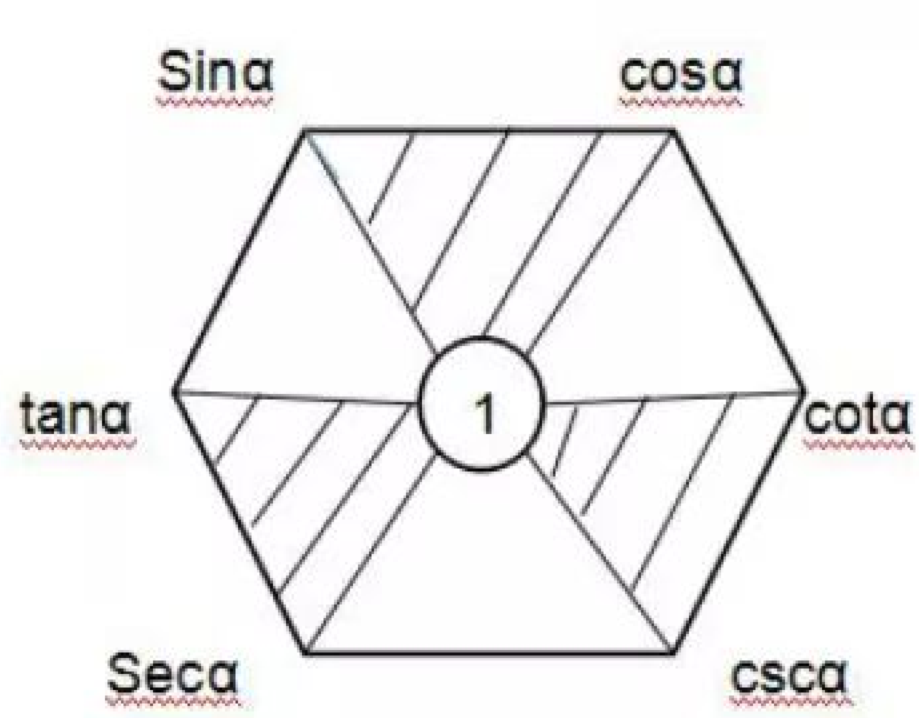
6.同角比间的关系：

(1)倒数关系　sinα•cscα=1，　cosα•secα=1，　tanα•cotα=1.

(2)商数关系　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

(3)平方关系　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$。

以上关系可用下图表示：



7.诱导公式：

诱导公式可用十个字表示为：奇变偶不变，符号看象限。具体有以下公式：

公式一：$\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=\sin\alpha$， $\cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=\cos\alpha$， $\tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=\tan\alpha$.

公式二：$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. $\operatorname{Tan}(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

公式三：$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$， $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

公式四：$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

公式五：$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha, \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

公式六：$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha, \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ 。

8.两角和与差的三角比：

$\operatorname{Sin}(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$，

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$，

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

9.倍角公式：

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

10.半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

9.积化和差公式：

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]，\quad \cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]。$$

10.和差化积公式：

$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$， $\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$，

$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$， $\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$。

11.三角形的面积公式：

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$，(R 为外接圆半径，r 为内切圆半径)。

12.正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (R 为外接圆半径)。

13.余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 或 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

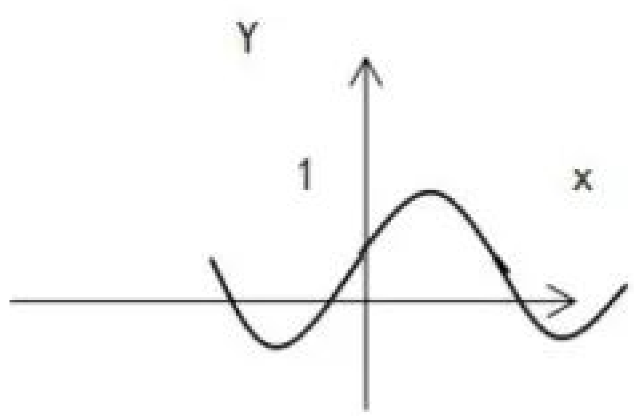
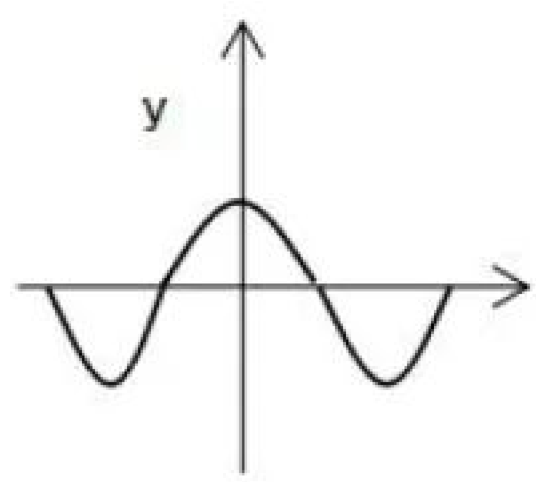
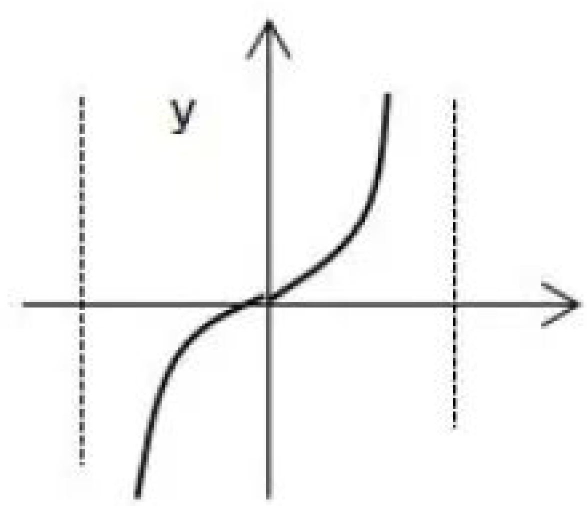
$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$ 或 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 或 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

六.三角函数

1.三角函数的图像和性质：

函数	Y=sinx	Y=cosx	Y=tanx
定义域	R	R	{x|x≠ $k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$}
值域	[-1.1]	[-1,1]	R
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
周期性	T=2π	T=2π	T=π
最值	当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 时， $y_{\min}=-1$; 当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，	当 x=2kπ+π 时， $y_{\min}=-1$；当 x=2kπ 时， $y_{\max}=1(k\in Z)$	没有最小也没有最大值

	$y_{\max}=1(k\in Z)$		
单调性	在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上单调增； 在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$上单调减，（$k\in Z$）	在[2kπ－π，2kπ]上单调增； 在[2kπ，2kπ＋π]上单调减（$k\in Z$）	在$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$上单调增（$k\in Z$）
图像			

2.函数 y=Asin($\omega x+\varphi$)($\omega>0,A>0$)型的图像与性质：

(1)A 称为振幅，它决定着函数的最值；ω称为角频率，它决定着函数的周期，即$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，周期 T 的倒数 f=$\frac{1}{T}$又称为频率；$-\frac{\varphi}{\omega}$称为相位移，它决定函数 y=Asinωx的图像向左还是向右平移$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$个单位。

(2)由函数 y=sinx 的图像变换到 y=Asin($\omega x+\varphi$)(A>0，$\omega>0$)的图像的步骤：

Y=sinx 的图像 → y=sin(x+φ)

φ>0,向左，φ<0 向右平移|φ|个单位

ω>1 缩短 0<ω<1 伸长 原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍

ω>1 缩短 0<ω<1 伸长 横坐标为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍

Y=sinωx 的图像 → y=sin($\omega x+\varphi$)的图像

$\varphi>0$ 向左，$\varphi<0$ 向右平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位

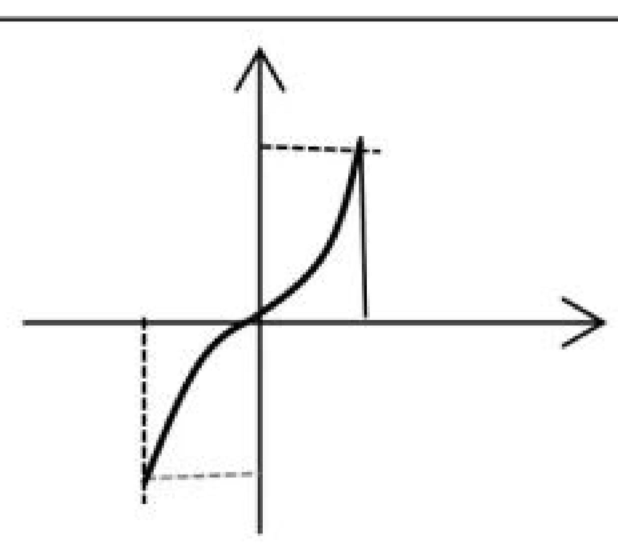
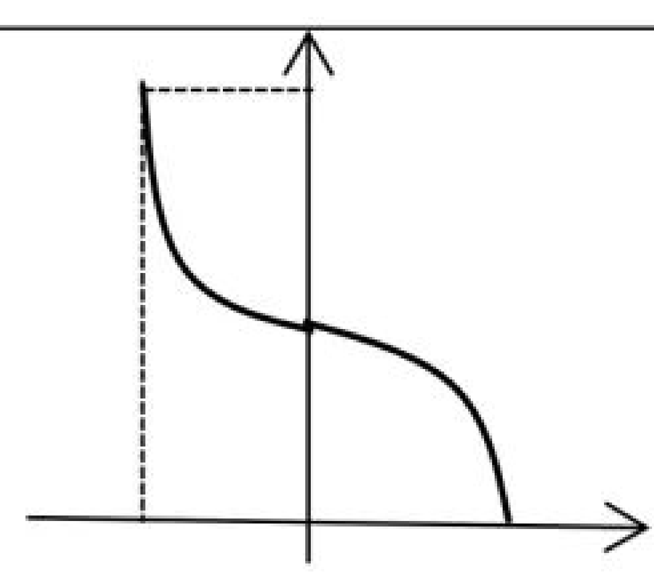
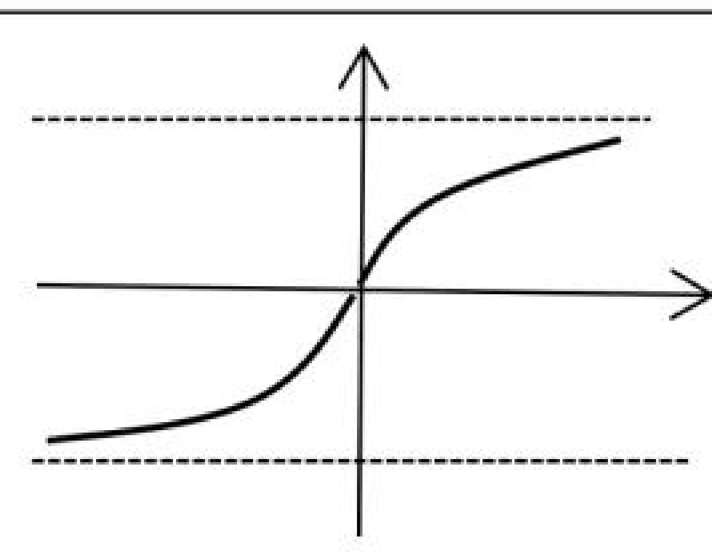
A>1 伸长 0<A<1 缩短

纵坐标为原来的 A 倍

Y=Asin($\omega x+\varphi$)

3.反三角函数：

(1)反三角函数的图像与性质：

函数	Y=arcsinx	Y=arccosx	Y=arctanx
定义域	[-1，1]	[-1，1]	$(-\infty,+\infty)$
值域	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	[0，π]	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
奇偶性	奇函数	非奇非偶	奇函数
单调性	增函数	减函数	增函数
图像			

(2)反三角函数的恒等式：

Sin(arcsinx)=x， arcsin(-x)=-arcsinx， cos(arccosx)=x， arccos(-x)=π-arccosx.

成立的条件是 $x\in[-1,1]$ .tan(arctanx)=x， arctan(-x)=-arctanx，成立的条件是 $x\in R$.

4.最简三角方程：

(1)sinx=a，当|a|>1 时，解集为ϕ；当|a|≤1 时，解集为$\{x|x=k\pi+(-1)^k\arcsin a,k\in Z\}$；

(2)cosx=a，当|a|>1 时，解集为ϕ；当|a|≤1 时，解集为$\{x|x=2k\pi\pm\arccos a,k\in Z\}$；

(3)tanx=a 的解集为$\{x|x=k\pi+\arctan a,k\in Z\}$.

七.数列与数学归纳法

1.等差数列：

(1)定义：$a_n-a_{n-1}=d$ (d 为常数)；

(2)通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$；

(3)前 n 项和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

(4)性质：当 m+n=p+q 时，$a_n+a_m=a_p+a_q$； $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 也成等差数列；

(5)等差中项：a，A.b 成等差数列，则 2A=a+b；

(6)常用公式的变形：$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$； $a_n=a_m+(n-m)d$ 。

2.等比数列：

(1)定义：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ (q 为常数)；

(2)通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$， 变形：$a_n=a_mq^{n-m}$；

(3)前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases}na_1,(q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q},(q\neq1)\end{cases}$；

(4)性质：当 m+n=p+q 时，$a_n\cdot a_m=a_p\cdot a_q$； $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 也成等比数列；

(5)等比中项：a，G，b 成等比数列，则 $G^2=ab,G=\pm\sqrt{ab}$；

(6)前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系：$a_n=\begin{cases}S_1,(n=1)\\S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$

3.数列的极限与运算：

(1)三个基本极限：$\lim\limits_{n\to\infty}C=C,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$；

(2)无穷等比数列各项和的公式：$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q},0<|q|<1$；

(3)极限的四则运算：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$,(分母不为零),

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

以上运算仅在有限项的运算中可用。

八.平面向量

1.向量及有关概念：

(1)向量：既有大小又有方向的量；

(2)向量的模：向量的大小用向量的模来表示，如$|\vec{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$；

(3)单位向量：模为 1 的向量叫单位向量，对任意向量$\vec{a}$，与它同方向的单位向量叫做向量的单位向量，记为$\overrightarrow{a_0}$，$\overrightarrow{a_0}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$；

(4)零向量：模为零的向量叫做零向量，记作$\vec{0}$，$\vec{0}$的方向不定，注意$\vec{0}$与 0 的区别；

(5)相等向量：模相等且方向相同的两个向量是相等向量；负向量：模相等但方向相反的两个向量互为负向量；平行向量：两个向量的方向相同或相反，则称这两个向量平行，这与几何中两条直线平行是有区别的。

(6)平面向量分解定理：平面上任意一个向量可以表示为同一平面上两个不平行的向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$的线性组合，而$\vec{a}=\alpha\overrightarrow{e_1}+\beta\overrightarrow{e_2}$，$\alpha,\beta\in R,\alpha,\beta$叫做线性组合的系数，

2.向量的坐标运算：

(1)设$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$，$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$，

(2)设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；

(3)定比分点公式：$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\overrightarrow{PP_1}=\lambda\overrightarrow{PP}$（$\lambda$为实数，且$\lambda\neq-1$），

P(x，y)，则有$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$。

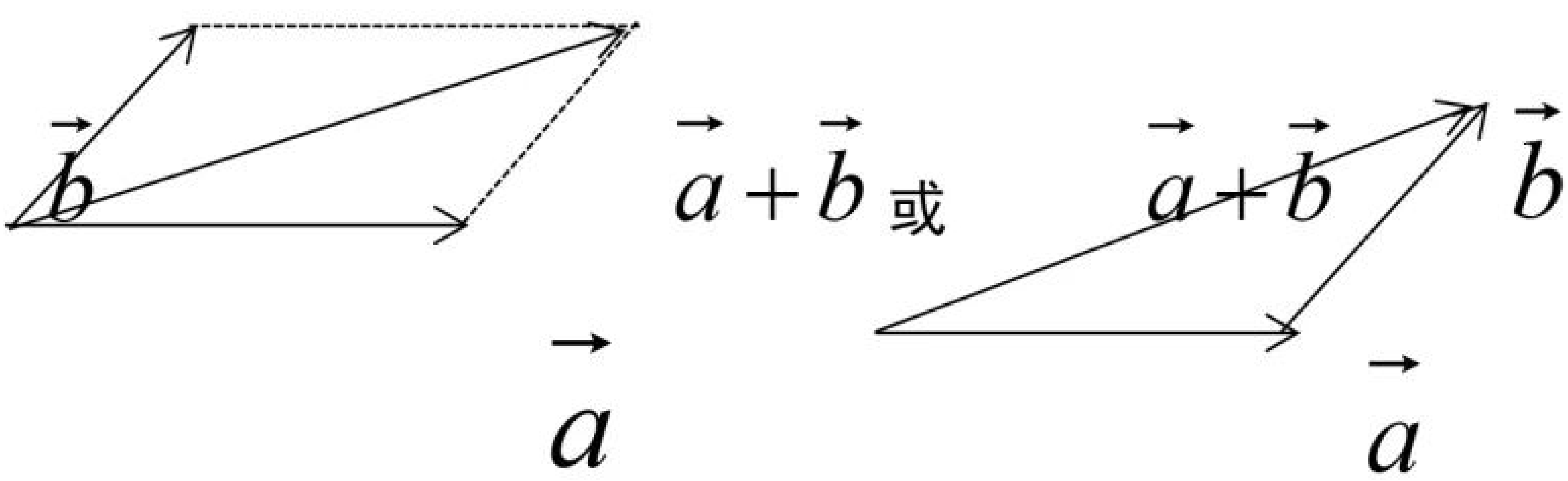
(4)向量的数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$

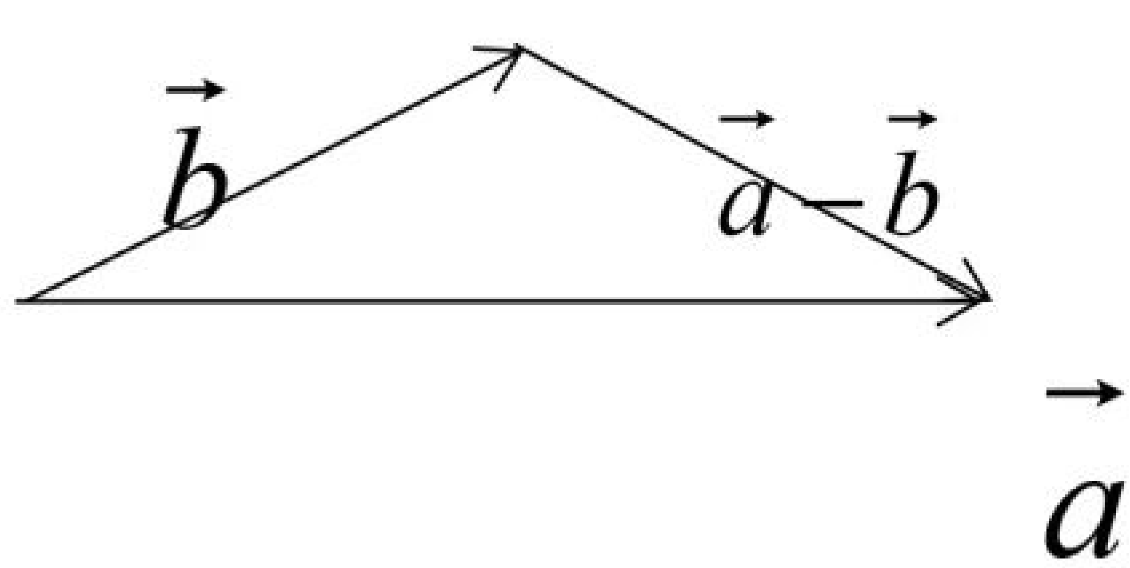
(5)向量$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$；向量$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$。

(6)向量的夹角公式：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^2}}$；θ为锐角的充要条件是

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$且$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线。θ为钝角的充要条件是$\vec{a}\cdot\vec{b}<0,\vec{a},\vec{b}$不共线；

3.向量加，减法的几何意义：





4.数量积的运算律：

(1)交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2)分配律：$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$；

(3)对 $\lambda \in R, \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$。

5.常用公式：(1) $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$；(2) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$；

(3) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\vec{c}$；(4) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$。

(5) ΔABC 中重心为 G，则 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$；D 为 AB 边中点，则 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$；

(6)当 A ，P，B 三点共线，O 不在这条直线上时有：$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{oA}+\lambda_2\overrightarrow{oB}$，其中 $\lambda_1+\lambda_2=1$。

九.矩阵与行列式

1.单位矩阵：形如：$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；2.方程组 $\begin{cases}ax+by=c\\ dx+ey=f\end{cases}$ 的系数矩阵为 $\begin{pmatrix}a & b\\ d & e\end{pmatrix}$，增广矩阵为 $\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$。

3 行列式：$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$，

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

$=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1$，其中 $A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}, B_1=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}$

$C_1=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$

4.二元线性方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的系数行列式为 D=$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$，$D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$

$D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$.(1)当 D≠0 时，方程组有唯一解：$x=\frac{D_x}{D}, y=\frac{D_y}{D}$；(2)当 D=0，但 D_x, D_y 中至少有一个不为零时，方程组无解；(3)当 $D=D_x=D_y=0$ 时，方程组与无穷多解。

十.直线方程

1.倾斜角和斜率：

(1)倾斜角：设直线 l 向上的方向与 x 轴正方向所夹的最小正角为直线的倾斜角α。

(2)当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定 $\alpha=0$；0≤α<π；

(3)斜率：若 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，tanα=k，称为直线 l 的斜率；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 的斜率不存在；

直线 l 经过两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，$(x_1\neq x_2)$则 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；当直线 l 的方向向量 $\vec{d}=(u,v)$, 则 $k=\frac{v}{u},(u\neq 0)$；

(4)倾斜角与斜率的关系为：k=tanα，$(\alpha\neq\frac{\pi}{2},0\leq\alpha<\pi)$；

(5) $\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \boxed{k \text{ 不存在}}\\ \arctan k,(k\geq 0) & \\ \pi+\arctan k,(k<0) & \end{cases}$

2.直线的方程：

(1)直线的方向向量和法向量：与直线 l 平行的非零向量称为直线 l 的方向向量，记为 $\vec{d}$，与直线 l 垂直的非零向量称为直线 l 的法向量，记为 $\vec{n}$，同一直线的方向向量 $\vec{d}$ 与法向量 $\vec{n}$ 有 $\vec{d}\perp\vec{n},\vec{d}\cdot\vec{n}=0$；

(2)方程的几种形式：

①点方向式方程：$\vec{d}=(u,v),P(x_0,y_0)$，$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$，特殊情况：当 u=0，v≠0 时，方程为：$x=x_0$；当 u≠0，v=0 时，方程为：$y=y_0$；$\vec{n}=(v,-u)$

②点法向式方程：$\vec{n}=(a,b),P(x_0,y_0)$，$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$，特殊情况：当 a=0，b≠0 时，方程为：$y=y_0$；当 a≠0，b=0 时，方程为：$x=x_0$；$\vec{d}=(-b,a)$

③点斜式方程：$y-y_0=k(x-x_0)$，k 不存在时，方程为：$x=x_0$；$\vec{d}=(1,k),\vec{n}=(k,-1)$；

④一般式方程：$Ax+By+C=0,(A^2+B^2\neq 0)$，方向向量 $\vec{d}=(-B,A)$ 或(B，-A)，

法向量$\vec{n}=(A,B)$或(-A，-B)；斜率 k=$-\frac{A}{B}$，纵截距为$-\frac{C}{B}$。

(3)两条直线的位置关系：

若直线$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0, l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$(其中$A_1,B_1,A_2,B_2$不全为零)，

①$D=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$ l_1,l_2相交(有一个公共点)；

②$D_x=\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}$，当 D=0，且$D_x,D_y$不全为零时，$l_1//l_2$(没有公共点)；

③当$D=D_x=D_y=0$时，l_1,l_2重合，(有无穷多个公共点)。

④$l_1//l_2\Rightarrow k_1=k_2$(或两条直线的斜率都不存在)；当$k_1=k_2$且两条直线不重合时$\Rightarrow l_1//l_2$；

⑤ $l_1\perp l_2\Rightarrow k_1k_2=-1$, 或 k_1,k_2 中必有一个为零，一个不存在；$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$。

(4)两条直线的夹角：设l_1的方向向量为$\overrightarrow{d_1}=(-B_1,A_1)$，$l_2$的方向向量为$\overrightarrow{d_2}=(-B_2,A_2)$，

两条相交直线的夹角为θ，平面上两条直线相交时形成两组对顶角，我们规定两条相交直线所成的锐角或直角是两条直线的夹角，所以θ$\in[0,\frac{\pi}{2}]$。

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}|}{|\overrightarrow{d_1}||\overrightarrow{d_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ 或 $\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$,（其中$k_1k_2\neq -1, A_1A_2+B_1B_2\neq 0$)。

(5)点到直线的距离公式：直线$l: Ax+By+C=0, P(x_0,y_0)$点 P 到直线 l 的距离为

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

(6)两条平行直线之间的距离公式：$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

(7)点与直线的位置关系：设直线 Ax+By+C=0，点 P(x_0,y_0)，则$\delta=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$，那么在直线同侧的所有点，$\delta$ 的符号是相同的，在直线异侧的所有的点，δ 的符号是相反的。

(8)点关于直线的对称问题：点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 y=kx+b 的对称点 $P'(m,n)$ 满足

$$\begin{cases}\frac{n-y_0}{m-x_0}=-\frac{1}{k}\\ k\cdot\frac{x_0+m}{2}-\frac{y_0+n}{2}+b=0\end{cases}$$

十一.圆

1.圆的标准方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,其中 r>0，圆心坐标为(a，b)，半径为 r. 当圆心在原点时，标准方程为：$x^2+y^2=r^2$；

2.圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 $D^2+E^2-4F>0$，圆心坐标为$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$，半径为$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$；当 $D^2+E^2-4F=0$时，方程表示一个点其坐标为$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$；当 $D^2+E^2-4F<0$时，方程所对应的曲线不存在。

3.二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，仅当 A=C≠0，B=0，且 $D^2+E^2-4F>0$时才表示圆。

4.圆心的三个重要的几何性质为：①圆心在过切点且与切线垂直的直线上；②圆心在某一条弦的中垂线上；③两圆内切或外切时，切点与两圆圆心三点共线。

5.直线与圆的位置关系：

直线与圆的三种位置关系：联立$\begin{cases}\text{直线方程}\\ \text{曲线方程}\end{cases}$

得到一元二次方程从而有$\begin{cases}\Delta>0\Leftrightarrow & \text{相交}\\ \Delta=0\Leftrightarrow & \text{相切}\\ \Delta<0\Leftrightarrow & \text{相离}\end{cases}$

6.圆与圆的位置关系可分为五种：外离、外切、相交、内切、内含。

两圆外离时，没有公共点，有四条公切线；两圆外切时，有唯一公共点，有三条公切线；两圆相交时，有两个公共点，有两条公切线；两圆内切时，有唯一公共点，有一条公切线；两圆内含时，没有公共点，没有公切线。

7.判断两圆的位置关系：

①把圆的方程转化为标准方程，求出圆心O_1,O_2和半径r_1,r_2；

②求出两圆圆心距$d=|O_1O_2|$；

③判断：根据 d 与r_1,r_2的和、差的大小作出判断如下：当$d=|o_1o_2|>r_1+r_2\Leftrightarrow$外离；$d=r_1+r_2\Leftrightarrow$外切；$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2\Leftrightarrow$相交；$d=|r_1-r_2|\Leftrightarrow$内切；$0\le d<|r_1-r_2|\Leftrightarrow$内含。

8.以点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$为直径的两个端点的圆的方程是：$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$；

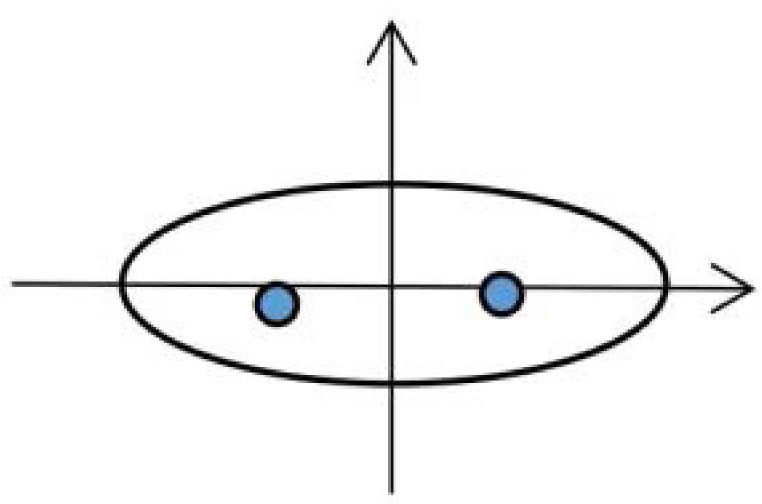
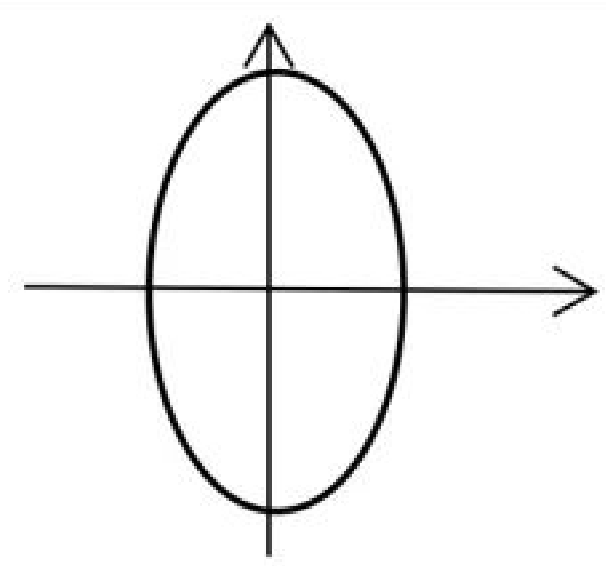
9.过圆$x^2+y^2=r^2$上一点$M(x_0,y_0)$的切线方程是：$x_0x+y_0y=r^2$；

10.过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，上一点$M(x_0,y_0)$的切线的方程是：$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

十二.椭圆

1.椭圆的定义：平面内到两个定点 F_1,F_2 的距离之和等于定长 2a(2a>| F_1F_2 |)的动点的轨迹叫椭圆。即：$|MF_1|+|MF_2|=2a$。若 2a=$|F_1F_2|$，则其轨迹为线段 F_1F_2；若 2a<$|F_1F_2|$，则其轨迹不存在。

2.椭圆的标准方程，图像和性质如下表：

椭圆标准方程		$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$
图像			
性质	范围	-a≤x≤a，-b≤y≤b	-b≤x≤b，-a≤y≤a
	对称性	关于 x 轴，y 轴对称	
	顶点	(-a，0)，(a，0)，(0，-b)，(0，b)	(0，-a)，(0，a)，(-b，0)，(b，0)
	焦点	$F_1(-c,0),F_2(c,0)$	$F_1(0,-c),F_2(0,c)$
	两轴	长轴长为 2a，短轴长为 2b	
	焦距	$\|F_1F_2\|=2c,c^2=a^2-b^2$	

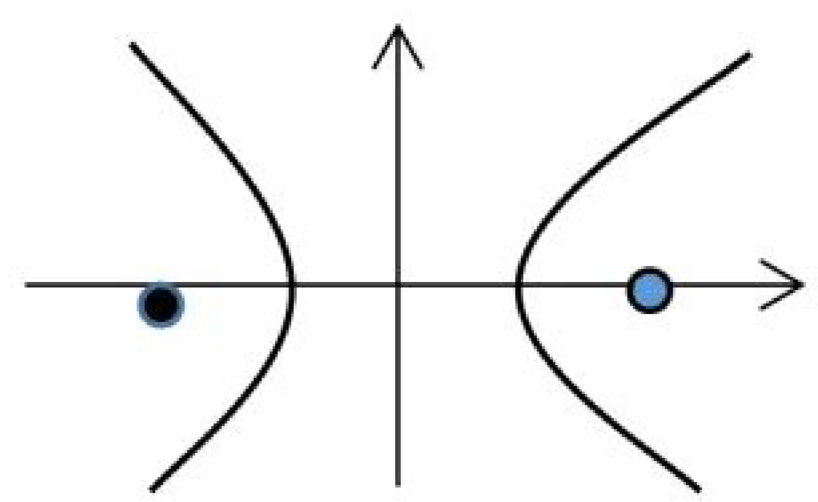
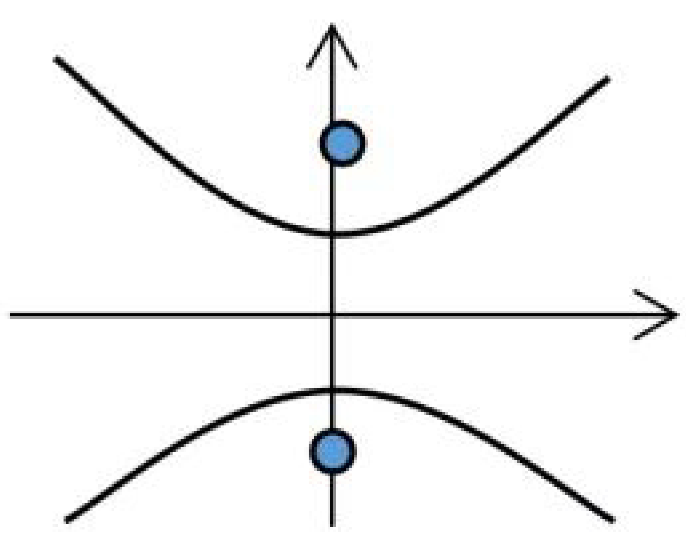
3.焦点三角形：椭圆上任意一点与两焦点所构成的三角形，设焦点三角形 PF_1F_2 中，$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$。

十三.双曲线

1.双曲线的定义：平面内到两个定点 F_1,F_2 的距离之差的绝对值等于定长 2a(2a<| F_1F_2 |)的动点 M 的轨迹叫做双曲线。即：$||MF_1|-|MF_2||=2a$。当 2a=$|F_1F_2|$

时，其轨迹为分别以F_1,F_2为端点不包括线段F_1F_2的两条射线，若 2a>$|F_1F_2|$时，其轨迹不存在。还要注意定义中“绝对值”的条件不能少，因为仅满足$|MF_1|-|MF_2|=2a$的轨迹只是双曲线的一支。

2.双曲线的图像，性质及标准方程如下表：

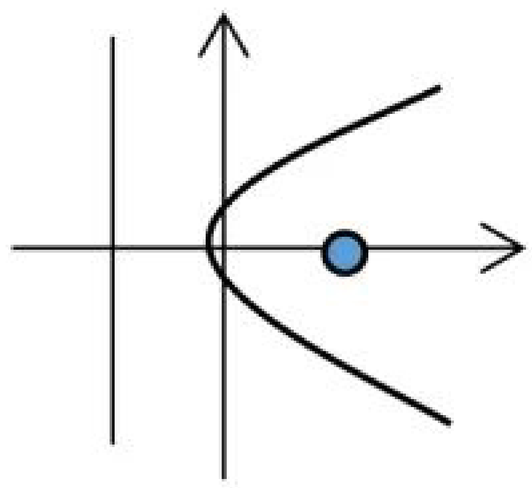
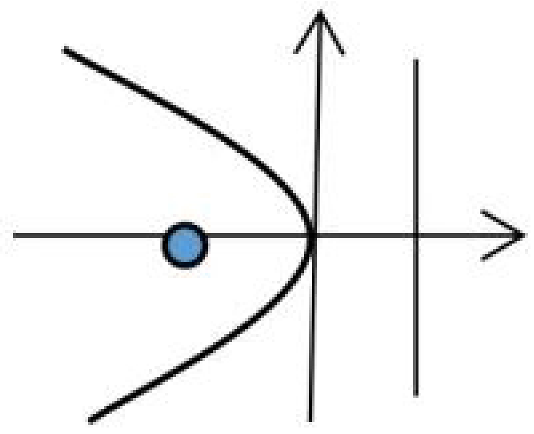
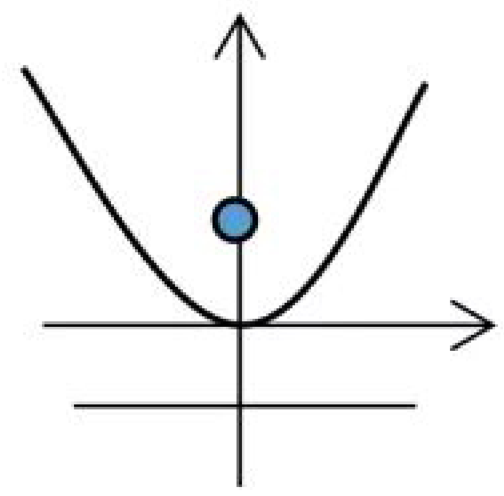
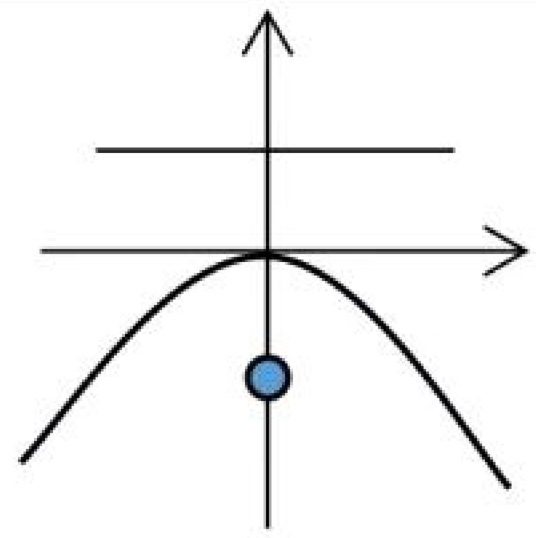
标准方程		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
图形			
性质	范围	在 x=a 和 x=-a 两条直线的外侧，向左，右两旁无限伸展	在 y=a 和 y=-a 两条直线的外侧，向上、向下两方无限伸展
	对称性	关于 x 轴，y 轴和原点对称	
	顶点	(-a，0)，(a，0)	(0，-a)，(0，a)
	焦点	$F_1(-c,0).F_2(c,0)$	$F_1(0,-c),F_2(0,c)$
	两轴	实轴长为 2a，虚轴长为 2b	
	焦距	$\|F_1F_2\|=2c,c^2=a^2+b^2$	
	渐近线方程	$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$	$\frac{y}{a}\pm\frac{x}{b}=0$

3.注意：已知双曲线的渐近线方程为 bx±ay=0，求双曲线方程，可设双曲线方程为$b^2x^2-a^2y^2=\lambda(\lambda\neq0)$，根据其他条件确定$\lambda$的值。

十四.抛物线

1.抛物线的定义：平面内到一个定点的距离与一条定直线的距离相等的动点的轨迹叫做抛物线，该定点叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线。

2.抛物线的图像，性质及标准方程如下表：

标准方程		$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
图形					
性质	开口方向	向右	向左	向上	向下
	范围	x≥0，y$\in R$	x$\leq 0, y\in R$	y≥0，x$\in R$	y≤0，$x\in R$
	对称性	关于 x 轴对称		关于 y 轴对称	
	顶点	原点 O(0，0)			
	焦点	$F(\frac{p}{2},0)$	$F(-\frac{p}{2},0)$	$F(0,\frac{p}{2})$	$F(0,-\frac{p}{2})$
	准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

3.直线与圆锥曲线的三种位置关系：联立直线与曲线得到一元二次方程从而有

$\Delta>0$时，相交；$\Delta=0$时相切；$\Delta<0$时，相离。

4.弦长公式：$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|$。

十五.参数方程和极坐标方程

1.参数方程与普通方程的互化(消参、确定 x、y 的范围)。

2.几种常见曲线的参数方程：

(1)经过点 $M(x_0,y_0)$，倾斜角为α的直线的参数方程是：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$$(t\in R,$t 为参数)

(2)以 C(a，b)为圆心，r 为半径的圆的参数方程是$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$$(0\le\theta<2\pi,$θ是参数)

(3)椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程是$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$(θ是参数)。

(4)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的参数方程是$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$(θ是参数)

(5)抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的参数方程是$\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$(t 是参数)

3.将直角坐标系的原点作为极点，x 轴正半轴作为极轴，并且取相同的长度单位建立极坐标系，平面内任一点的直角坐标(x，y)和极坐标(ρ,θ)的关系是

$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，

$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\\tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq0)\end{cases}$

十六.复数

1.复数的概念：

(1)设 a，b 都是实数，形如 a+bi 的数叫做复数，其中 a，b 分别叫做复数的实部和虚部，i 叫做虚数单位。

(2)当 b≠0，时，叫做虚数；当 a=0，b≠0 时，叫做纯虚数；

(3)复数相等的充要条件：实部和虚部都相等；

(4)共轭复数：两个复数的实部相等，虚部互为相反数；

(5)$i^2=-1$

2.复数的几何意义：

(1)复平面的概念：建立直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面。

(2)实轴，虚轴：在复平面内，x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴，实轴上的点都表示实数，除原点以外，虚轴上的点都表示纯虚数。

(3)复数的几何意义：复数 z=a+bi$\leftrightarrow$复平面内的点 z(a，b)$\leftrightarrow$平面向量$\overrightarrow{OZ}$。

(4)复数的模$|Z|=|\overrightarrow{OZ}|=\sqrt{a^2+b^2}$。

(5)牢记虚数单位 i 的性质：$i^{4n+1}=i,i^{4n+2}=-1,i^{4n+3}=-i,i^{4n+4}=1(n\in N)$

3.复数的运算：

(1)复数的加法法则：(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.

(2)复数加法的几何意义：若复数z_1,z_2对应的向量$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$不共线，则复数$z_1+z_2$是以$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$为邻边的平行四边形对角线$\overrightarrow{OZ}$所对应的复数。

(3)复数减法法则：(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.

(4)复数减法的几何意义：复数z_1-z_2是连接向量$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$终点，并指向被减向量$\overrightarrow{Z_2Z_1}$所对应的复数。

(5)复数的乘法法则：(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.

(6)复数除法法则：(a+ni)÷(c+di)=$\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di\neq 0)$

(7)两个互为共轭复数的乘积 $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$。

(8)共轭复数的运算性质：

①$\overline{(\overline{z})}=z$；②$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;③$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$,$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{(z_1)}}{\overline{(z_2)}}(z_2\neq 0)$

(8)$||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$(当且仅当复数 z_1,z_2 所对应的向量平行时取“=”号)。

4.实系数一元二次方程：实系数一元二次方程在复数集中恒有解，当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程：$ax^2+bx+c=0$ (a，b，c 为实数，a≠0)在复数集中有一对互相共轭的虚数根，即：$x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i$

十七.空间直线与平面

1.平面的基本性质：

①公理 1：如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

②公理 2：如果两个平面有一个公共点，那么它们有且仅有经过这个点的公共直线。

③公理 3：经过不在同一直线上的三个点，有且仅有一个平面。

④推论 1：经过一条直线和这条直线外的一点，有且仅有一个平面。

⑤推论 2：过两条相交直线，有且仅有一个平面。

⑥推论 3：过两条平行直线，有且仅有一个平面。

2.直线与直线的位置关系：

(1)在同一平面内，两条不相交的直线叫做平行直线；不在同一个平面内的两条直线叫做异面直线。

(2)公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行。

(3)等角定理：如果两条相交直线和另外两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等。

(4)证明两条直线是异面直线一般用反证法。

3.两条异面直线所成的角及两条异面直线间的距离：

(1)两条异面直线所成的角：在空间任意取一点，过此点分别作两条异面直线的平行线，所得到的两条相交直线所成的锐角(或直角)叫做异面直线所成的角($\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$)。

(2)异面直线公垂线的概念：

①和两条异面直线都垂直相交的直线为异面直线的共垂线。

②公垂线是唯一存在的。

③两条异面直线公垂线段的长度为异面直线间的距离

4.直线与平面的位置关系：

(1)直线与平面平行：如果一条直线和一个平面没有公共点，叫做这条直线和这个平面平行。

(2)直线与平面平行的判定定理：如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

(3)直线与平面平行的性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行。

(4)直线与平面垂直的定义：一条直线和一个平面相交，并且和这个平面内的每一条直线都垂直，就说这条直线和这个平面垂直。

(5)直线与平面垂直的判定定理：如果一条直线和这个平面内的两条相交直线都

垂直，那么这条直线垂直于这个平面。

(6)直线与平面垂直的性质定理：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线互相平行。

(7)直线与平面所成的角：直线与它在平面内射影的夹角叫做直线与平面所成的角($\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)。

(8)射影长定理：从平面外一点向这个平面引垂线段和斜线段中：①射影相等的两条斜线段相等，射影较长的斜线段也较长；②相等的斜线段的射影也相等，较长的斜线段的射影也较长；③垂线段比任何一条斜线段都短。

5.两平面的位置关系：

(1)两个平面平行的定义：如果两个平面没有公共点，就说这两个平面平行。

(2)平面与平面平行的判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行。

(3)平面与平面平行的性质定理：如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行。

(4)二面角的定义：一条直线和由这条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角($\theta \in [0, \pi]$)。这条直线叫做二面角的棱。以二面角的棱上任意一点为端点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角‘

(5)平面与平面垂直的定义：两个平面相交，如果所成的二面角是直角，就说这两个平面互相垂直。

(6)平面与平面垂直的判定定理：如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面互相垂直。

(7)平面与平面垂直的性质定理：如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们的交线的直线，垂直于另一个平面。

十八.空间向量及其运算

1.空间向量及其加减与数乘运算：

(1)在空间中，具有大小和方向的量叫做向量，方向相同且模相等的有向线段表示同一向量或相等向量，与$\vec{a}$长度相等，方向相反的向量称为$\vec{a}$的相反向量。

(2)空间向量的有关知识实质上是平面向量对应知识的推广。

(3)共线向量：如果表示向量的有向线段所在直线互相平行或重合，则这些向量叫做共线向量(或平行向量)。

(4)平行于同一个平面的向量叫做共面向量，空间中的任意两个向量总是共面的。

(5)共线向量定理：对空间任意两个向量$\vec{a},\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$，$\vec{a}//\vec{b}$的充要条件是存在$\lambda\in R$，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$。

(6)共面向量定理：如果两个向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，则向量$\vec{p}$与向量$\vec{a},\vec{b}$共面的充要条件是存在唯一(x，y)，使得$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$。

(7)空间向量基本定理：如果三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，那么对空间任意向量$\vec{p}$，存在唯一的有序数组(x，y，z)，使得$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$，其中$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$叫做空间向量的一个基底，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都叫做基本向量。

(8)在空间直角坐标系中，点O是坐标原点，若点A的坐标为(x，y，z)，则向量$\overrightarrow{OA}$=(x，y，z).

(9)空间向量的线性运算与平面向量本质上是一样的，只是空间向量的范围扩大了。

(10)空间向量的坐标运算：

①若 $\vec{a}=(a_1,a_2a_3),\vec{b}=(b_1,b_2b_3)$ 则有：$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$；

②$k\vec{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$；

③$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

④$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

⑤$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{a_1b+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$；

⑥$\vec{a}//\vec{b}(\vec{b}\neq 0)\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)$

⑦$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$；

⑧若 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，则有：

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$。

2.空间直线的方向向量和平面的法向量：

(1)对于空间任意一条直线 l，我们把与直线 l 平行的非零向量 $\vec{d}$ 叫做直线 l 的一个方向向量。

(2)对于非零的空间向量 $\vec{n}$，如果它所在的直线与平面α垂直，那么向量 $\vec{n}$ 叫做平面α的一个法向量。

3.空间两条直线的位置关系：

(1)基本命题 1：两条直线平行或重合的充要条件是它们的方向向量互相平行。

(2)基本命题 2：一条直线与一个平面平行或在一个平面内的充要条件是这条直线的方向向量垂直于该平面的法向量，

(3)基本命题 3：两个平面平行或重合的充要条件是它们的法向量互相平行。

4.空间两条直线所成的角：设空间直线 a，b 所成的角为θ($0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$)，它们的一个方向向量分别为 $\overrightarrow{d_1}=(l_1,m_1,n_1),\overrightarrow{d_2}=(l_2,m_2n_2)$，$\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}$ 的夹角为 $\varphi(0\leq\varphi\leq\pi)$，则

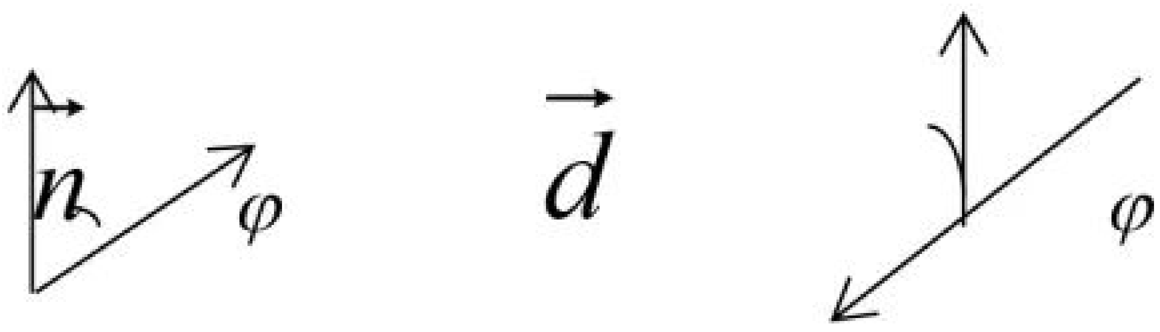
θ与φ的关系是：$\theta=\begin{cases}\varphi(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})\\ \pi-\varphi(\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi)\end{cases}$ 于是得$\cos\theta=|\cos\varphi|$。

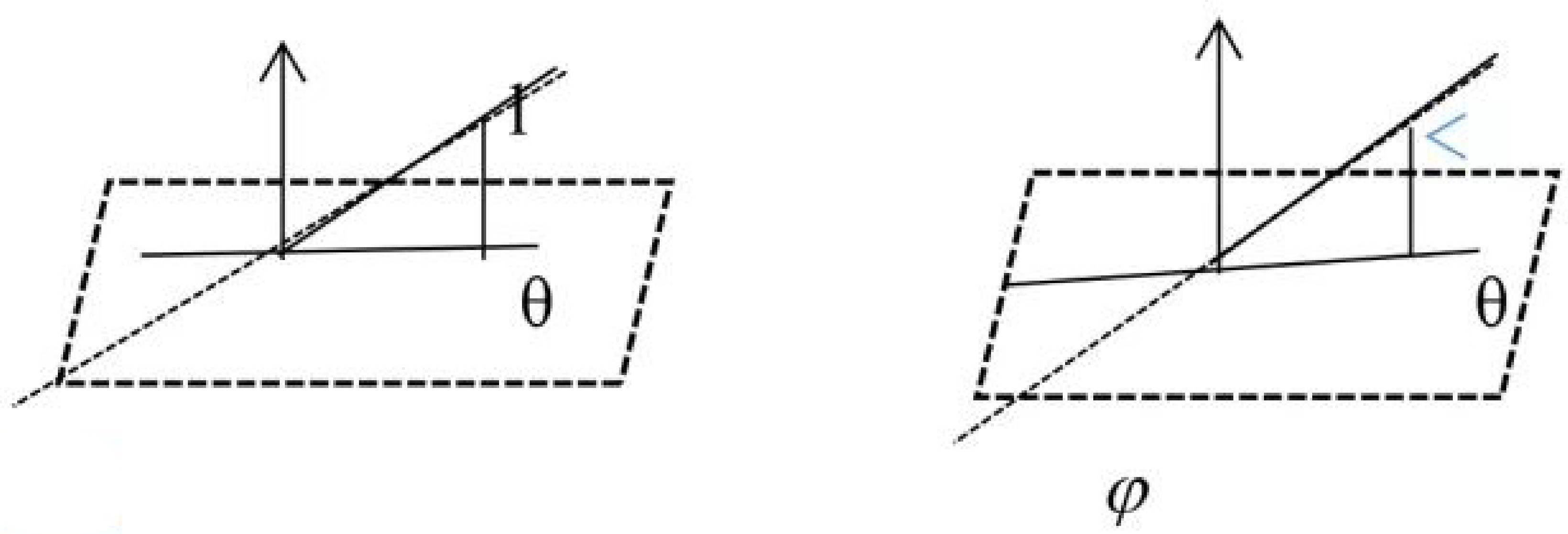
5.空间直线与平面所成的角，二面角：

当直线l与平面α相交且不垂直时，设它们所成的角为θ$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，$\vec{d}$是直线l的一个方向向量，$\vec{n}$是平面α的一个法向量，$\vec{d}$与$\vec{n}$的夹角为φ(如图)，那么θ与φ有如下关系：

$\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})\\ \varphi-\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi)\end{cases}$。当l//α或$l\subsetneq\alpha$时，$\theta=0,\varphi=\frac{\pi}{2}$;当$l\perp\alpha$时，$\theta=\frac{\pi}{2},\varphi=0$，

于是有：　sinθ=$|\cos\varphi|$.





十九.多面体

1.基本概念；

(1)棱柱：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱。

(2)棱锥：有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体叫做棱锥。

2.基本计算公式：

(1)棱柱侧面积公式$S=C\times l$，C为直截面周长，l为棱长；棱柱体积$V=S\times l$，S

为直截面面积，l 为棱长；

(2)直棱柱侧面积 S=C×h，C 为底面周长，h 为高；直棱柱体积 V=S×h，S 为底面面积，h 为高；

(3)棱锥：正棱锥侧面积 $S=\frac{1}{2}C\times h'$，C 为底面周长，h' 为斜高；$V=\frac{1}{3}S\times h$

二十.旋转体

1.基本概念：

(1)圆柱：以矩形的一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转所围成的几何体叫做圆柱。

(2)圆锥：以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成底曲面所围成的几何体叫做圆锥。

(3)球：以半圆的直径所在直线为旋转轴，旋转一周所围成的几何体叫做球体。

(4)圆柱，圆锥的侧面展开图分别是矩形，扇形。

(5)球面距离：球面上两点之间的最短距离。就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度。$l=R\varphi$(φ 为球心角的弧度数)。

2.旋转体的计算：

(1)圆柱侧面积 $S=2\pi rl$；圆锥侧面积 $S=\frac{1}{2}Cl=\pi rl$；

(2)圆柱体积 $V=Sh=\pi r^2h$；圆锥体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$；

(3)球的表面积 $S=4\pi r^2$；球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

二十一.排列组合和二项式定理

1.加法原理：做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\ldots+m_n$ 种不同的方法。

2.乘法原理：做一件事，需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，…，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdots m_n$ 种不同的方法。

3.分类与分步的区别：分类时，其中各种方法互相独立，用其中任何一种方法都可以完成这件事；分步时，各个步骤的方法相互依存，只有各个步骤都完成才算完成这件事。

4.排列与组合的区别与联系：排列数是研究排列(既取又排，与元素的顺序有关)个数的公式，组合数是研究组合(只取不排，与元素的顺序无关)个数的公式，是否有序是它们之间的本质区别。

5.排列数公式： $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，当 m=n 时，$A_n^n=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$，其中 m，n$\in N^+,m\le n$,规定 0！=1.

6.组合数公式：$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

7.排列数性质：$A_n^1=n,A_1^1=1,A_n^n=n!$

8.组合数性质：$C_n^m=C_n^{n-m},C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m,C_n^0=1,C_n^n=1,C_1^0=1$。

9.二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$。

(1)项数：二项展开式共有 n+1 项。

(2)指数：每一项中 a，b 的指数和都等于 n，其中 a 的指数从 n 依次减少到 0，b 的指数从 0 依次增加到 n，二项展开式是关于 a，b 的一个 n 次表达式。

(3)二项式系数：二项展开式中的系数 $C_n^r(r=0,1,\cdots n)$ 叫做二项式系数，应注意二项式系数的几个特点：

①"等距性"，在二项展开式中，与首末两项"等距离"的两项的二项式系数相等；

②"最值性"：如果$(a+b)^n$中，当n为偶数时，展开式的中间一项第$\frac{n}{2}+1$项的二项式系数最大，当n为奇数时，展开式的中间两项：第$\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}+1$项的二项式系数相等且最大。由$(a+b)^n$的展开式中二项式系数的最大值，可求出$(a-b)^n$展开式中系数的最大值和最小值。

③二项展开式的所有二项式系数和为：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，奇数项的二项式系数之和等于偶数项的二项式系数之和，即：$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

④注意：二项式展开式中的某项二项式系数与系数的联系与区别。

⑤通项公式：二项展开式中的第r+1项，即$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r} b^r$叫做二项展开式的通项公式。

⑥恒等式是二项式定理的一个突出特点，应注意对它的理解和运用。

二十二.概率与统计

1.基础知识：

(1)事件A的概率P(A)的取值范围0≤P(A)≤1.

(2)"P(A)=0"⇔事件A是不可能事件。

(3)"P(A)=1"⇔事件A是必然事件。

(4)事件A的频率$\frac{m}{n}$是事件A的概率P(A)的估计值，当n越大，$\frac{m}{n}$作为P(A)的估计值越精确。

(5)如果某次试验共有N种等可能的结果，其中事件A包含的结果有k种，那么事件A的概率P(A)=$\frac{k}{N}$.

(6)牢记古典概型的两个特点：①一次试验所有的基本事件只有有限个；②每个事件出现的可能性等同。

2.事件 A 与事件 B 的和：A，B 为两个随机事件，事件 A 与事件 B 至少有一个出现，记为 $A\cup B$。

3.事件 A 与事件 B 的积：A，B 为两个随机事件，事件 A 与事件 B 同时出现，记为 $A\cap B$ 或 AB.

4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，若 A，B 为互斥事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

5.事件 A 是否发生与事件 B 发生的概率没有影响，这时我们称两个事件 A，B 独立，并且把这两个事件叫做相互独立事件。

6.由条件概率公式和相互独立事件 A，B 的定义，可以得到 P(AB)=P(A)P(B)，这就是说两个互相独立事件发生的概率，等于概率的积。

7.随机变量：如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做随机变量，随机变量常用希腊字母 ξ,η 表示。

8.若离散型随机变量 ξ 的概率发布律为

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	P_1	P_2	…	P_n

则称：$E\xi=x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_nP_n$，为 ξ 的数学期望，简称期望。

9.方差：$D\xi=(x_1-E\xi)^2P_1+(x_2-E\xi)^2P_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2P_n$。方差的算术平方根叫做随机变量 ξ 的标准差。

10.三种抽样方法：(1)简单抽样方法：①抽签法。②随机数表法。(2)系统抽样。(3)分层抽样。(4)三种抽样方法的联系与适应范围见新表

类别	共同点	各自特点	相互联系	适用范围
简单随	都是不放回抽	从总体中逐个		总体中的个体

机抽样	样，抽样过程	抽取		数比较少
系统抽样	中，每个个体被抽到的机会(概率)相等	将总体均分成几部分，按事先确定的规则，在各部分抽取	在起始部分抽样时，采用简单随机抽样	总体中的个体数较多
分层抽样		将总体分成几层，分层进行抽取	各层抽样时，采用简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几部分组成

11.平均数：$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$。

12.方差与标准差：方差：$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，标准差：$s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$。