北京市朝阳区高三年级第二学期质量检测二

数学参考答案

2021.5

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

(1)D (2)D (3)B (4)A (5)D

(6)A (7)C (8)B (9)C (10)B

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

(11)-4 (12)4

(13)$\frac{7}{9}$ (14)0;-3(答案不唯一) (15)①②

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(共 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $b^2+c^2-a^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}bc$,

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}$.

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. ………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $3c\sin A=\sqrt{2}a\sin B$,

由正弦定理得 $3ac=\sqrt{2}ab$,所以 $b=\frac{3\sqrt{2}}{2}c$.

因为$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}$,

即$\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}c^2}{2}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{2}$,所以 $c^2=8$.

所以 $c=2\sqrt{2}$. ………………………… 13 分

(17)(共 14 分)

解:(Ⅰ)设事件 A:从抽取的高二年级学生样本中随机抽取一人,其得分不低于 90 分,

则 $P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

所以从抽取的高二年级学生样本中随机抽取一人,其得分不低于 90 分的概率为$\frac{2}{5}$. ………………………… 4 分

（Ⅱ）由(Ⅰ)可知，从该地区高二年级参加知识竞赛成绩优秀的学生中随机抽取1人，其得分不低于90分的概率估计为0.4.

由题意可知，$X\sim B(3,0.4)$，X的可能取值为0，1，2，3.

所以$P(X=0)=C_3^0\times0.6^3\times0.4^0=0.216$；$P(X=1)=C_3^1\times0.6^2\times0.4^1=0.432$；

$P(X=2)=C_3^2\times0.6^1\times0.4^2=0.288$；$P(X=3)=C_3^3\times0.6^0\times0.4^3=0.064$.

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

所以X的数学期望为$EX=3\times0.4=1.2$. ………………………………… 10分

（Ⅲ）由题意可知，高一年级学生样本得分的平均分为

$$\frac{85\times4+86\times3+87\times3+90\times4+92}{15}=\frac{1311}{15}=87.4.$$

设高二年级学生样本得分的最高分为m.

由图可知，要使得高二年级学生样本得分的平均分一定超过高一年级学生样本得分的平均分，

只需$\dfrac{85\times12+90\times7+m}{20}>87.4$. 解得$m>98$.

所以当高二年级学生样本得分的最高分至少是99分时，高二年级学生样本得分的平均分一定超过高一年级学生样本得分的平均分. ………………… 14分

（18）（共13分）

解：选择①②：

（Ⅰ）因为$AC=4$，$AB=3$，$BC=5$，

所以$AB\perp AC$.

又因为$AB\perp AA_1$，$AC\cap AA_1=A$，

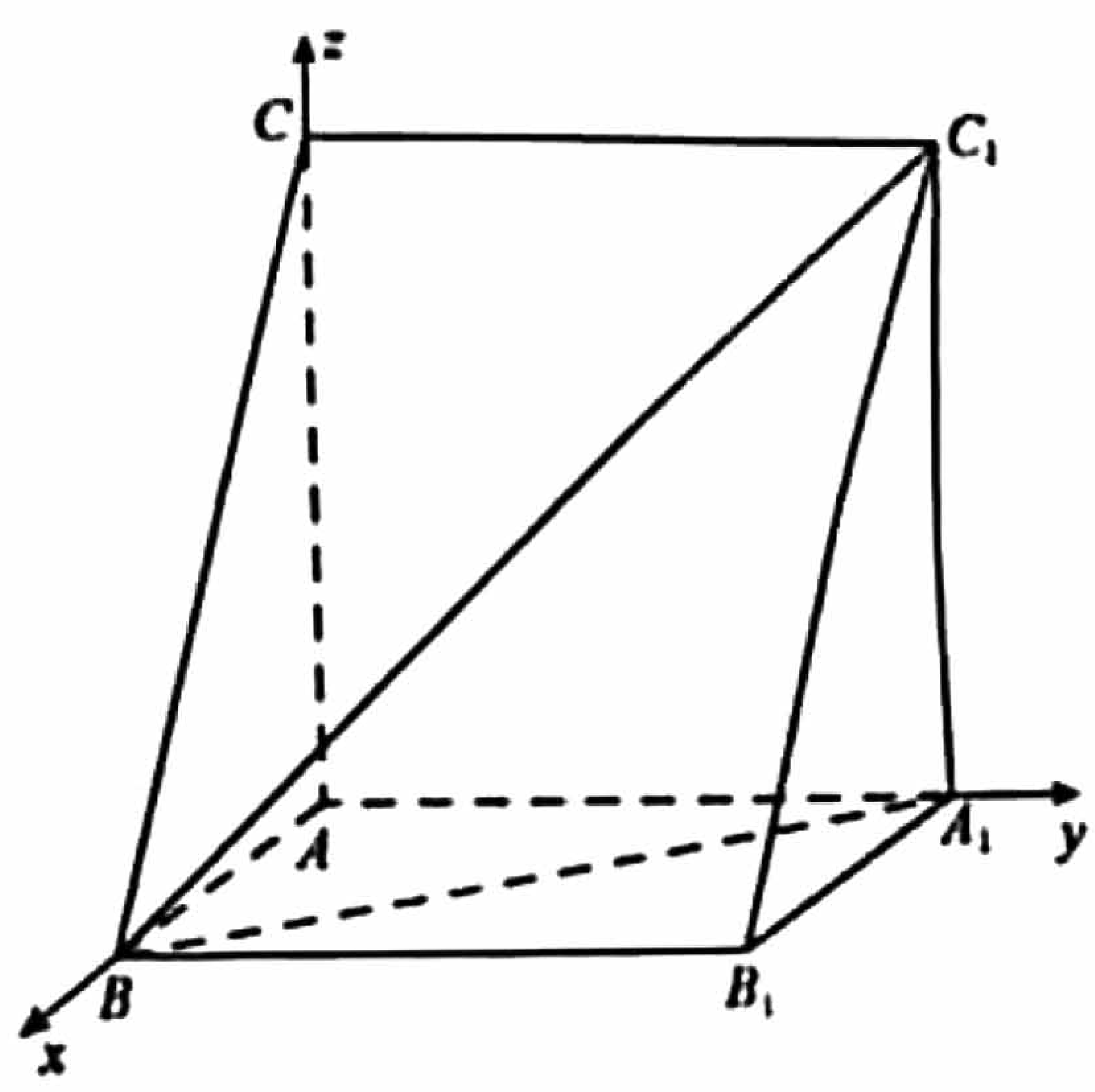
所以$AB\perp$平面AA_1C_1C. ………………………………………………………… 5分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知$AB\perp AC$，$AB\perp AA_1$.

因为四边形AA_1C_1C是正方形，

所以$AC\perp AA_1$.

如图，以A为原点建立空间直角坐标系$A-xyz$，



则$A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$C(0,0,4)$，$A_1(0,4,0)$，$C_1(0,4,4)$，

$\overrightarrow{A_1B}=(3,-4,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,0,4)$，

$\overrightarrow{BC}=(-3,0,4)$.

设平面A_1BC_1的一个法向量为$n=(x,y,z)$，

(Ⅱ)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=k(x-2)\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$.

由判别式 $\Delta=(-8k^2)^2-4(1+2k^2)(8k^2-2)>0$,解得 $k^2<\dfrac{1}{2}$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{8k^2-2}{1+2k^2}$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=\dfrac{-4k}{1+2k^2}$.

所以点 G 的坐标为 $(\dfrac{4k^2}{1+2k^2},\dfrac{-2k}{1+2k^2})$.

由题意,$k^2\neq\dfrac{1}{18}$,直线 AG 的斜率 $k_{AG}=\dfrac{\dfrac{-2k}{1+2k^2}-0}{\dfrac{4k^2}{1+2k^2}-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{-10k}{18k^2-1}$,

直线 FM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$,则点 P 的坐标为 $(1,\dfrac{2y_1}{x_1+1})$.

同理点 Q 的坐标为 $(1,\dfrac{2y_2}{x_2+1})$.

因为 $\dfrac{2y_1}{x_1+1}+\dfrac{2y_2}{x_2+1}=\dfrac{2k[(x_1-2)(x_2+1)+(x_2-2)(x_1+1)]}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$$=\frac{2k[2x_1x_2-(x_1+x_2)-4]}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}$$

$$=\frac{2k[2\times\frac{8k^2-2}{1+2k^2}-\frac{8k^2}{1+2k^2}-4]}{\frac{8k^2-2}{1+2k^2}+\frac{8k^2}{1+2k^2}+1}$$

$$=\frac{-16k}{18k^2-1},$$

所以点 $H(1,\dfrac{-8k}{18k^2-1})$,所以直线 AH 的斜率 $k_{AH}=\dfrac{\dfrac{-8k}{18k^2-1}-0}{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{-10k}{18k^2-1}$.

因为 $k_{AG}=k_{AH}$,

所以 A,G,H 三点共线. …………………………………………………… 15 分

(21)(共 15 分)

解:(Ⅰ)3,2,1,1,0,-1.(答案不唯一) ························ 3 分

(Ⅱ)因为 $a_1a_N<0$,所以 a_1,a_N 异号.

假设 $a_1<0,a_N>0$.

设 $T=\{i|a_i<0,i\in\{1,2,3,\cdots,N\}\}$.因为 $a_1<0$,所以 $T\neq\varnothing$.

又因为 T 是有限自然数集,所以可设 T 中的最大数为 $m(1\leqslant m\leqslant N-1)$.

令 $k=m+1$,则 $a_k\geqslant0$.

因为 $|a_k-a_{k-1}|=a_k-a_{k-1}\leqslant1$,所以 $a_k\leqslant1+a_{k-1}=1+a_m<1$.

因为 $0\leqslant a_k<1$,且 a_k 为整数,所以 $a_k=0$.

因此若数列 $A_N:a_1,a_2,\cdots,a_N(N\geqslant3)$ 满足 $a_1<0,a_N>0$,且对任意 $i=2,3,\cdots,N$,都有 $|a_i-a_{i-1}|\leqslant1$,

则存在 a_k 使得 $a_k=0$.

若 $a_1>0,a_N<0$,则数列 $-a_1,-a_2,\cdots,-a_N$ 满足 $-a_1<0,-a_N>0$,

且对任意 $i=2,3,\cdots,N$,都有 $|(-a_i)-(-a_{i-1})|=|a_i-a_{i-1}|\leqslant1$,

故存在 $-a_k$ 使得 $-a_k=0$,即存在 a_k 使得 $a_k=0$.

综上,数列 A_N 中存在 a_k 使得 $a_k=0$. ························ 9 分

(Ⅲ)设 $t=\dfrac{S(A_N)}{N}$,则 $t\in\mathbf{Z}$.

设数列 $A_N:a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中的最大值为 $M>0$,最小值为 $m<0$.

因为 $Nm<S(A_N)<NM$,所以 $m<t=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}<M$.

设在数列 A_N 中,$a_i=m,a_j=M$.

若 $i<j$,因为 $|a_i-a_j|=M-m\geqslant1-(-1)=2$,所以 $j\geqslant i+2$.

设数列 $B:a_i-t,a_{i+1}-t,\cdots,a_j-t$,则数列 B 至少有 3 项.

因为 $(a_i-t)(a_j-t)=(m-t)(M-t)<0$,且对任意 $k=1,2,\cdots,j-i$,

都有 $|(a_{i+k}-t)-(a_{i+k-1}-t)|=|a_{i+k}-a_{i+k-1}|\leqslant1$,

所以由(Ⅱ)可知存在 a_r-t 使得 $a_r-t=0(r\in\{i+1,i+2,\cdots,j-1\})$,即 $t=\dfrac{S(A_N)}{N}=a_r$.

若 $i>j$,设数列 $C:t-a_j,t-a_{j+1},\cdots,t-a_i$.

同理,存在 $t-a_r$ 使得 $t-a_r=0(r\in\{j+1,j+2,\cdots,i-1\})$,即 $t=\dfrac{S(A_N)}{N}=a_r$.

综上,若 $S(A_N)$ 是 N 的整数倍,则数列 A_N 中存在 a_r 使得 $S(A_N)=Na_r$.

························ 15 分

② 当 $a=1$ 时，$f'(x)=x(e^x-1)\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

所以当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点.

③ 当 $a>1$ 时，$\ln a>0$.

当 x 变化时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个极值点.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个极值点，

当 $0<a<1$ 或 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个极值点，

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点. ………………………………… 10 分

（Ⅲ）(1) 若 $a\leqslant 0$，由（Ⅱ）可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(x)_{\min}=f(0)=0$.

所以 $a\leqslant 0$ 符合题意.

(2) 若 $a>0$，当 $x<0$ 时，因为 $(x-1)e^x<0$，

所以 $f(x)=(x-1)e^x-\dfrac{1}{2}ax^2+1<-\dfrac{1}{2}ax^2+1$.

又因为 $f(-\sqrt{\dfrac{2}{a}})<-\dfrac{1}{2}a(-\sqrt{\dfrac{2}{a}})^2+1=0$，

所以 $f(x)\geqslant 0$ 不恒成立.

所以 $a>0$ 不符合题意.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,0]$. ………………………………… 15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时，由 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}(x-2), \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 解得 M,N 的坐标分别为 $(0,1)$，$(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$，

则 $|MN|=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

又因为左焦点 $F(-1,0)$ 到直线 $l:y=-\dfrac{1}{2}(x-2)$ 的距离为 $d=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，

所以 $\triangle FMN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|MN|d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}=1$. ………………………… 6 分

则$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{A_1B}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0. \end{cases}$ 即$\begin{cases} 3x-4y=0, \\ 4z=0. \end{cases}$

令 $y=3$，则 $x=4$，$z=0$，所以 $n=(4,3,0)$.

设直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BC},n\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot n|}{|\overrightarrow{BC}||n|}=\dfrac{12}{25}$.

所以直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为$\dfrac{12}{25}$. ………………………… 13 分

选择①③：

（Ⅰ）因为 $AC=4$，$AB=3$，$BC=5$，

所以 $AB\perp AC$.

又因为平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C，平面 $ABC\cap$ 平面 $AA_1C_1C=AC$，

所以 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C. ………………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）同上. …………………………………………………………………………… 13 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-1)e^x+1$，$f(1)=1$.

又 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$，所以 $f'(1)=e$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $ex-y+1-e=0$. ………… 3 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2+1$，所以 $f'(x)=xe^x-ax=x(e^x-a)$.

（1）当 $a\leqslant0$ 时，有 $e^x-a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

当 x 变化时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $a\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 只有一个极值点.

（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，$x=\ln a$.

① 当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$.

当 x 变化时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个极值点.