通州区 2022-2023 学年第二学期高二年级期末质量检测

数 学 试 卷

2023 年 7 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）二项式 $(x+2)^5$ 的展开式的第 3 项为

（A）$40x^2$　（B）$80x^2$　（C）$40x^3$　（D）$80x^3$

（2）4 名学生与 1 名老师站成一排照相，学生请老师站在正中间，则不同的站法种数为

（A）12　（B）18　（C）24　（D）48

（3）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=$

（A）$-\mathrm{e}^{-x}$　（B）$-\mathrm{e}^{x}$　（C）e^{-x}　（D）e^{x}

（4）已知函数 $f(x)=x\ln x$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为

（A）$(-\infty,\frac{1}{\mathrm{e}})$　（B）$(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$　（C）$(0,+\infty)$　（D）$(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$

（5）已知离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=\frac{1}{4}$（$i=1$，2，3，4），则 $P(X\leqslant 2)=$

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）1

（6）将一枚质地均匀的硬币重复抛掷 4 次，恰好出现 3 次正面朝上的概率为

（A）$\frac{1}{16}$　（B）$\frac{1}{12}$　（C）$\frac{1}{8}$　（D）$\frac{1}{4}$

（7）已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(0<X<2)=0.2$，则 $P(X>4)=$

（A）0.3　（B）0.4　（C）0.6　（D）0.8

（8）篮球运动员在比赛中每次罚球得分的规则是：命中得1分，不命中得0 分．已知某篮球运动员罚球命中的概率为0.8，设其罚球一次的得分为 X，则

（A） $E(X)=0.5$， $D(X)=0.20$　　（B） $E(X)=0.5$， $D(X)=0.25$

（C） $E(X)=0.8$， $D(X)=0.12$　　（D） $E(X)=0.8$， $D(X)=0.16$

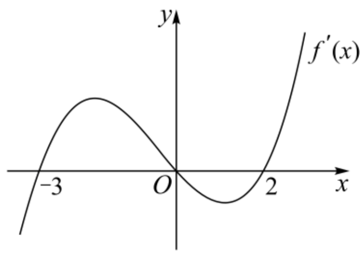
（9）已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 图象如图所示， 给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-3)$ 上单调递增；

② $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减；

③ $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值；

④ $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值.



则其中结论一定正确的个数是

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

（10）已知函数 $f(x)=-x^2+x-a\ln x$ 为其定义域上的单调函数，则实数 a 的取值范围为

（A） $[\frac{1}{8},+\infty)$　　（B） $[\frac{1}{4},+\infty)$　　（C） $[\frac{3}{8},+\infty)$　　（D） $[\frac{1}{2},+\infty)$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）在2道代数题和3道几何题中，每次从中随机抽出1道题，抽出的题不再放回，设 $A=$“第一次抽到代数题”， $B=$“第二次抽到几何题”，则 $P(AB)=$_____； $P(B|A)=$_____.

（12）二项式 $(x-\frac{1}{x})^8$ 的展开式中常数项为_____.

（13）已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$，则 $f(x)$ 的零点是_____；极值点是_____.

（14）已知一个三位数，如果满足个位上的数字和百位上的数字都大于十位上的数字，那么我们称该三位数为“凹数”，则没有重复数字的三位“凹数”的个数为_____. （用数字作答）

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\mathrm{e}^x, x<1 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}, x\geq 1 \end{cases}$，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 存在 4 个极值点；

② $f'(\frac{5}{2})>f'(\frac{1}{2})>f'(\frac{3}{2})$；

③若点 $P(x_1,y_1)(x_1<1)$，$Q(x_2,y_2)(x_2\geqslant 1)$ 为函数 $f(x)$ 图象上的两点，则

$f(x_1)-f(x_2)<\dfrac{4\mathrm{e}-\mathrm{e}^2}{4}$；

④若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-2af(x)=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围是

$\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}^2},\dfrac{\mathrm{e}^2}{8}\right)\cup\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2},+\infty\right)$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间及极值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-3,0]$ 上的最大值和最小值.

（17）（本小题 12 分）

袋中有 4 个白球、2 个黑球，从中随机地连续抽取 3 次，每次取 1 个球.

（Ⅰ）若每次抽取后不放回，求连续抽取 3 次至少取到 1 个黑球的概率；

（Ⅱ）若每次抽取后放回，求连续抽取 3 次恰好取到 1 个黑球的概率.

(18)(本小题 14 分)

某学校为了解高一新生的体质健康状况，对学生的体质进行了测试，现从男、女生中各随机抽取 20 人作为样本，把他们的测试数据整理如下表，规定：数据≥60，体质健康为合格.

等级	数据范围	男生人数	女生人数
优秀	$[90,100]$	4	6
良好	$[80,90)$	6	6
及格	$[60,80)$	7	6
不及格	60 以下	3	2

(Ⅰ)估计该校高一年级学生体质健康等级为合格的概率；

(Ⅱ)从样本等级为优秀的学生中随机抽取 3 人进行再测试，设抽到的女生数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

(Ⅲ)从该校全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人健康等级是优秀的概率.

(19) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=x^2-mx-1$，$g(x)=x\ln x-1$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 在区间 $(-2,1)$ 上恰有一个极值点，求实数 m 的取值范围；

(Ⅱ)求 $g(x)$ 的零点个数；

(Ⅲ)若 $m=1$，求证：对于任意 $x\in(0,+\infty)$，恒有 $f(x)\geqslant g(x)$.

(20)(本小题 16 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x+bx$，$a,b\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)当 $a=1$，$b=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(Ⅱ)当 $a>0$，$b=-2$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值；

(Ⅲ)当 $a=1$ 时，设 $g(x)=f(x)+\sin x$，判断 $g(x)$ 在 $x\in(0,\pi]$ 上是否存在极值. 若存在，指出是极大值还是极小值；若不存在，说明理由.

（21）（本小题 16 分）

为了拓展学生的知识面，提高学生对航空航天科技的兴趣，培养学生良好的科学素养，某校组织学生参加航空航天科普知识答题竞赛，每位参赛学生可答题若干次，答题赋分方法如下：第一次答题，答对得 2 分，答错得 1 分；从第二次答题开始，答对则获得上一次答题得分的两倍，答错得 1 分. 学生甲参加这次答题竞赛，每次答对的概率为 $\frac{3}{4}$，且每次答题结果互不影响.

（Ⅰ）求学生甲前三次答题得分之和为 4 分的概率；

（Ⅱ）设学生甲第 i 次答题所得分数 $X_i(i\in\mathbf{N}^*)$ 的数学期望为 $E(X_i)$.

（i）求 $E(X_1)$，$E(X_2)$，$E(X_3)$；

（ii）写出 $E(X_{i-1})$ 与 $E(X_i)$ $(i\geqslant 2)$ 满足的等量关系式（直接写出结果，不必证明）；

（iii）若 $E(X_i)>10$，求 i 的最小值.

通州区 2022-2023 学年第二学期高二年级期末质量检测

数学参考答案及评分标准

2023 年 7 月

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	C	C	A	B	B	D	A	D	B	A

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\frac{3}{10}$；$\frac{3}{4}$　（12）70　（13）$x=1$；$x=2$　（14）240　（15）①③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 12 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

所以 $f'(x)=x^2+x-2$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$，或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	$\frac{13}{3}$	单调递减	$-\frac{1}{6}$	单调递增

所以，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(-2)=\frac{13}{3}$；

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(1)=-\frac{1}{6}$.　……………………8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)$ 在区间 $[-3,0]$ 上有极大值为 $f(-2)=\frac{13}{3}$.

因为 $f(-3)=\frac{5}{2}$，$f(0)=1$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[-3,0]$ 上的最大值为 $\frac{13}{3}$，最小值为 1． ……………………12 分

（17）（本小题 12 分）

解：（Ⅰ）设抽取 3 次，黑球的个数为 X，

因为每次抽取后不放回，结果不独立，所以 X 服从超几何分布．

所以连续抽取 3 次至少取到 1 个黑球的概率为

$$P(X \geqslant 1)=P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}+\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$ ……………………6 分

（Ⅱ）设抽取 3 次，黑球的个数为 Y，

因为每次抽取后放回，结果独立，所以 Y 服从二项分布．

因为袋中有 4 个白球、2 个黑球，

所以每次抽取后放回，连续抽取 3 次每次抽取黑球的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$．

所以连续抽取 3 次恰好取到 1 个黑球的概率为

$$P(Y=1)=C_3^1\times(\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}.$$ ……………………12 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由表可知，样本中合格的学生数为：$4+6+7+6+6+6=35$，样本总数为：$20+20=40$，

所以估计该校高一年级学生体质健康等级为合格的概率 $P=\frac{35}{40}=\frac{7}{8}$． ……………………3 分

（Ⅱ）依题意 X 的可能取值为 0，1，2，3．

所以 $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$，$P(X=1)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$．

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{9}{5}$． ……………………9 分

（III）设“该校高一年级男生体质健康等级是优秀”为事件 A，“该校高一年级女生体质健康等级是优秀”为事件 B，

所以 $P(A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

所以随机抽取的3人中，2人健康等级是优秀的为男生的概率为 $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times(1-\frac{3}{10})=\frac{7}{250}$；

随机抽取的3人中，2人健康等级是优秀的为1个男生1个女生的概率为

$\frac{1}{5}\times(1-\frac{1}{5})\times\frac{3}{10}+(1-\frac{1}{5})\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{12}{125}$.

所以估计这3人中恰有2人健康等级是优秀的概率为 $P=\frac{7}{250}+\frac{12}{125}=\frac{31}{250}$. ....14 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=x^2-mx-1$，

所以 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{m}{2}$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(-2,1)$ 上恰有一个极值点，

所以 $-2<\frac{m}{2}<1$. 所以 $-4<m<2$.

所以实数 m 的取值范围是 $(-4,2)$. ....4 分

（Ⅱ）因为 $g(x)=x\ln x-1$，定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $g'(x)=\ln x+1$.

令 $g'(x)<0$，即 $\ln x+1<0$，解得 $x<\frac{1}{e}$；令 $g'(x)>0$，即 $\ln x+1>0$，解得 $x>\frac{1}{e}$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增.

当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$\ln x<-1$，所以 $x\ln x-1<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上没有零点.

因为 $g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}-1<0$，$g(e)=e-1>0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 上存在1个零点.

所以 $g(x)$ 的零点个数为 1. ……………………10 分

（III）因为 $m=1$，所以 $f(x)=x^2-x-1$

所以要证 $f(x)\geqslant g(x)$，即证 $x^2-x-1\geqslant x\ln x-1$，只需证 $x-1\geqslant\ln x$.

设 $g(x)=x-1-\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，

所以 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

令 $g'(x)<0$，得 $x<1$；令 $g'(x)>0$，得 $x>1$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 在区间上的最小值为 $g(1)=0$.

所以 $g(x)\geqslant 0$，即 $x-1\geqslant\ln x$.

所以对于任意 $x\in(0,+\infty)$，恒有 $f(x)\geqslant g(x)$. ……………………15 分

（20）（本小题 16 分）

解：（Ⅰ）因为 $a=1$，$b=1$，所以 $f(x)=\ln x+x$.

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$.

所以 $f(1)=1$，$f'(1)=2$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

……………………3 分

（Ⅱ）因为 $b=-2$，所以 $f(x)=a\ln x-2x$，定义域为 $(0,+\infty)$.

所以 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-2=\dfrac{-2x+a}{x}$.

令 $f'(x)>0$，即 $-2x+a>0$，得 $x<\dfrac{a}{2}$；令 $f'(x)<0$，即 $-2x+a<0$，得 $x>\dfrac{a}{2}$.

因为 $a>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{a}{2})$ 上单调递增，在区间 $(\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递减.

①当 $\dfrac{a}{2}\leqslant 1$，即 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值 $f(1)=-2$.

②当 $1<\frac{a}{2}<2$，即 $2<a<4$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,\frac{a}{2})$ 上单调递增，在区间 $(\frac{a}{2},2)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值 $f(\frac{a}{2})=a\ln\frac{a}{2}-a$.

③当 $\frac{a}{2}\geqslant 2$，即 $a\geqslant 4$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值 $f(2)=a\ln 2-4$. ……………………9 分

（III）因为 $a=1$，$g(x)=f(x)+\sin x$，

所以 $g(x)=\ln x+bx+\sin x$，$x\in(0,\pi]$

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}+b+\cos x$.

令 $h(x)=\frac{1}{x}+b+\cos x$，所以 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\sin x$.

因为 $x\in(0,\pi]$，所以 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\sin x<0$.

所以 $g'(x)$ 在区间 $(0,\pi]$ 上单调递减.

当 $x\to 0$ 时，$g'(x)\to+\infty$，又 $g'(\pi)=a+\frac{1}{\pi}-1$.

①当 $g'(\pi)=a+\frac{1}{\pi}-1\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1-\frac{1}{\pi}$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,\pi]$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,\pi]$ 上无极值.

②当 $g'(\pi)=a+\frac{1}{\pi}-1<0$，即 $a<1-\frac{1}{\pi}$ 时，$g'(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上有唯一零点 x_0.

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$g'(x)<0$.

$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增；在 (x_0,π) 上单调递减.

所以 $x=x_0$ 是函数 $g(x)$ 的一个极大值点，且无极小值.

综上所述，当 $a\geqslant 1-\frac{1}{\pi}$ 时，函数 $g(x)$ 无极值；

当 $a<1-\frac{1}{\pi}$ 时，函数 $g(x)$ 有极大值，但无极小值. ……………………16 分

（21）（本小题 16 分）

解：（Ⅰ）学生甲前三次答题得分之和为 4 分的概率，即为学生甲前三次答题中仅只答对一次的概率.

设“学生甲前三次答题得分之和为4分”为事件 A，

所以 $P(A)=C_3^1\times\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$. ……………………3分

（Ⅱ）（i）学生甲第1次答题得2分、1分的概率分别为 $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{4}$，

所以 $E(X_1)=2\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.

甲第2次答题得4分、2分、1分的概率分别为 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$，$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$，$\frac{1}{4}$.

所以 $E(X_2)=4\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{23}{8}$.

甲第3次答题得8分，4分、2分、1分的概率分别为 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$，$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$，$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$，$\frac{1}{4}$.

所以 $E(X_3)=8\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+4\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{73}{16}$. ……………………7分

（ii）所以 $E(X_{i-1})$ 与 $E(X_i)$ 满足的等量关系式是：$E(X_i)=\frac{3}{2}E(X_{i-1})+\frac{1}{4}$，$i\in\mathbf{N}^*$，$i\geqslant 2$.

……………………10分

（iii）由（i）知 $E(X_1)=\frac{7}{4}$，由（ii）知 $E(X_i)=\frac{3}{2}E(X_{i-1})+\frac{1}{4}$，$i\in\mathbf{N}^*$，$i\geqslant 2$.

所以 $E(X_i)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(E(X_{i-1})+\frac{1}{2})$

所以数列 $\{E(X_i)+\frac{1}{2}\}$ 以 $\frac{9}{4}$ 为首项，公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列.

所以 $E(X_i)+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\times(\frac{3}{2})^{i-1}$，即 $E(X_i)=(\frac{3}{2})^{i+1}-\frac{1}{2}$.

由 $E(X_i)>10$，得 $(\frac{3}{2})^{i+1}-\frac{1}{2}>10$.

所以 $(\frac{3}{2})^i>7$.

因为 $(\frac{3}{2})^4=\frac{81}{16}<7$，$(\frac{3}{2})^5=\frac{243}{32}>7$，

所以 i 的最小值是5. ……………………16分

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年7月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新 最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者底部栏目<**高一高二→期末试题**>， 进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！