高三数学试题（文科）

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分．考试时间120分钟．
2. 请将各题答案填写在答题卡上．
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容．

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数 z 满足 $z(1-2i)=3-i$，则 $z=$

A. $\frac{1}{5}+i$　　B. $\frac{1}{5}-i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

2. 设集合 $A=\{x|\log_2(x+1)<2\}$，$B=\{x|2x+1<5\}$，则 $A\cap B=$

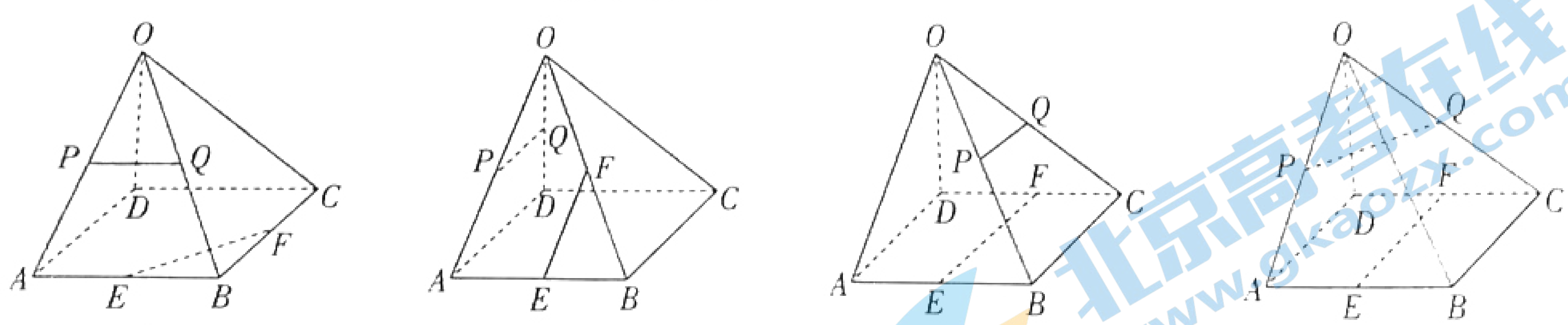
A. $(-\infty,2)$　　B. $(-1,2)$

C. $(-\infty,3)$　　D. $(-1,3)$

3. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y-2\geqslant 0,\\ x\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 12

4. 在下列四棱锥中，点 P,Q,E,F 均为所在棱的中点，则直线 PQ 与直线 EF 平行的是

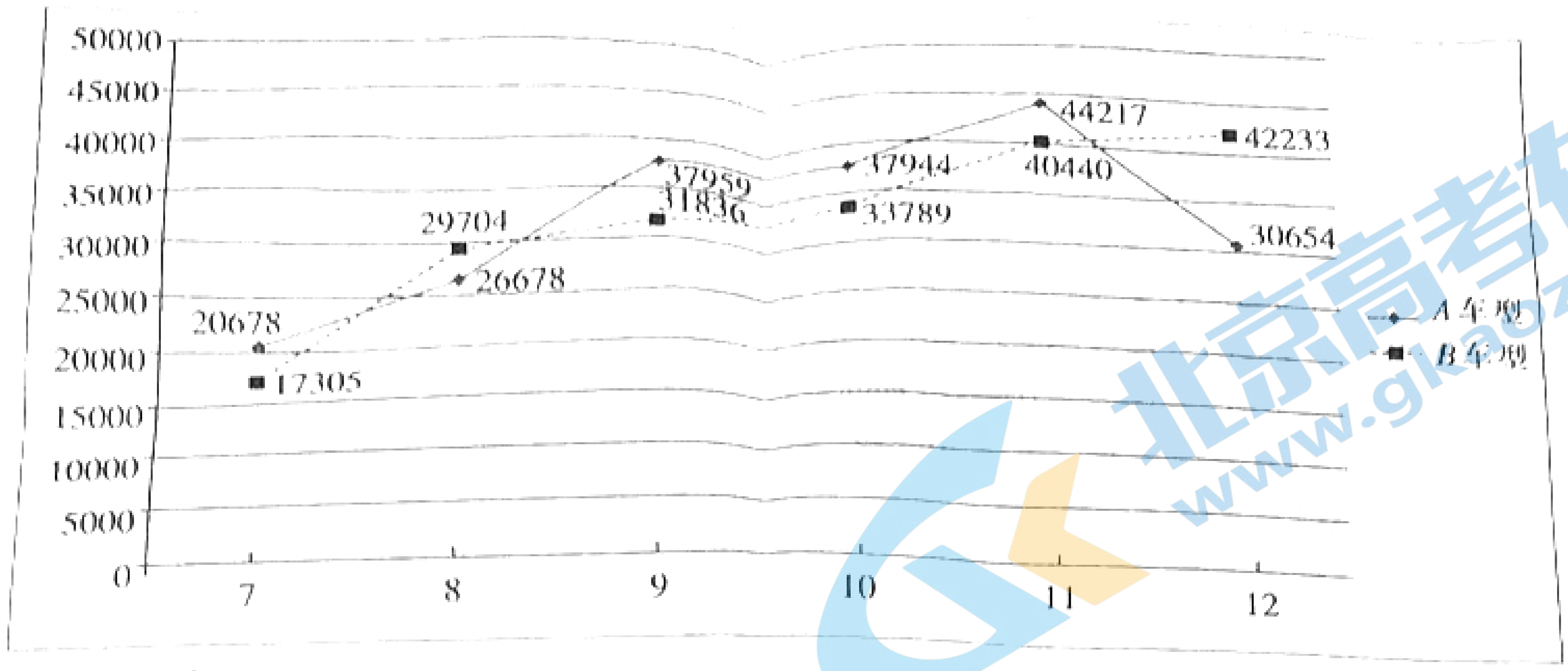


A　　B　　C　　D

5. 在△ABC 中，点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，点 E 在线段 BD 上，且满足 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$，则 $\lambda=$

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{3}{7}$　　C. $\frac{4}{7}$　　D. $\frac{6}{7}$

6. 从1886年卡尔·本茨发明世界上第一辆汽车至今，汽车工业一直伴随着人类文明飞速发展．汽车不但实现了人类高速奔跑的梦想，更延伸了人们的双腿，同时也见证了人类一个多世纪以来的科技发展．由此，汽车早已由最初的交通工具，逐渐演变为集科技、艺术为一体的高技工业产品，不仅如此，也正是汽车的出现，悄然改变了人们的生活．已知2020年下半年，两种车型月销量的折线图如图所示．



下列结论错误的是

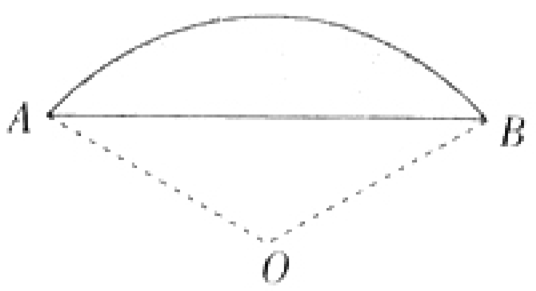
A. 2020年下半年 A 车型月销量的中位数为37951.5

B. 2020年下半年 A 车型总销量比 B 车型总销量大

C. 2020年下半年 B 车型月销量逐月递增

D. 2020年下半年 A 车型月销量的极差小于 B 车型月销量的极差

7.《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表，它的出现标志着中国古代数学形成了完整的体系．其中《方田》章有弧田面积计算问题，术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一．其大意是，弧田面积计算公式为弧田面积 $=\frac{1}{2}$(弦×矢+矢×矢)．公式中的“弦”指圆弧所对弦长，“矢”等于圆弧的最高点到弦的距离．如图，现有一弧田（图中阴影部分），其弦 $AB=2\sqrt{5}$，其弧所在圆的圆心为 O，用上面的弧田面积公式计算得到该弧田面积为 $\frac{2\sqrt{5}+1}{2}$．记 $\angle AOB=2\theta$，则 $\cos^2\frac{\theta}{2}=$



A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{5}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{30}}{6}$

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1+a_2=3$，$a_5+a_6=11$，则 $\frac{2S_n+3}{a_n}$ 的最小值是

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}+1$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

9. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，$AB=AC$，且 $\angle BAC=90°$．若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 存在内切球，则 $\frac{AA_1}{AB}=$

A. $2-\sqrt{2}$　　B. $2+\sqrt{2}$　　C. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 作双曲线 C 其中一条渐近线的垂线，垂足为 P，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 D．若 $|PF_2|=3|PD|$，$\triangle OPF_1$ 的面积为 $4\sqrt{2}$，则双曲线 C 的标准方程是

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$　　B. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$　　C. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$

11. 设 $a=\log_3 2$，$b=\log_4 3$，$c=\log_5 4$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<b<a$　　D. $b<a<c$

12. 已知函数 $f(x)=e^{x}-mx^{2}$, $g(x)=x$ [illegible] 1, 当 $x>0$ 时, $f(x)\geq g(x)$ 恒成立, 则 m 的最大值是

A. 1　　B. e　　C. $\frac{e^{2}-1}{4}$　　D. $\frac{e^{2}-2}{9}$

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{[illegible]}a_{[illegible]}=9$, 则 $a_{[illegible]}=$ ▲ .

14. 农业、农村和农民问题是中国全面建设小康社会面临的最大难点，要解决"三农"问题，首先要千方百计地提高农民收入. 某地政府为提高当地农民收入，推出很多优惠政策，并鼓励农户利用荒坡种植果树. 已知农户甲、乙通过考察，决定分别从 A,B,C 这三种果树苗中选择一种种植，则至少有一位农户选择 A 果树苗种植的概率为 ▲ .

15. 已知函数 $f(x)=\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}}$，若不等式 $f(\log_a 4)-f(1)>0$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ▲ .

16. 已知抛物线 $C: y^{2}=4x$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线 C 上，$MH\perp x$ 轴，垂足为 H，则 $\frac{|MH|}{|MF|}$ 的最大值是 ▲ .

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每道试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分)

某餐饮店为了解顾客对本店菜品的满意程度，随机调查了 120 位男顾客和 80 位女顾客，每位顾客对该餐饮店的菜品进行打分(满分：100 分)，根据顾客的打分情况，得到如下频率分布表：

分数/分	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频数	10	40	120	30

(1) 估计该餐饮店菜品得分的平均数. (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(2) 若得分不低于 80 分，则认为顾客对该餐饮店的菜品满意；若得分低于 80 分，则认为不满意. 完成下列 2×2 列联表，并判断是否有 99.9% 的把握认为男、女顾客对该餐饮店菜品的评价有差异.

	满意	不满意	合计
男顾客	100		120
女顾客			80
合计			200

参考公式：$K^{2}=\frac{n(ad-bc)^{2}}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P(K^{2}\geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

18.（12 分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$2\sin B=\sin C+\tan A\cos C$.

(1)求角A；

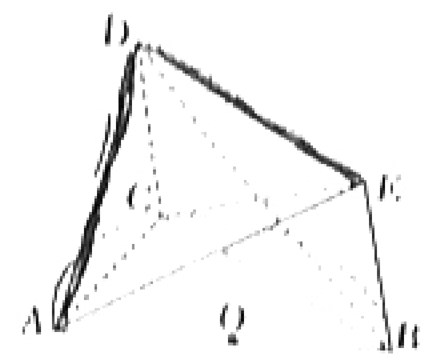
(2)若$a=7$，且$\triangle ABC$的面积为$10\sqrt{3}$，求角A的角平分线AD的长.

19.（12 分）

如图，$\triangle ABC$内接于半圆O，AB是半圆O的直径，四边形$BCDE$为平行四边形，$BE\perp$平面ABC.

(1)证明：$AD\perp DE$.

(2)若$AC=CD=2$，$BC=2\sqrt{3}$，求点C到平面ADE的距离.



20.（12 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点为$A(4,0)$.

(1)若椭圆C的焦距为4，求椭圆C的标准方程；

(2)若以点A为圆心的圆A与椭圆C有4个公共点，求椭圆C离心率的取值范围.

21.（12 分）

已知函数$f(x)=e^x+ax-1$.

(1)当$a=-1$时，求$f(x)$的最小值.

(2)证明：当$0<a<1$时，$f(x)+ax^2-4ax+1>0$恒成立.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=m+t,\\ y=2t\end{cases}$($t$为参数)，以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程是$\rho^2+8\rho\cos\theta=24$.

(1)求直线l的普通方程和曲线C的直角坐标方程；

(2)若直线l与曲线C交于A,B两点，点$P(m,0)$，且$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求$m$的值.

23.[选修4－5：不等式选讲](10 分)

设函数$f(x)=|x+2|+|x-a|$，$g(x)=x^2+\frac{4}{x^2}+2$.

(1)若$a=1$，求不等式$f(x)\geq 5$的解集；

(2)如果对任意$x_1\in\mathbf{R}$，都存在$x_2\in\mathbf{R}$，使得$f(x_1)=g(x_2)$，求a的取值范围.

高三数学试卷参考答案(文科)

1. D 【解析】本题考查复数的概念，考查运算求解能力.

由题意可得复数 z 的虚部是 -6.

2. B 【解析】本题考查集合的运算，考查运算求解能力.

由题意可得 $B=\{x|x+1>2\}=\{x|x>1\}$，则 $A\cap B=\{x|1<x<2\}$.

3. C 【解析】本题考查立体几何中的平行关系，考查空间想象能力.

根据过平面内一点和平面外一点的直线，与平面内不过该点的直线异面，可判定选项 A，B 中的直线 PQ 与直线 EF 异面；对于 C 选项，由题意可得 $PQ/\!/BC$，且 $EF/\!/BC$，则直线 PQ 与直线 EF 平行；对于 D 选项，连接 AC(图略)，若 $PQ/\!/EF$，则 $PQ/\!/$平面 $ABCD$，则 $PQ/\!/AC$，从而 $EF/\!/AC$，由图可知直线 EF 与直线 AC 相交，故直线 PQ 与直线 EF 不可能平行.

4. A 【解析】本题考查线性规划，考查数形结合的数学思想和运算求解能力.

画出可行域(图略)知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $(1,1)$ 时，z 取得最小值，且最小值是 3.

5. A 【解析】本题考查平面向量的线性运算，考查运算求解能力.

由题意可得 $\overrightarrow{AE}=3\lambda\overrightarrow{AD}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$. 因为 B,D,E 三点共线，所以 $3\lambda+\frac{4}{7}=1$，解得 $\lambda=\frac{1}{7}$.

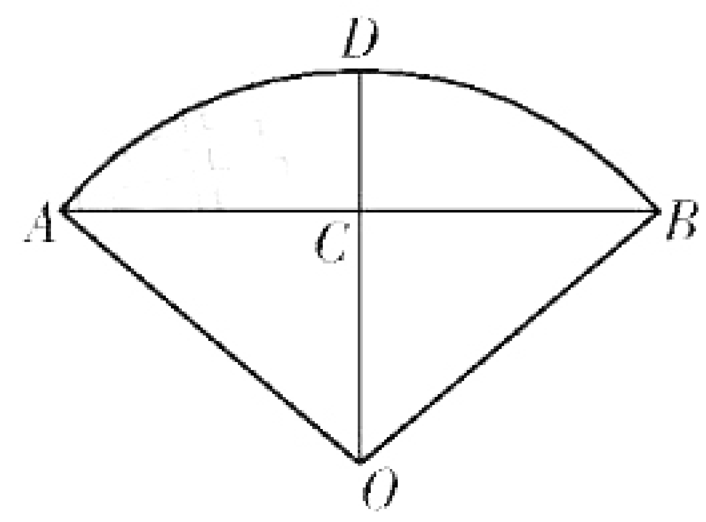
6. A 【解析】本题考查统计图表，考查数据处理能力.

由题意可知 2020 年下半年 A 车型月销量的中位数为 $\frac{30654+37944}{2}=34299$，则 A 错误；由折线图中数据可得 2020 年下半年 A 车型总销量为 198130 辆，2020 年下半年 B 车型总销量为 195307 辆，则 B 正确；由折线图可知 2020 年下半年 B 车型月销量逐月递增，则 C 正确；由折线图中数据可得 2020 年下半年 A 车型月销量的极差为 23539，2020 年下半年 B 车型月销量的极差为 24928，则 D 正确.

7. B 【解析】本题考查椭圆的离心率，考查运算求解能力.

由椭圆的对称性可得 $|AF_2|=|BF_1|$. 设 $|AF_2|=m$，则 $|AF_1|=3m$. 由椭圆的定义可知 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，则 $m+3m=2a$，解得 $m=\frac{a}{2}$，故 $|AF_1|=\frac{3a}{2}$，$|AF_2|=\frac{a}{2}$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1||AF_2|\cos\angle F_1PF_2$，即 $4c^2=\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-2\times\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7a^2}{4}$，则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{16}$，故 $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

8. B 【解析】本题考查数学文化与三角恒等变换，考查运算求解能力.



如图，作 $OC\perp AB$ 交圆弧于点 D，则 $AC=\frac{1}{2}AB=\sqrt{5}$. 由弧田面积计算公式可得 $\frac{1}{2}\times(2\sqrt{5}CD+CD^2)=\frac{2\sqrt{5}+1}{2}$，解得 $CD=1$. 因为 $OA^2=AC^2+OC^2$，所以 $OA^2=5+(OA-1)^2$，解得 $OA=3$，则 $\cos\theta=\frac{OC}{OA}=\frac{2}{3}$，故 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos\theta+1}{2}=\frac{5}{6}$.

9. A 【解析】本题考查三棱柱及其内切球，考查空间想象能力.

设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内切球的半径为 r，则 $AA_1=2r$，$(\sqrt{2}-1)r=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，即 $AA_1=2r$，$AB=(2+\sqrt{2})r$，故 $\frac{AA_1}{AB}=\frac{2r}{(2+\sqrt{2})r}=2-\sqrt{2}$.

10. B 【解析】本题考查函数的奇偶性与单调性，考查运算求解能力.

由题意可得 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数. 因为 $f(x)=$

$\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1+\frac{2}{1+x^2}$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 因为 $f(\log_a 4)-f(1)>0$，即 $f(\log_a 4)>f(1)$，所以 $-1<\log_a 4<1$. 当 $a>1$ 时，解得 $a>4$；当 $0<a<1$ 时，解得 $0<a<\frac{1}{4}$. 综上，a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{4})\cup(4,+\infty)$.

11. C 【解析】本题考查三角函数的图象与性质，考查推理论证能力与运算求解能力.

$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)=2\sin(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6})(0<\omega<6,0<\varphi<\pi)$. 由题意可得 $x_1-x_2=\frac{1}{2}T+kT=\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，则 $T=\frac{2\pi}{6k+3}(k\in\mathbf{Z})$，从而 $\omega=6k+3(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $0<\omega<6$，所以 $\omega=3$，所以 $f(x)=2\sin(3x+\varphi-\frac{\pi}{6})(0<\varphi<\pi)$，则 $f(x-\frac{\pi}{12})=2\sin(3x+\varphi-\frac{5\pi}{12})(0<\varphi<\pi)$，从而 $\varphi-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\frac{11\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{11\pi}{12}$，则 $f(x)=2\sin(3x+\frac{3\pi}{4})$，故 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{3}$，即①正确. 因为 $f(\frac{7\pi}{12})=2\sin\frac{5\pi}{2}=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 对称，则②正确. 因为 $f(-\frac{\pi}{12})=2\sin\frac{\pi}{2}=2\neq 0$，所以③错误. 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 3x+\frac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{2k\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-1$ 时，$-\frac{13\pi}{12}\leqslant x\leqslant-\frac{3\pi}{4}$，因为 $[-\pi,-\frac{3\pi}{4}]\subseteq[-\frac{13\pi}{12},-\frac{3\pi}{4}]$，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,-\frac{3\pi}{4}]$ 上单调递增，则④正确.

12. C 【解析】本题考查导数的综合应用，考查推理论证能力与运算求解能力.

由 $f(x)\geqslant g(x)$，得 $e^x-mx^2\geqslant x-1$，即 $e^x-mx^2-x+1\geqslant 0$. 因为 $x>0$，所以 $m\leqslant\frac{e^x-x+1}{x^2}$. 设 $h(x)=\frac{e^x-x+1}{x^2}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(e^x-1)x^2-2x(e^x-x+1)}{x^4}=\frac{(x-2)(e^x+1)}{x^3}$. 由 $h'(x)>0$，得 $x>2$；由 $h'(x)<0$，得 $0<x<2$. 则 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，从而 $h(x)\geqslant h(2)=\frac{e^2-1}{4}$，故 $m\leqslant\frac{e^2-1}{4}$，即 m 的最大值是 $\frac{e^2-1}{4}$.

13. $(1,3)$ 【解析】本题考查函数的定义域，考查运算求解能力.

由题意可得 $\begin{cases}3-x>0,\\ x-1>0,\end{cases}$ 解得 $1<x<3$.

14. $\frac{5}{9}$ 【解析】本题考查概率，考查数据处理能力.

由题意可得农户甲、乙分别从 A,B,C 这三种果树苗中选择一种种植的情况有 $(A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C)$，共 9 种，其中符合条件的情况有 $(A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(C,A)$，共 5 种，故所求概率 $P=\frac{5}{9}$.

15. $4\sqrt{3}-6$ 【解析】本题考查解三角形，考查运算求解能力.

因为 $c=\sqrt{3}$，$(2b+\sqrt{3})\cos A+a\cos C=0$，所以 $(2b+c)\cos A+a\cos C=0$，所以 $2\sin B\cos A=-(\sin C\cos A+\sin A\cos C)=-\sin B$，即 $\cos A=-\frac{1}{2}$，故 $A=\frac{2\pi}{3}$. 因为 AD 是角 A 的平分线，所以 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{3}$. 因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}AD\cdot c\sin\angle BAD+\frac{1}{2}AD\cdot b\sin\angle CAD$，即 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}AD\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}AD\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $(2+\sqrt{3})AD=2\sqrt{3}$，解得 $AD=4\sqrt{3}-6$.

16. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ 【解析】本题考查双曲线的方程，考查运算求解能力.

由双曲线的性质可得 $|PF_2|=b$，则 $|PD|=\frac{b}{3}$. 在 $Rt\triangle OPF_2$ 中，$\cos\angle POF_2=\sin\angle PF_2O=\frac{1}{3}$，则 $\tan\angle POF_2=\frac{b}{a}=2\sqrt{2}$. 因为 $\triangle OPF_1$ 的面积为 $4\sqrt{2}$，所以 $\frac{1}{2}ab=4\sqrt{2}$，解得 $a=2$，$b=4\sqrt{2}$，则双曲线 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$.

17. 解：(1)由题意可得调查数据中，该餐饮店菜品得分的平均数 $\bar{x}=65\times0.05+75\times0.20+85\times0.60+95\times0.15=83.5$. …………………… 2分

因此该餐饮店菜品得分的平均数为 83.5. …………………… 4分

(2)由题意可知对该餐饮店的菜品满意的顾客有 $120+30=150$ 位，其中男顾客有 100 位，

则女顾客有 $150-100=50$ 位. …………………… 5分

男顾客中对该餐饮店的菜品不满意的有 $120-100=20$ 位. …………………… 6分

女顾客中对该餐饮店的菜品不满意的有 $80-50=30$ 位. …………………… 7分

故列联表如下：

	满意	不满意	合计
男顾客	100	20	120
女顾客	50	30	80
合计	150	50	200

…………………… 8分

$K^2=\frac{200\times(100\times30-20\times50)^2}{120\times80\times150\times50}=\frac{100}{9}\approx11.111$. …………………… 11分

因为 $11.111>10.828$，所以有 99.9% 的把握认为男、女顾客对该餐饮店菜品的评价有差异. ………… 12分

评分细则：

(1)在第一问中，没有计算样本中该餐饮店菜品得分的平均数，直接得到该餐饮店菜品得分的平均数，不予扣分；

(2)在第二问中，没有计算过程，直接完成列联表，若结果正确，不予扣分，结果不正确的每空扣 1 分，最多扣 4 分；若 K^2 的值计算正确，但没有写出 $11.111>10.828$，直接得到结论，不予扣分，若 K^2 的值计算不正确，则不给分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

18. 解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由题意可得 $\begin{cases}4a_1+6d=2(a_1+3d)+2,\\ a_1+7d=2(a_1+4d)-2,\end{cases}$ …………………… 2分

解得 $a_1=d=1$. …………………… 4分

故 $a_n=1+n-1=n$. …………………… 6分

(2)由(1)可得 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$. …………………… 9分

$T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n=2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$. …………………… 10分

故 $T_n=\frac{2n}{n+1}$. …………………… 12分

评分细则：

(1)在第一问中，也可以由 $S_4=2a_4+2$，得到 $a_1=1$，再由 $a_8=2a_5-2$ 求出公差 d，从而求出 a_n；

(2)在第二问中，求出 $S_n=\frac{n(n-1)}{2}$，得 1 分，将 S_n 化成 $\frac{1}{S_n}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，得 2 分，直接求出 $T_n=\frac{2n}{n+1}$，不予扣分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

19. (1)证明：因为四边形 $BCDE$ 为平行四边形，所以 $BE/\!/CD$，$BC/\!/DE$. ………………………… 1 分

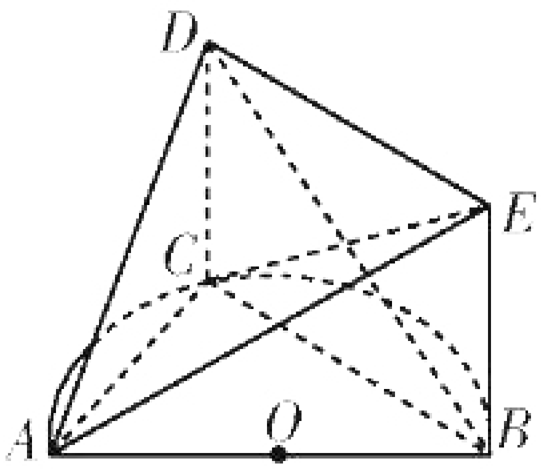
因为 $BE\perp$ 平面 ABC，所以 $CD\perp$ 平面 ABC，所以 $CD\perp BC$. ………………………… 2 分

因为 AB 是半圆 O 的直径，所以 $AC\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 ACD. ………………………… 3 分

因为 $BC/\!/DE$，所以 $DE\perp$ 平面 ACD. ………………………… 4 分

因为 $AD\subset$ 平面 ACD，所以 $AD\perp DE$. ………………………… 5 分

(2)解：因为四边形 $BCDE$ 为平行四边形，$BE\perp$ 平面 ABC，所以 $CD\perp DE$.



因为 $CD=2$，$BC=2\sqrt{3}$，所以 $\triangle CDE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. ………………………… 6 分

由(1)可得 $AC\perp$ 平面 $BCDE$，则三棱锥 $A-CDE$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. … 7 分

由(1)可得 $CD\perp$ 平面 ABC，则 $CD\perp AC$.

因为 $AC=CD=2$，所以 $AD=2\sqrt{2}$. ………………………… 8 分

因为 $DE=BC=2\sqrt{3}$，且 $AD\perp DE$，所以 $\triangle ADE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$. ………………………… 9 分

设点 C 到平面 ADE 的距离为 d，则三棱锥 $C-ADE$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{6}d}{3}$. ………………………… 10 分

因为三棱锥 $A-CDE$ 与三棱锥 $C-ADE$ 的体积相等，所以 $\frac{2\sqrt{6}d}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

解得 $d=\sqrt{2}$，即点 C 到平面 ADE 的距离为 $\sqrt{2}$. ………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第一问中，也可以得出 $AE^2=AD^2+DE^2$，再由勾股定理的逆定理证明 $AD\perp DE$；

(2)在第二问中，也可以先求出点 B 到平面 ADE 的距离，再由 $BC/\!/$ 平面 ADE，从而得到点 C 到平面 ADE 的距离等于点 B 到平面 ADE 的距离，即求出点 C 到平面 ADE 的距离；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

20. 解：(1)由题意可得 $\begin{cases}m+\frac{p}{2}=2,\\2pm=4.\end{cases}$ ………………………… 1 分

解得 $m=1$，$p=2$. ………………………… 3 分

故抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………… 4 分

(2)由题意可知 $F(1,0)$，直线 AB 与直线 DE 的斜率存在且不为 0. ………………………… 5 分

设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=ty+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 整理得 $y^2-4ty-4=0$.

则 $\Delta=16t^2+16>0$，$y_1+y_2=4t$. ………………………… 6 分

故 $|AB|=x_1+x_2+p=t(y_1+y_2)+4=4(t^2+1)$. ………………………… 7 分

同理可得 $|CD|=4[(-\frac{1}{t})^2+1]=\frac{4(t^2+1)}{t^2}$. ………………………… 9 分

假设 $|AB|+|DE|=\lambda|AB||DE|$ 成立，则 $4(t^2+1)+\frac{4(t^2+1)}{t^2}=\lambda\cdot4(t^2+1)\cdot\frac{4(t^2+1)}{t^2}$，

即 $\frac{4(t^2+1)^2}{t^2}=\frac{16\lambda(t^2+1)^2}{t^2}$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$. …………………………………………………………………… 11 分

故存在实数 $\lambda=\frac{1}{4}$，使得 $|AB|+|DE|=\lambda|AB||DE|$. …………………………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第一问中，直接列出方程组 $\begin{cases}m+\frac{p}{2}=2,\\2pm=4,\end{cases}$ 得 1 分，求出 $p=2$，得 2 分；

(2)在第二问中，没有说明直线 AB 与直线 DE 的斜率不为 0，直接设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$，扣 1 分，也可以用弦长通用公式求出 $|AB|=\sqrt{t^2+1}|y_1-y_2|=\sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{16t^2+16}=4(t^2+1)$；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

21.(1)解：当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$. …………………………………………………… 1 分

由 $f'(x)>0$，得 $x>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； …………………………………………………… 2 分

由 $f'(x)<0$，得 $x<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. …………………………………………………… 3 分

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$. ………………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：$f(x)+ax^2-4ax+1>0$，即 $e^x+ax^2-3ax>0$.

当 $x\leqslant0$ 时，因为 $a>0$，所以 $a(x^2-3x)\geqslant0$，所以 $e^x+ax^2-3ax>0$，即 $f(x)+ax^2-4ax+1>0$. …… 6 分

当 $x>0$ 时，由(1)可知 $e^x>x+1$.

要证 $e^x+ax^2-3ax>0$，只需证 $x+1\geqslant-ax^2+3ax$，即证 $(x^2-3x)a+x+1\geqslant0$. …………………… 7 分

设 $g(a)=(x^2-3x)a+x+1(0<a\leqslant1)$.

当 $x^2-3x>0$，即 $x>3$ 时，$g(a)>g(0)=x+1>1>0$，

则 $(x^2-3x)a+x+1\geqslant0$，即 $e^x+ax^2-3ax>0$ 成立； …………………………………………………… 9 分

当 $x^2-3x\leqslant0$，即 $0<x\leqslant3$ 时，$g(a)\geqslant g(1)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant0$，

则 $(x^2-3x)a+x+1\geqslant0$，即 $e^x+ax^2-3ax>0$ 成立. …………………………………………………… 11 分

故当 $0<a\leqslant1$ 时，$f(x)+ax^2-4ax+1>0$ 恒成立. ……………………………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第一问中，求出 $f(x)$ 的导函数，得 1 分，判断出 $f(x)$ 的单调性，得 2 分，求出 $f(x)$ 的最小值，得 1 分；

(2)在第二问中，证出当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)+ax^2-4ax+1>0$ 恒成立，得 2 分，构造出函数 $g(a)$，得 1 分，每种情况分析正确，各得 2 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

22.解：(1)由 $\begin{cases}x=m+t,\\y=-2t,\end{cases}$ 得 $2x+y=2m$，即 $2x+y-2m=0$. …………………………………… 2 分

由 $\rho^2+8\rho\cos\theta=24$，得 $x^2+y^2+8x=24$，即 $x^2+y^2+8x-24=0$. ……………………………… 4 分

(2)直线 l 的标准参数方程为 $\begin{cases}x=m-\frac{\sqrt5}{5}t,\\y=\frac{2\sqrt5}{5}t\end{cases}$ (t 为参数). …………………………………… 5 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的方程，可得 $t^2-\frac{2\sqrt5(m+4)}{5}t+m^2+8m-24=0$. ……………………… 6 分

$\Delta=\frac{4(m+4)^2}{5}-4(m^2+8m-24)=-\frac{16}{5}(m^2+8m-34)>0$.

设点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=\frac{2\sqrt{5}(m+4)}{5}$,$t_1t_2=m^2+8m-24$. ………………………… 7 分

因为 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$,所以 $t_1=-3t_2$,所以 $t_2=-\frac{\sqrt{5}(m+4)}{5}$. ………………………… 8 分

则 $t_1t_2=-3t_2^2=-3\times\left[-\frac{\sqrt{5}(m+4)}{5}\right]^2=m^2+8m-24$,即 $m^2+8m-9=0$. ………………………… 9 分

即 $(m+9)(m-1)=0$,解得 $m=-9$ 或 $m=1$. ………………………… 10 分

评分细则:

(1)在第一问中,直线 l 的方程写成 $y=-2x+2m$,曲线 C 的方程写成 $(x+4)^2+y^2=40$,不予扣分;

(2)在第二问中,也可以联立 $\begin{cases}y=-2x+2m,\\ x^2+y^2+8x-24=0,\end{cases}$ 得到 $5x^2-8(m-1)x+4m^2-24=0$,再根据韦达定理得到 x_1+x_2 和 x_1x_2 的值,然后由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$,得到 $x_1+3x_2=4m$,从而求出 m 的值;

(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

23. 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=|x+2|+|x-1|=\begin{cases}-2x-1, & x<-2,\\ 3, & -2\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x+1, & x>1.\end{cases}$ ………………………… 2 分

不等式 $f(x)\leqslant 5$ 等价于 $\begin{cases}x<-2,\\ -2x-1\leqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 1,\\ 3\leqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1,\\ 2x+1\leqslant 5.\end{cases}$ ………………………… 3 分

解得 $-3\leqslant x\leqslant 2$,故不等式 $f(x)\leqslant 5$ 的解集为 $[-3,2]$. ………………………… 5 分

(2)由题意可得 $f(x)=|x+2|+|x-a|\geqslant|x+2-x+a|=|a+2|$, ………………………… 6 分

$g(x)=x^2+\frac{4}{x^2}+2\geqslant 2\sqrt{4}+2=6$, ………………………… 7 分

则 $|a+2|\geqslant 6$,解得 $a\geqslant 4$ 或 $a\leqslant -8$. ………………………… 8 分

故 a 的取值范围为 $(-\infty,-8]\cup[4,+\infty)$. ………………………… 10 分

评分细则:

(1)在第一问中,没有将函数 $f(x)$ 转化为分段函数的形式,直接分类求不等式的解集,只要计算正确,不予扣分,最后结果没有写成集合或区间的形式,扣 1 分;

(2)在第二问中,最后结果没有写成集合或区间的形式,扣 1 分;

(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。