房山区 2022—2023 学年度第一学期高中学业水平调研

高二数学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知 $A(1,-1,3),B=(0,2,-1)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标是

（A）$(1,3,-4)$　（B）$(-1,3,-4)$　（C）$(1,-3,-4)$　（D）$(-1,-3,4)$

（2）已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3$，$BC=2$，$AA_1=1$，则异面直线 AB 与 CD_1 的距离是

（A）$\frac{1}{2}$　（B）1　（C）2　（D）3

（3）已知 $\vec{m}=(x,-2,5),\vec{n}=(1,4,-10)$，且 $\vec{m}\parallel\vec{n}$，则 x 的值是

（A）$-\frac{1}{2}$　（B）-2　（C）$\frac{1}{2}$　（D）2

（4）如果空间向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，且 $\vec{a}-y\vec{b}=x\vec{a}+3\vec{b}$，那么 x,y 的值分别是

（A）$x=-1,y=3$　（B）$x=-1,y=-3$

（C）$x=1,y=-3$　（D）$x=1,y=3$

（5）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是线段 BC,CD_1 的中点，则直线 A_1B 与直线 EF 的位置关系是

（A）相交　（B）平行　（C）垂直　（D）异面

（6）用 a、b、c 表示三条不同的直线，β 表示平面，给出下列命题：

①若 $a\parallel b$，$b\parallel c$，则 $a\parallel c$；②若 $a\perp b$，$b\perp c$，则 $a\perp c$；

③若 $a\parallel\beta$，$b\parallel\beta$，则 $a\parallel b$；④若 $a\perp\beta$，$b\perp\beta$，则 $a\parallel b$.

则正确命题是

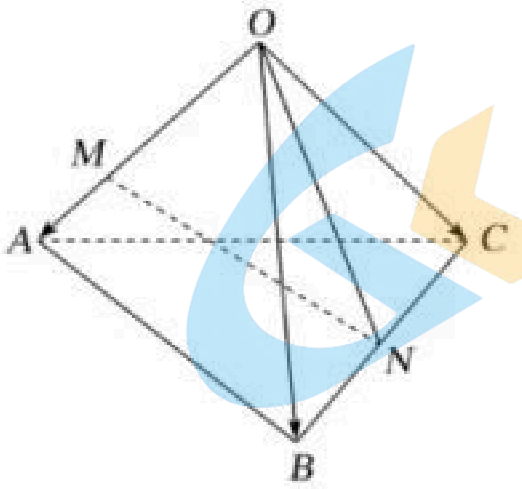
（A）①②　（B）②③　（C）①④　（D）③④

（7）设平面 α 与平面 β 相交于直线 m，直线 a 在平面 α 内，直线 b 在平面 β 内，且 $b\perp m$. 则“$\alpha\perp\beta$”是“$a\perp b$”的

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（8）如图，空间四边形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$．点 M 在 OA 上，且 $OM=2MA$，N 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$



（A）$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

（B）$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

（C）$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$

（D）$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

（9）在四面体 $ABCD$ 中，E,F 分别是 AC，BD 的中点. 若 $AB=2$，$CD=4$，$EF\perp AB$，则 EF 与 CD 所成角的度数是

（A）90°　　（B）60°　　（C）45°　　（D）30°

（10）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，点 E,F 分别为线段 B_1D_1，BC_1 上的动点，则下列结论中不正确的是

（A）$B_1D\perp$ 平面 ACD_1

（B）平面 A_1C_1B // 平面 ACD_1

（C）点 F 到平面 ACD_1 的距离为定值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

（D）直线 AE 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为定值 $\frac{1}{3}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（11）已知空间向量 $\vec{n}=(2,-1,-2)$，则 $|\vec{n}|=$_______.

（12）若向量 $\vec{m}=(-4,0,2)$，$\vec{n}=(3,-2,1)$，则 $\vec{m}\cdot\vec{n}=$_______.

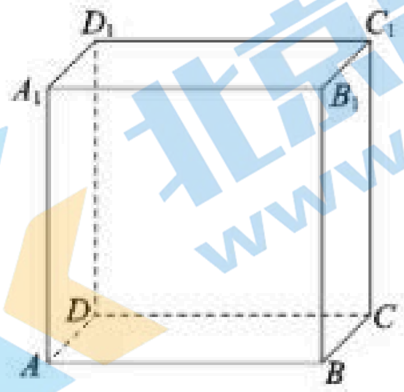
（13）设 $\vec{v_1}=(1,2,-2)$，$\vec{v_2}=(-2,3,2)$ 分别是空间两直线 l_1，l_2 的方向向量，则直线 l_1，l_2 所成角的大小为_______.

（14）如果一条直线与一个平面垂直，那么称此直线与平面构成一个“正交线面对”. 在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是_______.

（15）已知平面 α,β 和直线 m，给出条件：①$m//\alpha$；②$m\perp\alpha$；③$m\subset\alpha$；④$\alpha\perp\beta$；⑤$\alpha//\beta$.

（i）当满足条件_______时，有 $m//\beta$；（ii）当满足条件_______时，有 $m\perp\beta$.（填所选条件的序号）

（16）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，$BC=1$，点 P 在侧面 A_1ABB_1 上．若点 P 到直线 AA_1 和 CD 的距离相等，则 A_1P 的最小值是________．



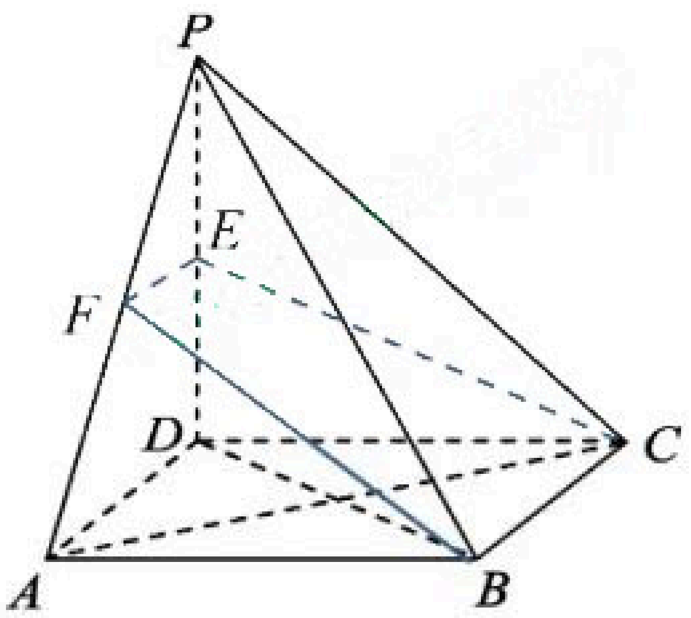
三、解答题：本大题共 5 小题，每题 14 分，共 70 分。

（17）（本小题14分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，过 BC 的平面与侧棱 PD, PA 的交点分别是 E, F．

（Ⅰ）证明：$EF \parallel BC$；

（Ⅱ）若 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，求证：$AC\perp$ 平面 PBD．

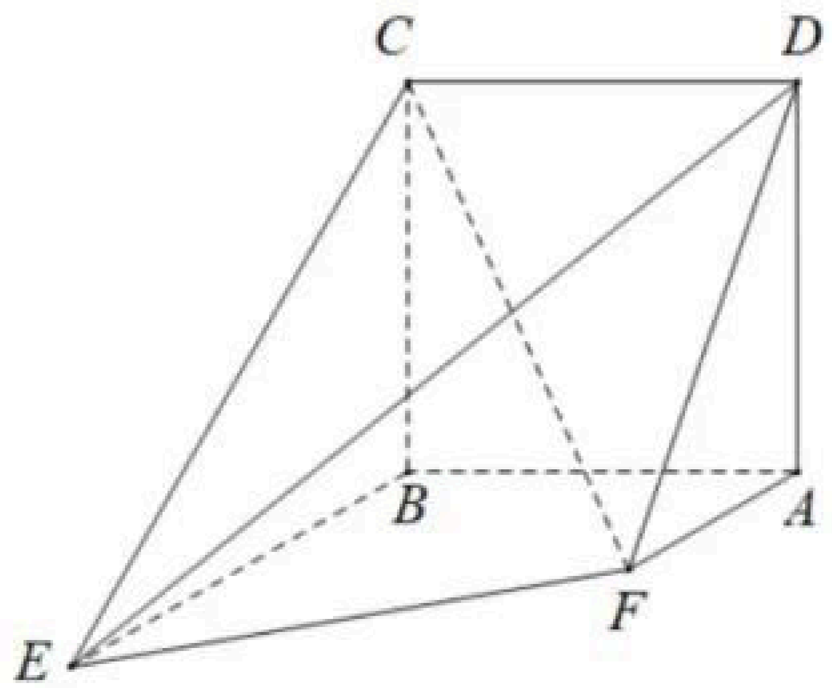


（18）（本小题14分）

在如图所示的几何体中，正方形 $ABCD$ 与梯形 $ABEF$ 所在平面相交，$EB \parallel FA$，$FA=AB=\frac{1}{2}EB$．

（Ⅰ）证明：$DF \parallel$ 平面 BCE；

（Ⅱ）若 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，试求异面直线 ED 与 CF 所成角的余弦值．

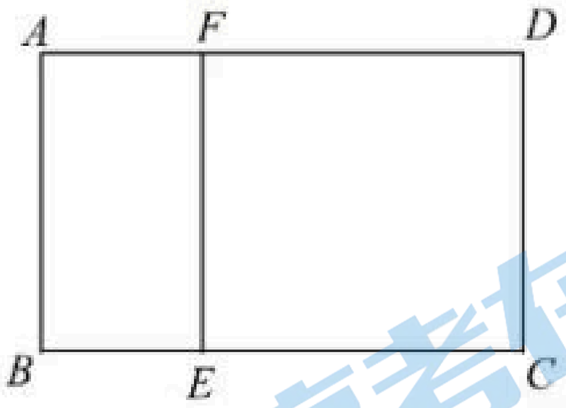


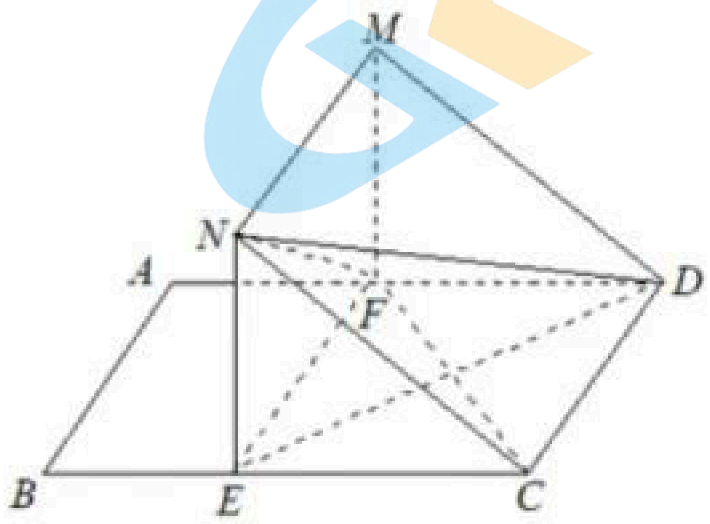
(19)（本小题14分）

如图，矩形$ABCD$中，E，F分别在线段BC和AD上，$EF \parallel AB$，将矩形$ABEF$沿EF折起．记折起后的矩形为$MNEF$，且平面$MNEF \perp$平面$ECDF$．

（Ⅰ）求证：$CD \perp MD$；

（Ⅱ）若$EF = EC$，求证：平面$NFC \perp$平面NED．



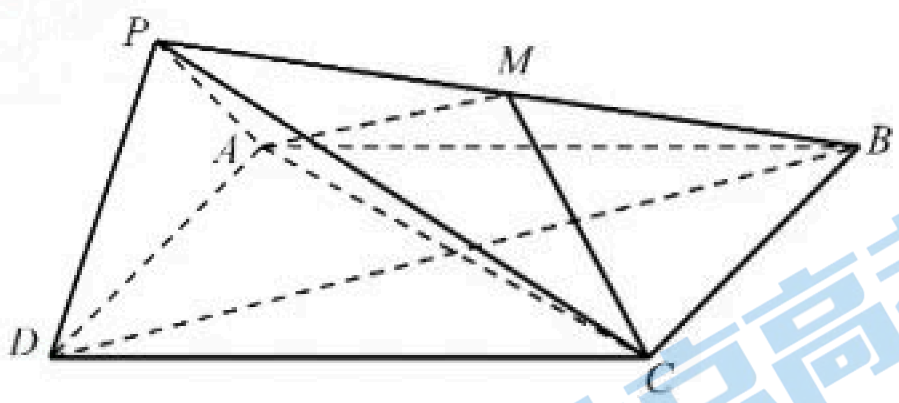


(20)（本小题14分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，平面$PAD \perp$平面$ABCD$，点M在线段PB上，$PD \parallel$平面MAC，$PA = PD = \sqrt{6}$，$AB = 4$．

(Ⅰ)求证：M为PB的中点；

(Ⅱ)求平面PAD与平面PBD所成角的大小．

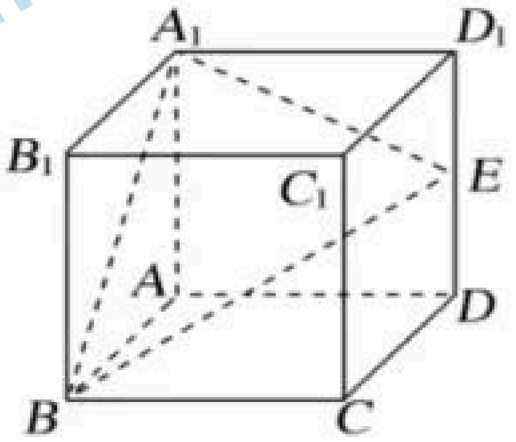


(21)（本小题14分）

如图所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是棱DD_1的中点．

(Ⅰ)求直线BE和平面ABB_1A_1所成角的正弦值；

(Ⅱ)在棱C_1D_1上是否存在一点F，使$B_1F \parallel$平面A_1BE？证明你的结论．



房山区 2022—2023 学年度第一学期高中学业水平调研

高二数学参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	(B)	(C)	(A)	(C)	(A)	(C)	(A)	(B)	(D)	(D)

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 3　(12) -10　(13) $\frac{\pi}{2}$　(14) 36　(15) ③⑤，②⑤　(16) $\sqrt{3}$

三、解答题：本大题共 **5** 小题，每题 **15** 分，共 **75** 分。

解：

(17)(Ⅰ) 证明：因为底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 $BC // AD$.

又因为 $BC \not\subset$ 平面 PAD，$AD \subset$ 平面 PAD，

所以 BC // 平面 PAD.

又因为 $BC \subset$ 平面 $BCEF$，平面$BCEF \cap$ 平面$PAD = EF$，

所以 $EF // BC$. ....6 分

(Ⅱ) 证明:

方法 1 综合法

因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，$AC \subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $PD \perp AC$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AC \perp DB$.

因为 $PD, DB \subset$ 平面 PBD，$PD \cap DB = D$，

所以 $AC \perp$ 平面 PBD. ....14 分

方法 2：向量法

(Ⅰ) 因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是正方形，

所以 DP, DA, DC 两两垂直.

以 D 为原点，建设如图所示的空间直角坐标系，因为 $PD = AB = 2$，则

$P(0,0,2), D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0)$.

直线 AC 的方向向量为 $\overrightarrow{AC} = (-2,2,0)$，$\overrightarrow{DB} = (2,2,0)$，$\overrightarrow{DP} = (0,0,2)$.

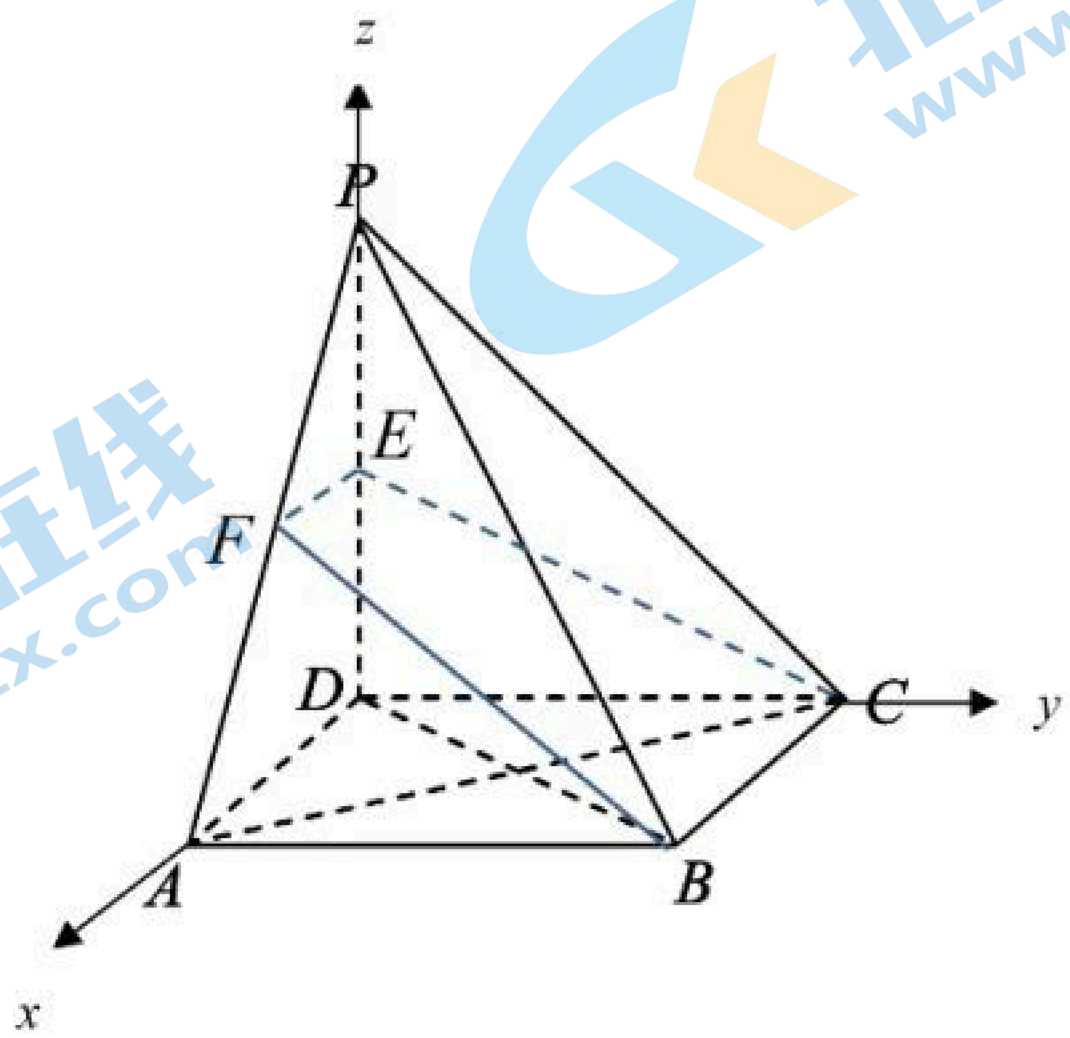
设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$，则

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \end{cases}$，$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$，令 $x = 1$，则 $y = -1$，$z = 0$.

所以 $\vec{n}=(1,-1,0)$.

因为 $\overrightarrow{AC}=-2\vec{n}$，

所以 $AC\perp$ 平面 PBD. ....14 分



(18) （Ⅰ）证明：

方法 1：

取 BE 的中点 G，并连接 GF，GC，则 $GB=\frac{1}{2}BE$.

又因为 $FA=\frac{1}{2}BE$，

所以 $FA=GB$.

又因为 $EB\parallel FA$，

所以 $FA\parallel GB$.

所以四边形 $ABGF$ 为平行四边形.

所以 $GF\parallel BA$，$GF=BA$.

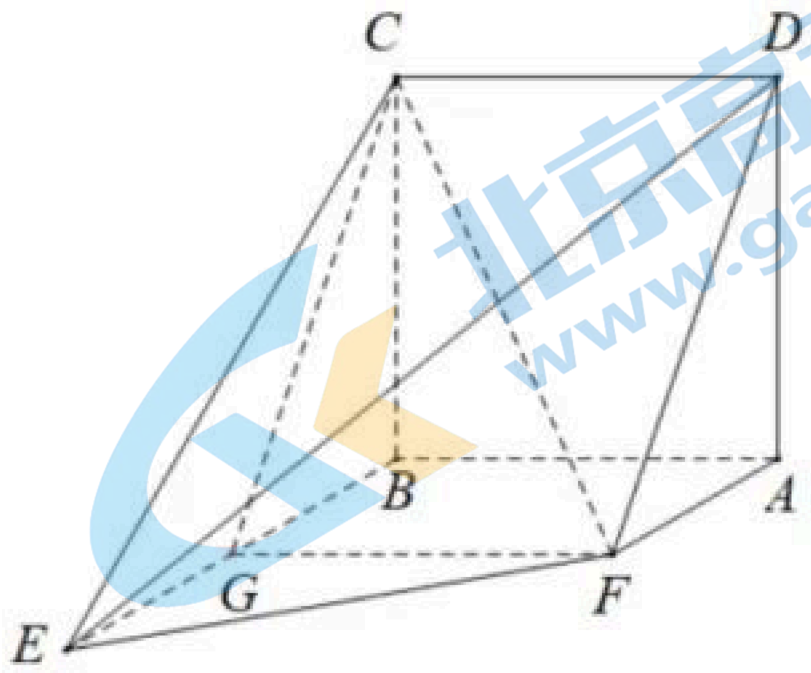
因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

所以 $BA\parallel CD$，$BA=CD$.

所以 $GF\parallel CD$，$GF=CD$.

所以四边形 $CDFG$ 为平行四边形.

所以 $DF\parallel CG$



又因为 $DF\not\subset$ 平面 BCE，$CG\subset$ 平面 BCE，

所以 $DF\parallel$ 平面 BCE. ....7 分

方法 2：

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

所以 $AD\parallel BC$.

又因为 $EB\parallel FA$，且 $AF,AD\subset$ 平面 ADF，$AF\cap AD=A$，

$EB,BC\subset$ 平面 BCE，$EB\cap BC=B$，

所以平面ADF // 平面BCE.

因为$DF \subset$平面ADF，
所以DF // 平面BCE. 7分

（II）因为$BE \perp$平面$ABCD$，$AB, BC \subset$平面$ABCD$，

所以$BE \perp AB, BE \perp BC$.

因为四边形$ABCD$为正方形，

所以$BC \perp AB$.

以B为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，设$BE = 2$，则$FA = AB = 1$.

所以$E(2,0,0), F(1,1,0), D(0,1,1), C(0,0,1)$.

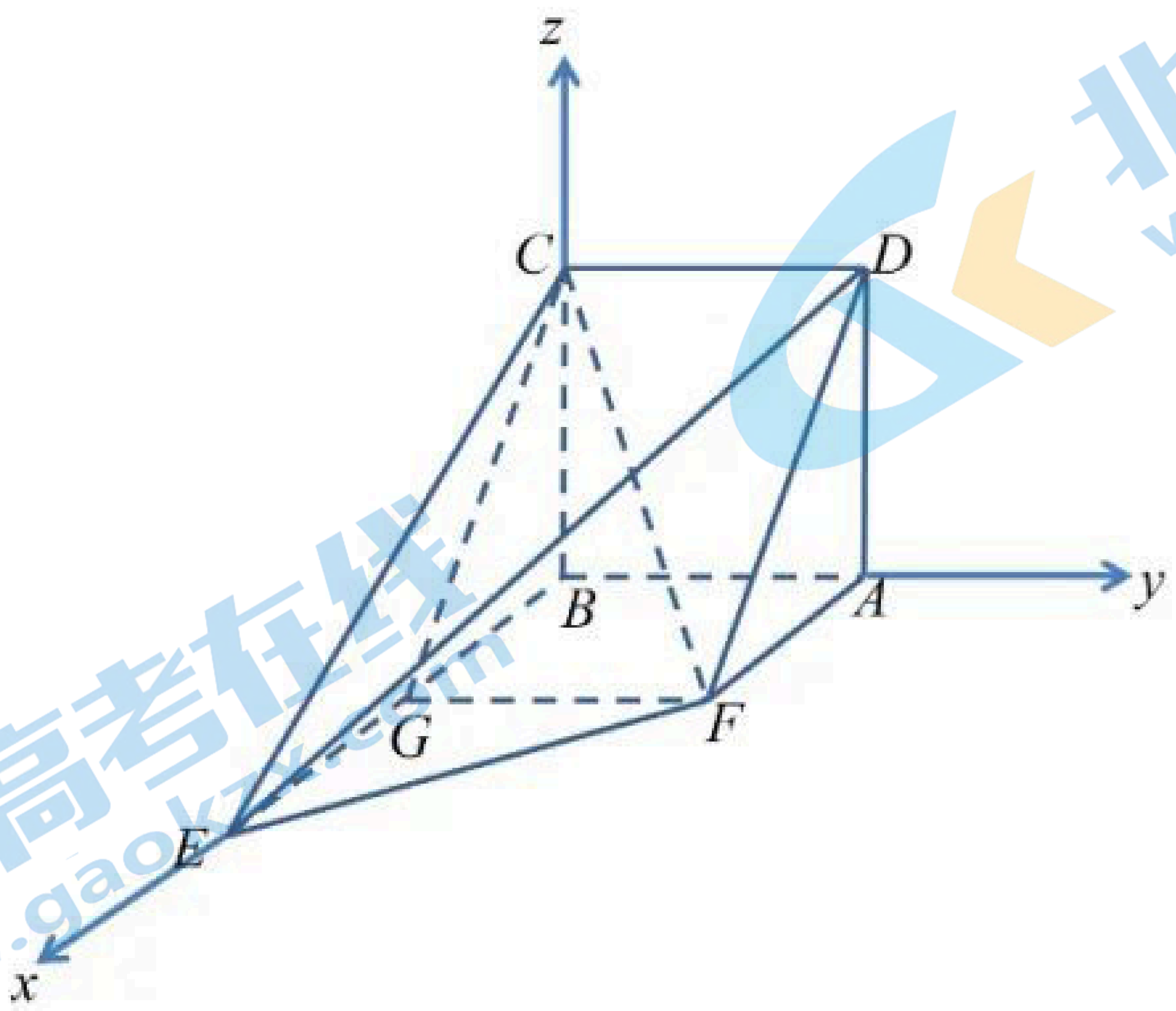
所以直线ED的方向向量为$\overrightarrow{ED} = (-2,1,1)$，

直线CF的方向向量为$\overrightarrow{CF} = (1,1,-1)$.

设异面直线ED与CF所成的角为θ，则

$$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{ED}||\overrightarrow{CF}|}\right| = \left|\frac{-2}{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以异面直线ED与CF所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$. 14分



(19)解：

（Ⅰ）因为 $ABCD$ 是矩形，且 $EF \parallel AB$，

所以四边形 $EFMN$ 是矩形.

所以 $MF \perp EF$.

又因为平面 $MNEF \perp$ 平面 $ECDF$

平面 $MNEF \cap$ 平面 $ECDF = EF$，

$MF \subset$ 平面 $MNEF$.

所以 $MF \perp$ 平面 $ECDF$.

因为 $CD \subset$ 平面 $ECDF$，

所以 $MF \perp CD$.

因为 $ABCD$ 是矩形，且 $EF \parallel AB$，

所以四边形 $ECDF$ 是矩形.

所以 $CD \perp DF$.

因为 $MF, DF \subset$ 平面 MFD， $MF \cap DF = F$，

所以 $CD \perp$ 平面 MFD.

因为 $MD \subset$ 平面 MFD，

所以 $CD \perp MD$. …………7 分

（Ⅱ）证明：因为 $ABCD$ 是矩形，且 $EF \parallel AB$，

所以四边形 $EFMN$， $ECDF$ 是矩形.

所以 $NE \parallel MF$.

由（Ⅰ）可知， $MF \perp$ 平面 $ECDF$，

所以 $NE \perp$ 平面 $ECDF$.

因为 $FC \subset$ 平面 $ECDF$，所以 $NE \perp FC$.

因为 $EC = CD$，四边形 $ECDF$ 是矩形

所以四边形 $ECDF$ 为正方形.

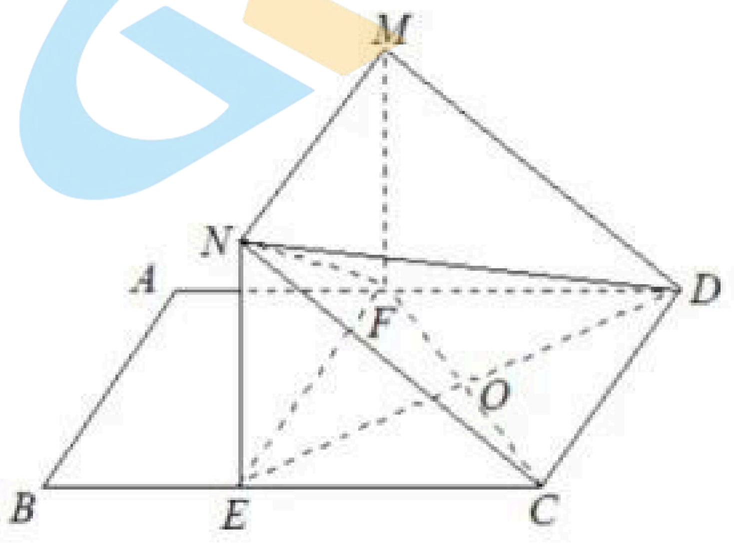
所以 $FC \perp ED$.

因为 $NE, ED \subset$ 平面 NED，

所以 $FC \perp$ 平面 NED.

因为 $FC \subset$ 平面 NFC，

所以平面 $NFC \perp$ 平面 NED. …………14 分



（20）解：

（Ⅰ）证明：设 AC, BD 交点为 E，连接 ME．

因为 PD // 平面 MAC，

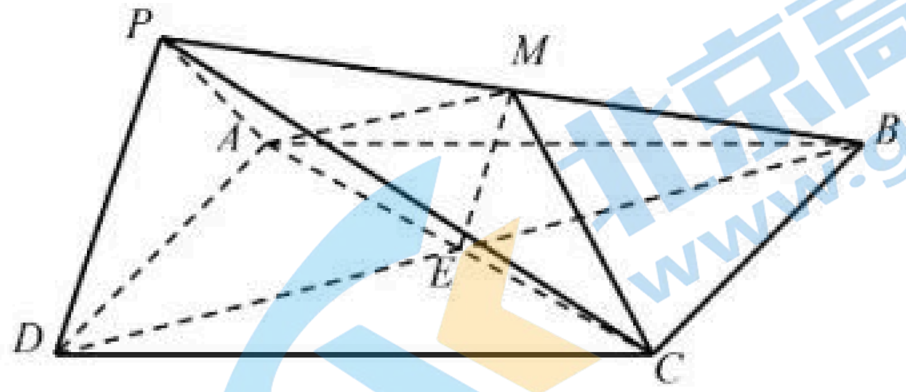
平面 $MAC \cap$ 平面 $PDB = ME$，

所以 PD // ME．

因为 $ABCD$ 是正方形，

所以 E 为 BD 的中点．

所以 M 为 PB 的中点．　　　　　　　　…………7 分



（Ⅱ）取 AD 的中点 O，连接 OP，OE．

因为 $PA = PD$，

所以 $OP \perp AD$．

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，且 $OP \subset$ 平面 PAD，

所以 $OP \perp$ 平面 $ABCD$．

因为 $OE \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OP \perp OE$．

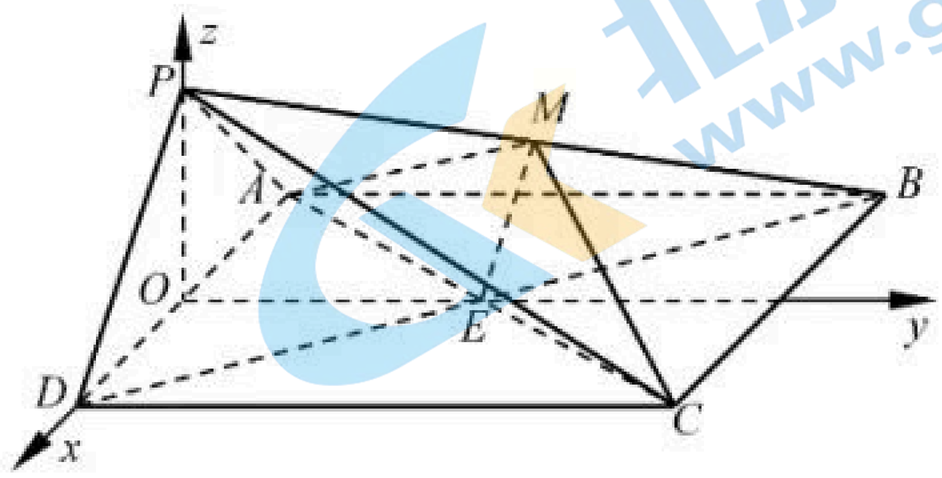
因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $OE \perp AD$．

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $P(0,0,\sqrt{2})$，$D(2,0,0)$，$B(-2,4,0)$，

$\overrightarrow{BD} = (4,-4,0)$，$\overrightarrow{PD} = (2,0,-\sqrt{2})$．

设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 4x - 4y = 0, \\ 2x - \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$



令 $x = 1$，则 $y = 1$，$z = \sqrt{2}$．

于是 $\boldsymbol{n} = (1, 1, \sqrt{2})$．

平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{p} = (0,1,0)$．

所以 $\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p} \rangle = \dfrac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|} = \dfrac{1}{2}$．

由题知平面 PAD 与平面平面 PBD 所成的角为锐角，

所以它的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$．　　　　　　　　…………14 分

(21)解：

设正方体的棱长为1，以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

(Ⅰ)依题意，得 $B(1,0,0)$，$E\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$A(0,0,0)$，$D(0,1,0)$)，

所以 $\overrightarrow{BE}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $AD\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $\overrightarrow{AD}$ 是平面 ABB_1A_1 的一个法向量.

设直线 BE 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AD}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}\right|=\dfrac{1}{\frac{3}{2}\times 1}=\dfrac{2}{3}$.

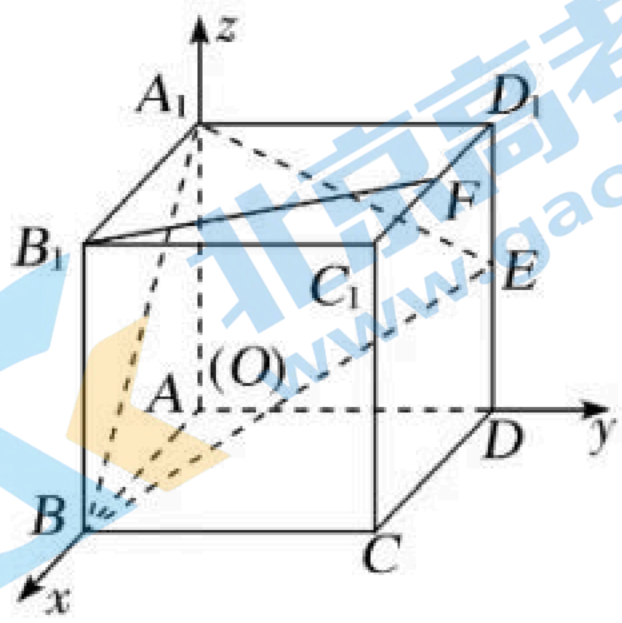
故直线 BE 与平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值为 $\frac{2}{3}$ 6分

(Ⅱ)在棱 C_1D_1 上存在点 F，使 B_1F // 平面 A_1BE .

证明如下：依题意，得 $A_1(0,0,1)$，$\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 A_1BE 的一个法向量，则

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得



所以 $x=z, y=\frac{1}{2}z$. 取 $z=2$，得 $\vec{n}=(2,1,2)$.

设 F 是棱 C_1D_1 上的点，则 $F(t,1,1),(0\leqslant t\leqslant 1)$.

又 $B_1=(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{B_1F}=(t-1,1,0)$.

而 $B_1F\not\subset$ 平面 A_1BE，

所以 B_1F // 平面 $A_1BE\Leftrightarrow\overrightarrow{B_1F}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow(t-1,1,0)\cdot(2,1,2)=0$

$\Leftrightarrow 2(t-1)+1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F$ 为 C_1D_1 的中点.

这说明在棱 C_1D_1 上存在点 F （C_1D_1 的中点），

使 B_1F // 平面 A_1BE 14分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。