2023 北京东城高三一模
数　学

2023.3

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\mid x^2-2<0\}$，且 $a\in A$，则 a 可以为

（A）-2　　（B）-1

（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\sqrt{2}$

（2）在复平面内，复数 $\dfrac{z}{\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标是 $(3,-1)$，则 $z=$

（A）$1+3\mathrm{i}$　　（B）$3+\mathrm{i}$

（C）$-3+\mathrm{i}$　　（D）$-1-3\mathrm{i}$

（3）抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为

（A）$x=1$　　（B）$x=-1$

（C）$y=1$　　（D）$y=-1$

（4）已知 $x>0$，则 $x-4+\dfrac{4}{x}$ 的最小值为

（A）-2　　（B）0

（C）1　　（D）$2\sqrt{2}$

（5）在△ABC 中，$a=2\sqrt{6}$，$b=2c$，$\cos A=-\dfrac{1}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=$

（A）$\dfrac{3}{2}\sqrt{15}$　　（B）4

（C）$\sqrt{15}$　　（D）$2\sqrt{15}$

（6）设 m,n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，且 $m\subset\alpha$，$\alpha\parallel\beta$，则“$m\perp n$”是“$n\perp\beta$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）过坐标原点作曲线 $y=\mathrm{e}^{x-2}+1$ 的切线，则切线方程为

（A）$y=x$　　（B）$y=2x$

（C）$y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x$　　（D）$y=\mathrm{e}x$

（8）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，P 为正方形 $ABCD$ 内部（不含边界）的动点，且满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DP}$ 的取值范围是

（A）$(0,8]$　　（B）$[0,8)$

（C）$(0,4]$　　（D）$[0,4)$

（9）已知 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 成等比数列，且 1 和 4 为其中的两项，则 a_5 的最小值为

（A）-64　　（B）-8

（C）$\frac{1}{64}$　　（D）$\frac{1}{8}$

（10）恩格斯曾经把对数的发明、解析几何的创始和微积分的建立称为十七世纪数学的三大成就．其中对数的发明，曾被十八世纪法国大数学家拉普拉斯评价为“用缩短计算时间延长了天文学家的寿命”．已知正整数 N 的70次方是一个83位数，由下面表格中部分对数的近似值（精确到0.001），可得 N 的值为

M	2	3	7	11	13
$\lg M$	0.301	0.477	0.845	1.041	1.114

（A）13　　（B）14

（C）15　　（D）16

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题 共5小题，每小题5分，共25分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\ln x$ 的定义域是_______．

（12）在 $(x+\frac{a}{x})^6$ 的展开式中，x^2 的系数为60，则实数 $a=$_______．

（13）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，且与直线 $y=\pm 2x$ 没有公共点，则双曲线的方程可以为_______．

（14）已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，$a_2=3a_1$，S_n 为其前 n 项和．若 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，则 $a_1=$_______，$a_n=$_______．

（15）已知函数 $f(x)=\lambda\sin(\frac{\pi}{2}x+\varphi)\ (\lambda>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图1所示，A,B 分别为图象的最高点和最低点，过 A 作 x 轴的垂线，交 x 轴于点 A'，点 C 为该部分图象与 x 轴的交点．将绘有该图象的纸片沿 x 轴折成直二面角，如图2所示，此时 $|AB|=\sqrt{10}$，则 $\lambda=$_______．

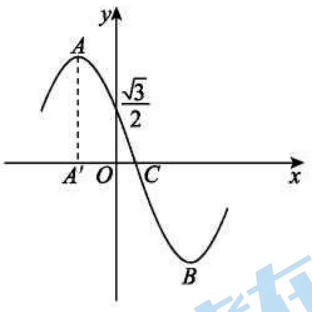


图1

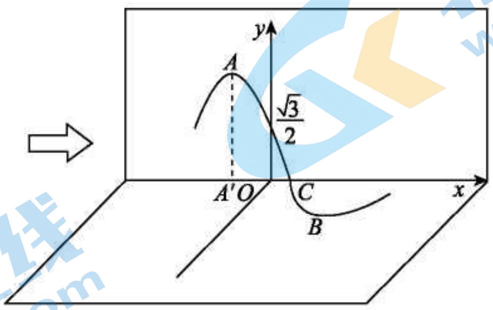


图2

给出下列四个结论：

①$\varphi=\frac{\pi}{3}$；

②图2中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5$；

③图2中，过线段 AB 的中点且与 AB 垂直的平面与 x 轴交于点 C；

④图2中，S 是△$A'BC$ 及其内部的点构成的集合.设集合 $T=\{Q\in S\,\|AQ|\le 2\}$，则 T 表示的区域

的面积大于 $\frac{\pi}{4}$.

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）若 $x=\frac{\pi}{6}$ 是函数 $y=f(x)-f(x+\varphi)\ (\varphi>0)$ 的一个零点，求 φ 的最小值.

（17）（本小题 13 分）

甲、乙两名同学积极参与体育锻炼，对同一体育项目，在一段时间内甲进行了 6 次测试，乙进行了 7 次测试．每次测试满分均为 100 分，达到 85 分及以上为优秀，两位同学的测试成绩如下表：

次数 / 学生	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次
甲	80	78	82	86	95	93	–
乙	76	81	80	85	89	96	94

（Ⅰ）从甲、乙两名同学共进行的 13 次测试中随机选取一次，求该次测试成绩超过 90 分的概率;

（Ⅱ）从甲同学进行的 6 次测试中随机选取 4 次，设 X 表示这 4 次测试成绩达到优秀的次数，求 X 的分布列及数学期望 EX；

（Ⅲ）从乙同学进行的 7 次测试中随机选取 3 次，设 Y 表示这 3 次测试成绩达到优秀的次数，试判断数学期望 EY 与（Ⅱ）中 EX 的大小.（结论不要求证明）

（18）（本小题 15 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=2$，BD_1 和 B_1D 交于点 E，F 为 AB 的中点.

（Ⅰ）求证：$EF\,//$ 平面 ADD_1A_1；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求

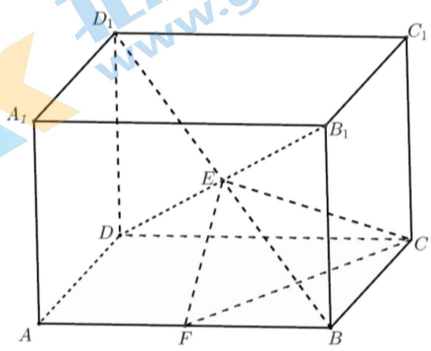
（i）平面 CEF 与平面 BCE 的夹角的余弦值;

（ii）点 A 到平面 CEF 的距离.

条件①：$CE\perp B_1D$；

条件②：B_1D 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.



（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ax^2-x\ln x$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）设直线 l 为曲线 $y=f(x)$ 的切线，当 $a\geq\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，记直线 l 的斜率的最小值为 $g(a)$，求 $g(a)$ 的最小值；

（Ⅲ）当 $a>0$ 时，设 $M=\{y|y=f'(x),x\in(\frac{1}{2a},\frac{3}{4a})\}$，$N=\{y|y=f'(x),x\in(\frac{1}{4a},\frac{1}{2a})\}$，求证：$M\subsetneqq N$.

（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(-\sqrt{3},1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 分别与 x 轴交于点 M,N.

设椭圆的左顶点为 D，求 $\frac{|MD|}{|MN|}$ 的值.

（21）（本小题 15 分）

已知数表 $A_{2n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$ 中的项 $a_{ij}\,(i=1,2;\ j=1,2,\cdots,n)$ 互不相同，且满足下列条件：

① $a_{ij}\in\{1,2,\cdots,2n\}$；

② $(-1)^{m+1}(a_{1m}-a_{2m})<0(m=1,2,\cdots,n)$.

则称这样的数表 A_{2n} 具有性质 **P**.

（Ⅰ）若数表 A_{22} 具有性质 **P**，且 $a_{12}=4$，写出所有满足条件的数表 A_{22}，并求出 $a_{11}+a_{12}$ 的值；

（Ⅱ）对于具有性质 **P** 的数表 A_{2n}，当 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}$ 取最大值时，求证：存在正整数 $k\ (1\leq k\leq n)$，使得 $a_{1k}=2n$；

（Ⅲ）对于具有性质 **P** 的数表 A_{2n}，当 n 为偶数时，求 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}$ 的最大值.

参考答案及评分标准　　2023.3

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　（2）A　（3）D　（4）B　（5）C

（6）B　（7）A　（8）D　（9）B　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$(0,1]$　（12）± 2

（13）$x^2-\frac{y^2}{4}=1$（答案不唯一）　（14）$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}$

（15）$\sqrt{3}$　②③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{3})=\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π　　　　………………6 分

（Ⅱ）由题设，$y=f(x)-f(x+\varphi)=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6}+\varphi)$，由 $x=\frac{\pi}{6}$ 是该函数零点可知，

$\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\varphi)=0$，即 $\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

因为 $\varphi>0$，所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.　　　………13 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）从甲、乙两名同学共进行的 13 次测试中随机选取一次，有 13 种等可能的情形，其中有 4 次成绩超过 90 分．则从甲、乙两名同学共进行的 13 次测试中随机选取一次，该次成绩超过 90 分的概率为 $\frac{4}{13}$．…3 分

（Ⅱ）随机变量 X 的所有可能取值为 1，2，3.

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^3}{C_6^4}=\frac{1}{5}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\dfrac{3}{5}$；

$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_3^1}{C_6^4}=\dfrac{1}{5}$.

则随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

故随机变量 X 的数学期望 $EX=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$. ………11 分

（III）$EX>EY$. ………13 分

（18）（共 15 分）

解：（I）连接 AD_1，B_1D_1，BD.

因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1 \parallel DD_1$ 且 $BB_1=DD_1$，

所以四边形 BB_1D_1D 为平行四边形.

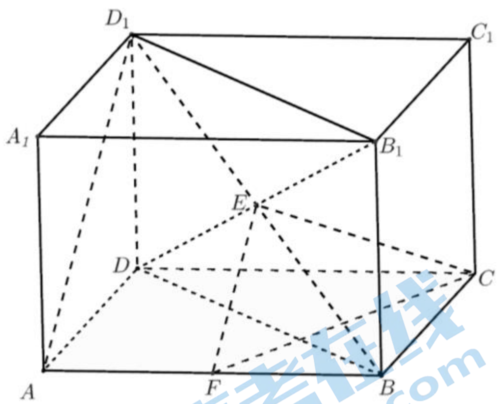
所以 E 为 BD_1 的中点，

在△ ABD_1 中，因为 E，F 分别为 BD_1 和 AB 的中点，

所以 $EF \parallel AD_1$.

因为 $EF\not\subset$ 平面 ADD_1A_1，$AD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1. ………………6 分



（II）选条件①：$CE\perp B_1D$.

(ⅰ)连接 B_1C.

因为长方体中 $AA_1=AD=2$，所以 $B_1C=2\sqrt{2}$.

在△ CBD_1 中，因为 E 为 B_1D 的中点，$CE\perp B_1D$，

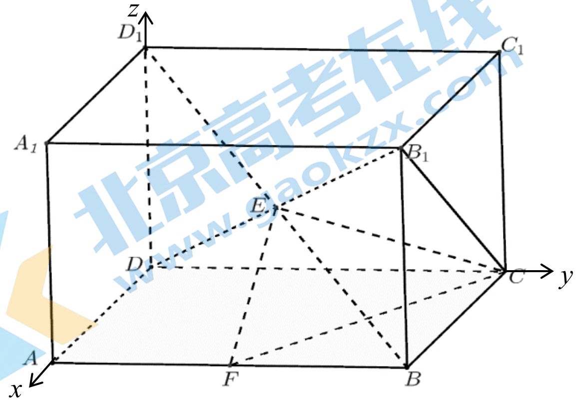
所以 $CD=B_1C=2\sqrt{2}$.

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，因为长方体中 $A_1A=AD=2$，$CD=2\sqrt{2}$，

则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2\sqrt{2},0)$，$B(2,2\sqrt{2},0)$，$F(2,\sqrt{2},0)$，$B_1(2,2\sqrt{2},2)$，$E(1,\sqrt{2},1)$.

所以 $\overrightarrow{CE}=(1,-\sqrt{2},1)$，$\overrightarrow{CF}=(2,-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$.

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，



则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1-\sqrt{2}y_1+z_1=0,\\ 2x_1-\sqrt{2}y_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=\sqrt{2}$， $z_1=1$，可得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},1)$.

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2-\sqrt{2}y_2+z_2=0,\\ 2x_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=1$，则 $x_2=0$， $z_2=\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{2})$.

设平面 CEF 与平面 BCE 的夹角为 θ ，

则 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以平面 CEF 与平面 BCE 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(ⅱ)因为 $\overrightarrow{AF}=(0,\sqrt{2},0)$，

所以点 A 到平面 CEF 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=1$. ··················15 分

选条件②： B_1D 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

连接 B_1C .

因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $CD\perp$ 平面 BCC_1B_1， $B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $CD\perp B_1C$.

所以 $\angle DB_1C$ 为直线 B_1D 与平面 BCC_1B_1 所成角，即 $\angle DB_1C=\dfrac{\pi}{4}$.

所以 $\triangle DB_1C$ 为等腰直角三角形.

因为长方体中 $AA_1=AD=2$，所以 $B_1C=2\sqrt{2}$.

所以 $CD=B_1C=2\sqrt{2}$.

以下同选条件①.

（19）（共 15 分）

解：（I）当 $a=0$ 时， $f(x)=-x\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=-\ln x-1$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

当 $x\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$．　　　　……………… 5 分

（II）令 $h(x)=f'(x)=2ax-\ln x-1$，

则 $h'(x)=2a-\frac{1}{x}=\frac{2ax-1}{x}$．

当 $a\geq\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，令 $h'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2a}$．

当 $x\in(0,\frac{1}{2a})$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\frac{1}{2a},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

所以当 $x=\frac{1}{2a}$ 时，$h(x)$ 最小值为 $g(a)=h(\frac{1}{2a})=\ln(2a)$．

当 $a\geq\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$\ln(2a)$ 的最小值为 1，

所以 $g(a)$ 的最小值为1．　　　　……………… 11 分

（III）由（II）知 $f'(x)$ 在 $[\frac{1}{4a},\frac{1}{2a}]$ 上单调递减，在 $[\frac{1}{2a},\frac{3}{4a}]$ 上单调递增，

又 $f'(\frac{3}{4a})=\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{4a}$，$f'(\frac{1}{4a})=-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{4a}$，

所以 $M=(\ln(2a),\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{4a})$，$N=(\ln(2a),-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{4a})$，

$$(-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{4a})-(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{4a})=\ln\frac{3}{4a}-\ln\frac{1}{4a}-1=\ln 3-1>0,$$

所以 $M\subsetneqq N$．　　　　……………… 15 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题设，得 $\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{3}$．

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$．　　　　……………… 5 分

（Ⅱ）直线 BC 的方程为 $y-1=k(x+\sqrt{3})$．

由 $\begin{cases} y-1=k(x+\sqrt{3}), \\ x^2+3y^2=3 \end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2+(6\sqrt{3}k^2+6k)x+9k^2+6\sqrt{3}k=0$．

由 $\varDelta=(6\sqrt{3}k^2+6k)^2-4\times(3k^2+1)\times(9k^2+6\sqrt{3}k)>0$，得 $k<0$．

设 $B(x_1,y_1),\ C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{6\sqrt{3}k^2+6k}{3k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{9k^2+6\sqrt{3}k}{3k^2+1}$.

直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{y_1-1}{x_1}x+1$.

令 $y=0$，得点 M 的横坐标为 $x_M=-\dfrac{x_1}{y_1-1}=-\dfrac{x_1}{k(x_1+\sqrt{3})}$.

同理可得点 N 的横坐标为 $x_N=-\dfrac{x_2}{y_2-1}=-\dfrac{x_2}{k(x_2+\sqrt{3})}$.

$$
\begin{aligned}
x_M+x_N&=-\frac{1}{k}\left(\frac{x_1}{x_1+\sqrt{3}}+\frac{x_2}{x_2+\sqrt{3}}\right)\\
&=-\frac{1}{k}\cdot\frac{2x_1x_2+\sqrt{3}(x_1+x_2)}{x_1x_2+\sqrt{3}(x_1+x_2)+3}\\
&=-\frac{1}{k}\cdot\frac{2\left(\frac{9k^2+6\sqrt{3}k}{3k^2+1}\right)+\sqrt{3}\left(-\frac{6\sqrt{3}k^2+6k}{3k^2+1}\right)}{\frac{9k^2+6\sqrt{3}k}{3k^2+1}+\sqrt{3}\left(-\frac{6\sqrt{3}k^2+6k}{3k^2+1}\right)+3}\\
&=-\frac{1}{k}\cdot\frac{6\sqrt{3}k}{3}=-2\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

因为点 D 坐标为 $(-\sqrt{3},0)$，则点 D 为线段 MN 的中点，

所以 $\dfrac{|MD|}{|MN|}=\dfrac{1}{2}$. ··················14 分

(21)（共 15 分）

解：（I）满足条件的数表 A_{22} 为 $\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&4\\3&1\end{pmatrix}$，所以 $a_{11}+a_{12}$ 的值分别为 5，5，6. ·············5 分

（II）若当 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}$ 取最大值时，存在 $1\le j\le n$，使得 $a_{2j}=2n$.

由数表 A_{2n} 具有性质 **P** 可得 j 为奇数，

不妨设此时数表为 $A_{2n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\2n&a_{22}&\cdots&a_{2n}\end{pmatrix}$.

①若存在 a_{1k} (k为偶数,$1\le k\le n$)，使得 $a_{1k}>a_{11}$，交换 a_{1k} 和 $2n$ 的位置，所得到的新数表也具有性质 **P**，

调整后数表第一行和大于原数表第一行和，与题设矛盾，所以存在 $1\le i\le n$，使得 $a_{1i}=2n$.

②若对任意的 a_{1k} (k为偶数,$1\le k\le n$)，都有 $a_{1k}<a_{11}$，交换 a_{12} 和 a_{11} 的位置，所得到的新数表也具有性质 **P**，此时转化为①的情况.

综上可知，存在正整数 $k(1\le k\le n)$，使得 $a_{1k}=2n$. ··················10 分

（III）当 n 为偶数时，令 $n=2k$，对任意具有性质 **P** 数表 $A_{2n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\end{pmatrix}$，

一方面，$(a_{12}-a_{22})+(a_{14}-a_{24})+\cdots+(a_{1,2k}-a_{2,2k})\leqslant(4k-1)+(4k-3)+\cdots+(2k+1)$，

因此 $(a_{12}+a_{14}+\cdots+a_{1,2k})\leqslant(a_{22}+a_{24}+\cdots+a_{2,2k})+3k^2$. ①

另一方面，$a_{2i}-a_{1i}\geqslant1(i=1,3,5,\cdots,\ n-1)$，

因此 $(a_{11}+a_{13}+\cdots+a_{1,2k-1})\leqslant(a_{21}+a_{23}+\cdots+a_{2,2k-1})-k$. ②

记 $S_1=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1,2n}$，$S_2=a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2,2n}$.

由①+②得 $S_1 \leqslant S_2 + 3k^2 - k$.

又 $S_1 + S_2 = 8k^2 + 2k$ ，可得 $S_1 \leqslant \dfrac{11k^2 + k}{2}$.

构造数表

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} k+1 & 4k & k+3 & 4k-1 & k+5 & 4k-2 & k+7 & 4k-3 & \cdots & 3k+2 & 3k-1 & 3k+1 \\ k+2 & 1 & k+4 & 2 & k+6 & 3 & k+8 & 4 & \cdots & k-1 & 3k & k \end{pmatrix}$$

可知数表 A_{2n} 具有性质 **P**，且 $S_1 = \dfrac{11k^2 + k}{2} = \dfrac{11n^2 + 2n}{8}$.

综上可知，当 n 为偶数时，$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}$ 的最大值为 $\dfrac{11n^2 + 2n}{8}$. ………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。