北京十二中 2023-2024 学年第一学期高二年级期中考试

数　　学

2023.11

命题人：陈立刚 蒋海燕　　复核人：蒋海燕

本试卷共 4 页，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分 选择题（共 60 分）

一、选择题。本题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分。在每题给的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1.直线 $y=-2x+1$ 的一个方向向量是

A. $(1,-2)$　　B. $(2,-1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,1)$

2.已知圆心为 $(1,2)$，且过原点的圆的方程为

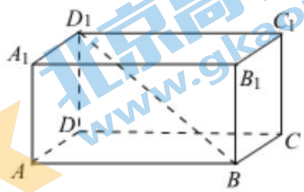
A. $(x-1)^2+(y-2)^2=\sqrt{5}$　　B. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2=\sqrt{5}$　　D. $(x+1)^2+(y+2)^2=5$

3.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA_1}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 x，y 的值是

A. $x=1$，$y=1$　　B. $x=\frac{1}{2}$，$y=1$　　C. $x=1$，$y=\frac{1}{2}$　　D. $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$

4.如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $AD=AA_1=1$，$AB=2$，则 $\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AD}$ 等于



A. 1　　B. 2

C. 3　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

5.“$a=1$”是“直线 $ax+(a-1)y-1=0$ 与直线 $(a-1)x+ay+1=0$ 垂直”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6.下面结论正确的个数是

①已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 是不共面的三个向量，则 $\vec{c}$，$\vec{a}+\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{c}$ 能构成空间的一个基底；

②任意向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$（$\vec{a}\neq\vec{0}$）满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则 $\vec{b}=\vec{c}$；

③已知向量 $\vec{a}=(1,1,x)$，$\vec{b}=(-3,x,9)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则 $x=-3$.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

7.已知圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$，过直线 l：$3x+4y-5=0$ 上任意一点作圆 C 的切线，则切线长的最小值为

A. 4　　B. $\sqrt{15}$　　C. $\sqrt{17}$　　D. 5

8.已知 $A(2,-3)$，$B(-3,-2)$，直线 l 过点 $P(1,1)$ 且与射线 AB 相交，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是

A. $k\leqslant -4$ 或 $k\geqslant -\frac{1}{5}$　　B. $-4\leqslant k\leqslant \frac{3}{4}$　　C. $-4\leqslant k<-\frac{1}{5}$　　D. $k\leqslant -4$ 或 $k>-\frac{1}{5}$

9.已知直线 l_1：$x-my+1=0$ 过定点 A，直线 l_2：$mx+y-m+3=0$ 过定点 B，l_1 与 l_2 相交于点 P，则 $|PA|^2+|PB|^2=$

A. 10　　B. 12　　C. 13　　D. 20

10.已知空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，$\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$，点 Q 在直线 OP 上运动，则当 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 取得最小值时，点 Q 的坐标为

A. $(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{3})$　　B. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$　　C. $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3})$　　D. $(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2})$

11.已知 $A(1,0)$，$B(4,0)$，$D(0,3)$，动点 P 满足 $|PB|=2|PA|$，则 $2|PD|+|PB|$ 的最小值是

A. 8　　B. $\sqrt{10}$　　C. 10　　D. $2\sqrt{10}$

12.在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，若有且只有一个平面 α，使点 $A(2,2,2)$ 到 α 的距离为 1，且点 $B(m,0,0)$ 到 α 的距离为 4，则 m 的值为

A. 2　　B. 1 或 3　　C. 0 或 4　　D. $2-\sqrt{17}$ 或 $2+\sqrt{17}$

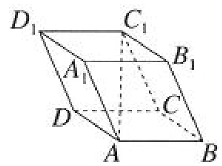
第二部分 非选择题（共 90 分）

二、填空题。本题共 6 小题，每题 5 分，共 30 分。

13.直线 $2x-y-1=0$ 与 $2x-y+1=0$ 之间的距离是______.

14.下面三条直线 l_1：$3x+y=4$，l_2：$x-y=0$；l_3：$2x-my=4$ 不能构成三角形，请给出一个符合题意的 m 的值______.

15.如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\angle DAA_1=60°$，$\angle BAD=\angle BAA_1=120°$，$AB=AD=AA_1=1$，则线段 AC_1 的长度是________.



16.已知空间向量 $\vec{a}=(-1,2,4)$，$\vec{b}=(1,-4,2)$，$\vec{c}=(0,4,x),(x\in R)$.

（1）若 $\vec{a}\perp\vec{c}$，则 $x=$______；（2）若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，则 $x=$________.

17.已知空间中三点 $A(1,0,0)$，$B(2,1,-1)$，$C(0,-1,2)$，那么点 C 到直线 AB 的距离为________.

18.已知点 $P(2,0)$ 和圆 O： $x^2+y^2=36$ 上两个不同的点 M， N，满足 $\angle MPN=90°$，Q 是弦 MN 的中点，给出下列三个结论：

①$|MP|$ 的最小值为 4；

②点 Q 的轨迹是一个圆；

③若点 $A(5,3)$，点 $B(5,5)$，则存在点 Q，使得 $\angle AQB=90°$.

其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题。本题共 5 小题，共 60 分。

19.（11 分）已知△ABC 三边所在直线方程分别为

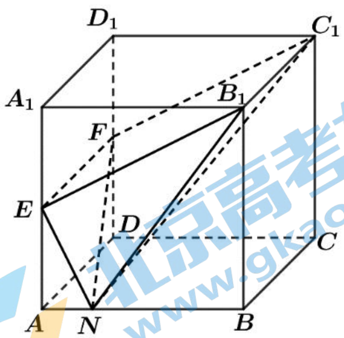
AB： $x+y+1=0$，BC： $x-y+3=0$，CA： $2x+y-2=0$.

（Ⅰ）求点 B 坐标；

（Ⅱ）求与点 B 关于直线 CA 对称的点 D 的坐标；

（Ⅲ）求在平面 ABC 内，过点 B 且与直线 CA 无公共点的直线方程.

20.（12 分）《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，如图，已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，E 为 AA_1 的中点，F 为 DD_1 的中点，$AN=\frac{1}{3}NB$.



（Ⅰ）证明：四棱锥 $N-EFC_1B_1$ 为阳马；

（Ⅱ）求点 B_1 到平面 NEF 的距离.

21.（13 分）已知点 $P(0,-2)$ 及圆 C： $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

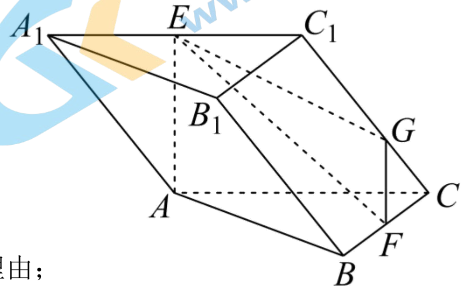
（Ⅰ）求圆心 C 的坐标及半径 r 的大小；

（Ⅱ）设过点P的直线 l_1 与圆 C 交于 M，N 两点，当 $|MN|=8$ 时，求以线段 MN 为直径的圆 C_1 的方程；

（Ⅲ）设直线 $ax-y+3=0$ 与圆 C 交于 A，B 两点，是否存在实数 a，使得过点 $Q(1,0)$ 的直线 l_2 垂直平分弦 AB？若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

22.（13 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是边长为 2 的正三角形，侧面 ACC_1A_1 是菱形，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，E，F 分别是棱 A_1C_1，BC 的中点，G 是棱 CC_1 上靠近点 C 的三等分点.

（Ⅰ）证明：$EF\parallel$ 平面 ABB_1A_1；



（Ⅱ）从①三棱锥 C_1-ABC 的体积为 1；

②直线 C_1C 与底面 ABC 所成的角为 60°；

③异面直线 BB_1 与 AE 所成的角为 30°.

这三个条件中选择一个作为已知.

（ⅰ）判断点 A 是否在平面 EFG 内，并说明理由；

（ⅱ）求平面 ACC_1 与平面 EFG 夹角的余弦值.

23.（11 分）记集合 $R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in \mathrm{R},i=1,2,\cdots,n\}(n\geq 2,n\in \mathrm{N})$，对于 $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n,B(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$，定义：$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,\cdots,b_n-a_n)$ 为由点 A,B 确定的广义向量，$d(\overrightarrow{AB})=|b_1-a_1|+|b_2-a_2|+\cdots+|b_n-a_n|$ 为广义向量的绝对长度，

（Ⅰ）已知 $A(1,2,-1,0)\in R^4,B(1,2,2,1)\in R^4$，计算 $d(\overrightarrow{AB})$；

（Ⅱ）设 $A,B,C\in R^n$，证明：$d(\overrightarrow{AB})+d(\overrightarrow{BC})\geq d(\overrightarrow{AC})$；

（Ⅲ）对于给定 $A,B\in R^n$，若 $P(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in R^n$ 满足 $d(\overrightarrow{AP})+d(\overrightarrow{PB})=d(\overrightarrow{AB})$ 且 $p_i\in Z(i=1,2,\cdots,n)$，则称 P 为 R^n 中关于 A,B 的绝对共线整点，已知 $A(1,0,3),B(6,5,5)\in R^3$，

①求 R^3 中关于 A,B 的绝对共线整点的个数；

②若从 R^3 中关于 A,B 的绝对共线整点中任取 m 个，其中必存在 4 个点 $(x_1,y_1,z),(x_2,y_1,z),(x_3,y_2,z),(x_4,y_2,z)(x_1\neq x_2\neq x_3\neq x_4,y_1\neq y_2)$，满足 $x_1+x_2=x_3+x_4$，求 m 的最小值.

北京十二中 2023-2024 学年第一学期高二年级期中考试

数　　学（答案 仅供参考）

2023.11

第一部分　选择题（共 60 分）

一、选择题。本题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分。在每题给的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	D	A	A	C	B	D	C	C	D	B

第二部分 非选择题（共 90 分）

二、填空题。本题共 6 小题，每题 5 分，共 30 分。

13. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

14. $-\frac{2}{3}$或2或-2；（写出一个即可）

15. $\sqrt{2}$；

16. （1）-2；（2）-12；

17. $\frac{\sqrt{6}}{3}$；

18.①②.

三、解答题。本题共 5 小题，共 60 分。

19.（11 分）（Ⅰ）$B(-2,1)$；（Ⅱ）$D(2,3)$；（Ⅲ）$2x+y+3=0$.

20.（12 分）（Ⅰ）证明：略；（Ⅱ）$2\sqrt{5}$.

21.（13 分）（Ⅰ）圆心坐标为$(3,-2)$，半径$r=5$；（Ⅱ）$x^2+(y+2)^2=16$；

（Ⅲ）假设存在过点$Q(1,0)$的直线l_2垂直平分弦 AB，则直线l_2必过圆心$(3,-2)$，

$\therefore k_{l_2}=\dfrac{-2-0}{3-1}=-1$，直线 $ax-y+3=0$ 的斜率为1，即 $x-y+3=0$，

圆心 $C(3,-2)$ 到直线 $x-y+3=0$ 的距离 $d_1=\dfrac{|3+2+3|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}>5$，

此时直线 $ax-y+3=0$ 与圆 C 相离，与题设矛盾，故假设不成立，

所以，不存在实数 a 使得过点 $P(2,0)$ 的直线，垂直平分弦 AB.

22.（13 分）

（Ⅰ）证明：略；

（Ⅱ）解：选择条件①②③：（ⅰ）点 A 不在平面 EFG 内；（ⅱ）平面 ACC_1 与平面 EFG 夹角的余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{53}}{53}$.

23.（12 分）解：（Ⅰ）因为 $A(1,2,-1,0)\in R^4, B(1,2,2,1)\in R^4$，

所以 $d(\overrightarrow{AB})=|1-1|+|2-2|+|2-(-1)|+|1-0|=4$，

所以 $d(\overrightarrow{AB})=4$；

（Ⅱ）由已知设 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n),B(y_1,y_2,\cdots,y_n),C(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，则

$d(\overrightarrow{AB})=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|+\cdots+|y_n-x_n|$，$d(\overrightarrow{AC})=|z_1-x_1|+|z_2-x_2|+\cdots+|z_n-x_n|$，

$d(\overrightarrow{BC})=|z_1-y_1|+|z_2-y_2|+\cdots+|z_n-y_n|$

由绝对值三角不等式可得 $|y_i-x_i|+|z_i-y_i|\ge|y_i-x_i+z_i-y_i|=|z_i-x_i|,i=1,2,3\cdots,n$

当且仅当 $(y_i-x_i)(z_i-y_i)\ge 0$ 时等号成立，

所以

$$\begin{aligned}d(\overrightarrow{AB})+d(\overrightarrow{BC})&=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|+\cdots+|y_n-x_n|+|z_1-y_1|+|z_2-y_2|+\cdots+|z_n-y_n|\\&=|z_1-y_1|+|y_1-x_1|+|z_2-y_2|+|y_2-x_2|+\cdots+|z_n-y_n|+|y_n-x_n|\end{aligned}$$

进而 $d(\overrightarrow{AB})+d(\overrightarrow{BC})\ge|z_1-x_1|+|z_2-x_2|+\cdots+|z_n-x_n|$，

当且仅当$(y_i-x_i)(z_i-y_i)\ge 0$，$i=1,2,\cdots,n$都成立时等号成立；

所以$d(\overrightarrow{AB})+d(\overrightarrow{BC})\ge d(\overrightarrow{AC})$；

（III）①设$P(t_1,t_2,t_3)$，$t_1,t_2,t_3\in Z$为R^3中关于A,B的绝对共线整点，则$d(\overrightarrow{AP})+d(\overrightarrow{PB})=d(\overrightarrow{AB})$；

因为$A(1,0,3),B(6,5,5)\in R^3$，所以$(t_1-1)(6-t_1)\ge 0$，$(t_2-0)(5-t_2)\ge 0$，$(t_3-3)(5-t_3)\ge 0$，

所以$t_1\in\{1,2,3,4,5,6\}$，$t_2\in\{0,1,2,3,4,5\}$，$t_3\in\{3,4,5\}$，

所以R^3中关于A,B的绝对共线整点的个数为$6\times 6\times 3=108$，

②先考虑A,B的绝对共线整点中z坐标都为 3 的点，

考虑取出x坐标分别为 1,2,3,5，z坐标为 3 的点的所有点共 24 个，因为 1,2,3,5 中任意两个数的和都不等于另两个数的和，故不存在满足要求的四个点，

若取出x坐标分别为 1,2,3,5，z坐标为 3 的点的所有点共 24 个，加入x坐标为 4，z坐标为 3 的任意点$(4,k,3)$，则存在$k\in\{0,1,2,3,4,5\}$，则存在$(1,k,3),(4,k,3),(2,h,3),(3,h,3)$，$h\ne k$，满足要求；同理加入$x$坐标为 6，$z$坐标为 3 的任意点都存在满足要求的四个点，

由此可证在z坐标都为 3 的点中取 24 个点不一定存在满足要求的 4 个点，但取 25 个点则一点存在满足要求的 4 个点，

故要满足给定要求，m得最小值为 73.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！