

2018~2019 学年北京大学附属中学荣誉班高一上学期期中数学试卷

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{y | y = 2x, x \in A\}$, 则 $B =$ _____, _____.
2. 函数 $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ 的定义域是 _____, 值域是 _____.
3. 已知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 若 $f(x-1) > f(3-2x)$, 则 x 的取值范围是 _____.
4. 设函数 $g(x)$ 满足 $g(x+2) = 2x+3$, 则 $g(x)$ 的解析式为 _____.
5. 为了提高同学们的学习兴趣, 学校举办了数学、物理两科竞赛. 高一年级(包括衔接班)共 260 名同学参加比赛, 其中两科都取得优秀的有 80 人, 数学取得优秀但物理未取得优秀的有 40 人, 物理取得优秀而数学未取得优秀的有 120 人, 则两科均未取得优秀的人数为 _____.
6. 已知 p : 实数 x 满足 $0 \leq x \leq 2$, q : 实数 x 满足 $(x-3)(5x+1) \leq 0$, 则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 _____.(填写“充分且不必要条件”, “必要且不充分条件”, “充分必要条件”或“既不充分也不必要条件”)
7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 \mathbf{R} 上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数 x 都有 $xf(x+1) = (1+x)f(x)$, 则 $f(0) =$ _____, $f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right) =$ _____.
8. 李老师每天开车上班, 10 月李老师共加了两次油, 每次加油都把油箱加满, 下表记录了该车相邻两次加油时的情况:

加油时间	加油量(升)	加油时的累计里程(千米)
2018 年 10 月 1 日	12	35000
2018 年 10 月 30 日	48	35600

注: “累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程.

在这段时间内, 该车每 100 千米均耗油量为 _____ 升.

9. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 2a < x < a+3\}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $(C_U A) \cap B$.

(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

10. 已知函数 $f(x) = x + \frac{m}{x} + m$ ($x \neq 0$ 且 $m < 1$), 设函数 $g(x) = x \cdot f(x) + 2x - \frac{3}{2}$.

(1) 证明函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数.

(2) 若方程 $g(x) = 0$ 有两个不相等的实根, 有一根小于 1, 且另一根在 $(1, 2)$ 内, 求 m 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x)$ 对一切实数 x, y 都有 $f(x+y) - f(y) = x(x+2y+1)$ 成立, 且 $f(1) = 0$.

(1) 求 $f(0)$ 的值.

(2) 求 $f(x)$ 的解析式.

(3) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, 不等式 $f(x) + 3 < 2x + a$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

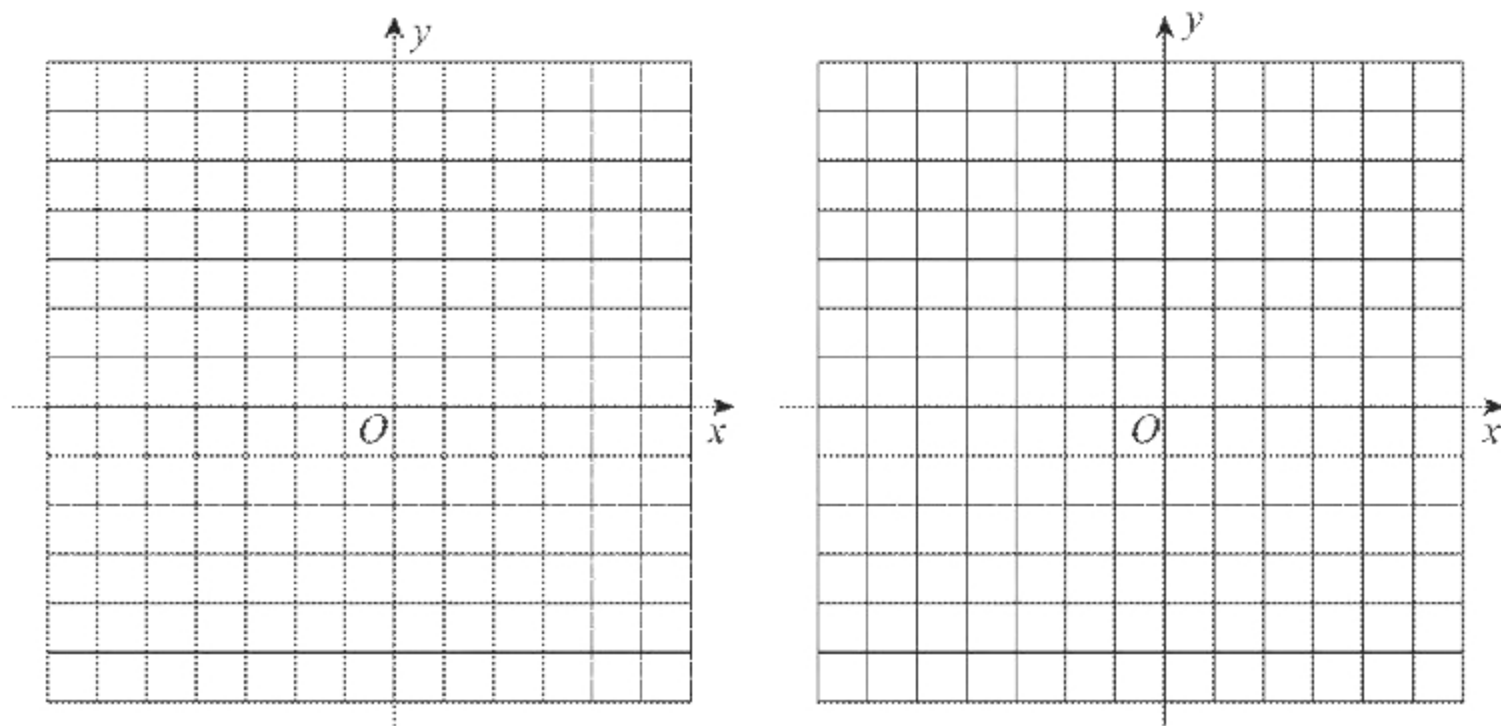
12. 对于两条平行直线 l_1 、 l_2 (l_1 在 l_2 下方)和图象 G 有如下操作:将图象 G 在直线 l_1 下方的部分沿直线 l_1 翻折,其余部分保持不变,得到图象 G_1 ;将图象 G_1 在直线 l_2 上方的部分沿直线 l_2 翻折,其余部分保持不变,得到图象 G_2 ;再将图 G_2 在直线下方的部分沿直线 l_1 翻折,其余部分保持不变,得到图象 G_3 ;再将图象 G_3 在直线 l_2 上方的部分沿直线 l_2 翻折,其余部分保持不变,得到图象 G_4 ;以此类推...;直到图象 G_k 上所有点均在 l_1 、 l_2 之间(含 l_1 、 l_2 上)操作停止,此时称图象 G_k 为图象 G 关于直线 l_1 、 l_2 的“衍生图形”如下图所示,线段 AB 关于直线 l_1 、 l_2 的“衍生图形”为折线段 $A_1-C-D-E-B_2$.

(1)直线型

平面直角坐标系中, 设直线 $l_1: y=0$, 直线 $l_2: y=1$

①令图象 G 为 $f(x)=x$ 的函数图象, 则图象 G_1 的解析式为

②令图像 G 为 $f(x)=x$ 的函数图象, 请你画出 G_1 和 G_2 的图象



③若函数 $g(x)=ax+1$ 的图象与图象 G_1 有且仅有一个交点, 且交点在 y 轴的左侧, 那么 a 的取值范围是

④请你观察图象 G_2 并描述其单调性, 直接写出结果_____.

⑤请你观察图象 G_2 并判断其奇偶性, 直接写出结果_____.

⑥图象 G_2 所对应函数的零点为_____.

⑦任取图象 G_2 中横坐标 $x \in [-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ 的点, 那么在这个变化范围中所能取到的最高点的坐标为(_____, _____), 最低点坐标为(_____, _____).

⑧若直线 $h(x)=a$ 与图象 G_2 有2个不同的交点, 则 a 的取值范围是_____.

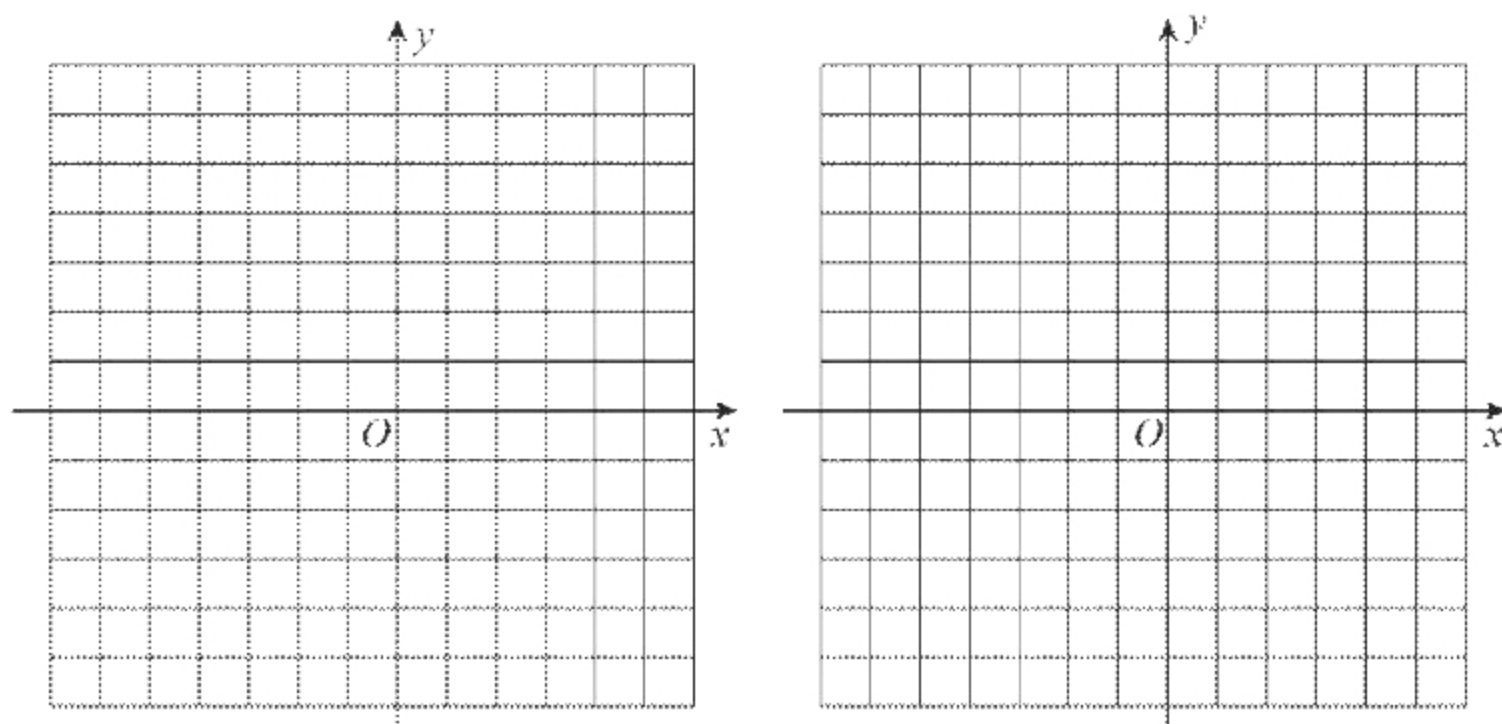
⑨根据函数图象, 请你写出图象 G_2 的解析式_____.

(2)曲线型

若图象 G 为函数 $f(x)=x^2-3x+2$ 的图象,

平面直角坐标系中, 设直线 $l_1: y=0$, 直线 $l_2: y=1$,

则我们可以很容易得到 G_1 所对应的解析式为 $f_1(x) = |x^2 - 3x + 2|$.



备用图

- ①请画出 G_1 的图象，记 G_1 所对应的函数解析式为 $f_1(x)$.
- ②函数 $f_1(x)$ 的单调增区间为_____，单调减区间为_____.
- ③当 $x \in [0, 5]$ 时候，函数 $f_1(x)$ 的最大值为_____，最小值为_____.
- ④若方程 $|x^2 - 3x + 2| = \frac{1}{3}x + b$ 有四个不同的实数根，则 b 的取值范围为_____.

(3)封闭图形型

平面直角坐标系中,设直线 $l_3: y = -2$,直线 $l_4: y = 2$

设图象 G 为四边形 $OPQR$,其顶点坐标分别为 $O(0,0), P(3,3), Q(6,0), R(3,-3)$,四边形 $OPQR$ 关于直线 l_3, l_4 的“衍生图形”为 G_k .

- ① G_k 的周长为_____.
- ②若直线 $y = -\frac{2}{3}x + b$ 平分 G_k 的周长,则 $b =$ _____.
- ③将 G_k 沿右上方 45° 方向平移 $\sqrt{2}$ 个单位,则平移过程中 G_k 所扫过的面积为_____.