2023届“皖南八校”高三第三次大联考

数　　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}|\frac{x-3}{x+1}\leqslant 0\}$，$B=\{y|y=x^2,x\in A\}$，则集合 $A\cup B$ 的非空真子集的个数为

A. 14　　B. 15　　C. 30　　D. 62

2. 已知复数 z 满足 $\mathrm{i}z=\frac{1+\sqrt{2}\mathrm{i}}{|1+\mathrm{i}|}$（i为虚数单位），则复数 z 在复平面内对应的点所在的象限为

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 给出下列四个命题，其中正确命题为

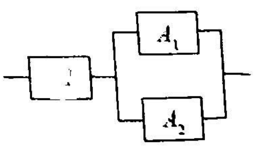
A. “$\forall x>0,x^2+x>1$”的否定是“$\exists x_0>0,x_0^2+x_0<1$”

B. “$\alpha>\beta$”是“$\sin\alpha>\sin\beta$”的必要不充分条件 既不也不

C. $\exists\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，使得 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$

D. “$a>b$”是“$2^a>2^b$”的充分不必要条件

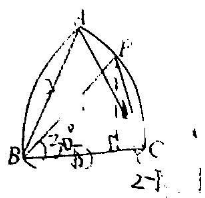
4. 如图，用 M,A_1,A_2 三类不同的元件连接成一个系统，当 M 正常工作且 A_1,A_2 至少有一个正常工作时，系统正常工作，已知 M,A_1,A_2 正常工作的概率依次是 $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4}$，已知在系统正常工作的前提下，则只有 M 和 A_1 正常工作的概率是



A. $\frac{5}{9}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{9}$

5. 勒洛三角形是一种典型的定宽曲线，以等边三角形每个顶点为圆心，以边长为半径，在另两个顶点间作一段圆弧，三段圆弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形. 在如图所示的勒洛三角形中，已知 $AB=2$，P 为弧 AC 上的一点，且 $\angle PBC=\frac{\pi}{6}$，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的值为



A. $4-\sqrt{2}$　　B. $4+\sqrt{2}$

C. $4-2\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

密　封　线　内　不　要　答　题

6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$，则下列结论正确的有

A. $|f(x)|$的最小正周期为2π

B. 直线 $x=\frac{4\pi}{3}$ 是 $f(x)$图象的一条对称轴

C. $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

D. 若 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},m\right]$上的最大值为 1，则 m

7. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，其图象关于点$(2,0)$对称，当 $x\in[0,2]$时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$，若方程 $f(x)-k(x-2)=0$ 的所有根的和为 6，则实数 k 的取值范围是

A. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}\cup\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)$

B. $\left\{\frac{\sqrt{6}}{12}\right\}\cup\left(-\right.$

C. $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{12},+\infty\right)$

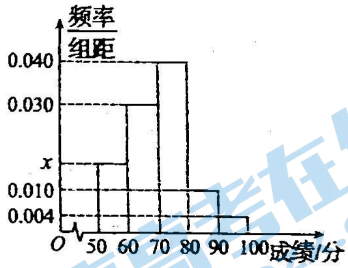
D. $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}\cup\left(-\frac{\sqrt{6}}{12},+\infty\right)$

8. 已知函数 $f(x)=me^x-x-n-1(m,n\in\mathbf{R})$，若 $f(x)\geqslant-1$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 mn 的最大值是

A. e^{-2}　　B. $-e^{-2}$　　C. e^{-1}　　D. $-e^{-1}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在某市高三年级举行的一次模拟考试中，某学科共有 20 000 人参加考试. 为了了解本次考试学生成绩情况，从中抽取了部分学生的成绩(成绩均为正整数，满分为 100 分)作为样本进行统计，样本容量为 n. 按照$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$的分组作出频率分布直方图如图所示. 其中，成绩落在区间$[50,60)$内的人数为 16. 则下列结论正确的是



A. 图中 $x=0.016$

B. 样本容量 $n=1\ 000$

C. 估计该市全体学生成绩的平均分为 70.6 分

D. 该市要对成绩前 25%的学生授予“优秀学生”称号，则授予“优秀学生”称号的学生考试成绩大约至少为 77.25 分

10. 已知正实数 a,b,c 满足 $a^2-ab+4b^2-c=0$，当$\frac{c}{ab}$取最小值时，下列说法正确的是

A. $a=2b$　　B. $c=4b^2$

C. $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{6}{c}$的最大值为 1　　D. $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{6}{c}$的最小值为$\frac{1}{2}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 4，M 为棱 CC_1 上的动点，$AM\perp$平面 α，则下列说法正确的是

A. 若 N 为 DD_1 中点，当 $AM+MN$ 最小时，$\frac{CM}{CC_1}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 当点 M 与点 C_1 重合时，若平面 α 截正方体所得截面图形的面积越大，则其周长就越大

C. 直线 AB 与平面 α 所成角的余弦值的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

D. 当点 M 与点 C 重合时，四面体 AMD_1B_1 内切球表面积为$\frac{16\pi}{3}$

12. 已知抛物线 $C: x^2=2y$ 的焦点为 F，准线为 l，A，B 是 C 上异于点 O 的两点（O 为坐标原点），则下列说法正确的是

A. 若 A、F、B 三点共线，则 $|AB|$ 的最小值为 2

B. 若 $|AF|=\frac{3}{2}$，则 $\triangle AOF$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. 若 $OA\perp OB$，则直线 AB 过定点 $(2,0)$

D. 若 $\angle AFB=60^\circ$，过 AB 的中点 D 作 $DE\perp l$ 于点 E，则 $\frac{|AB|}{|DE|}$ 的最小值为 1

三、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=\begin{cases}-x+4, x\leqslant 2,\\ 1+\log_2 x, x>2\end{cases}$ 的值域是________.

14. 某企业五一放假 4 天，安排甲、乙、丙、丁四人值班，每人只值班一天. 已知甲不安排在第一天，乙不安排在最后一天，则不同的安排种数为________.

15. 过双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右焦点 F 的直线 l 与双曲线 C 的一条渐近线垂直，垂足为点 A，O 为坐标原点，若 $\angle OAF$ 的角平分线与 x 轴交于点 M，且点 M 到 OA 与 AF 的距离都为 $\frac{b}{3}$，则双曲线 C 的离心率为________.

16. 已知四面体 $ABCD$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ADC$ 是边长为 2 的等边三角形，$\triangle ADC$ 外接圆的圆心为 O'. 若四面体 $ABCD$ 的体积最大时，$\angle BAO'=\frac{\pi}{3}$，则球 O 的半径为________；若 $AB=BC=\frac{\sqrt{21}}{3}$，点 E 为 AC 的中点，且 $\angle BED=\frac{2\pi}{3}$，则球 O 的表面积为________.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

2022 年卡塔尔世界杯是第二十二届世界杯足球赛，是历史上首次在卡塔尔和中东国家境内举行、也是第二次在亚洲举行的世界杯足球赛. 卡塔尔世界杯后，某校为了激发学生对足球的兴趣，组建了足球社团. 足球社团为了解学生喜欢足球是否与性别有关，随机抽取了男、女同学各 100 名进行调查，统计得出的数据如下表：

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生		50	
女生	25		
合计			

(1) 根据所给数据完成上表，试根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析该校学生喜欢足球与性别是否有关.

(2) 社团指导老师从喜欢足球的学生中抽取了 2 名男生和 1 名女生示范点球. 已知男生进球的概率为 $\frac{3}{4}$，女生进球的概率为 $\frac{1}{3}$，每人踢球一次，假设各人踢球相互独立，求 3 人进球总次数的分布列和数学期望.

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$a+b+c+d=n$.

α	0.050	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

HD

18.（12 分）

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\cos A+\sqrt{3}\sin A=\frac{b+a}{c}$.

(1)求角C；

(2)设BC的中点为D，且$AD=\sqrt{3}$，求$a+2b$的取值范围.

19.（12 分）

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=0$，且对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_{n+1}-a_n=2^n$. 在等差数列$\{b_n\}$中，前n项和为S_n，$b_1=2$，$2b_3+S_5=28$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

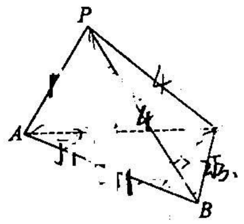
(2)设$c_n=\frac{b_n}{a_{2n}+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

20.（12 分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$\triangle ABC$为直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，$\triangle PAC$是边长为 4 的等边三角形，$PB=4$，$BC=2\sqrt{3}$.

(1)求证：平面$PAB\perp$平面ABC；

(2)求二面角$A-PB-C$的余弦值.

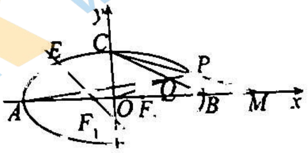


21.（12 分）

如图，椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<4)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$A,B,C$分别为椭圆$\Gamma$的左、右顶点和上顶点，$O$为坐标原点，过点$F_1$的直线$l$交椭圆$\Gamma$于$E,F$两点，线段$EF_2$的中点为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 点$P$是$\Gamma$上在第一象限内的动点，直线$AP$与直线$BC$相交于点$Q$，直线$CP$与$x$轴相交于点$M$.

(1)求椭圆Γ的方程；

(2)设$\triangle OCQ$的面积为S_1，$\triangle OCM$的面积为S_2，求$S_1\cdot S_2$的值.



22.（12 分）

若对任意的实数k,b，函数$y=f(x)+kx+b$与直线$y=kx+b$总相切，则称函数$f(x)$为"恒切函数".

(1)判断函数$f(x)=x^3$是否为"恒切函数"；

(2)若函数$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-x-1)e^x+m$是"恒切函数"，求证：$-\frac{1}{8}<m\leqslant 0$.