

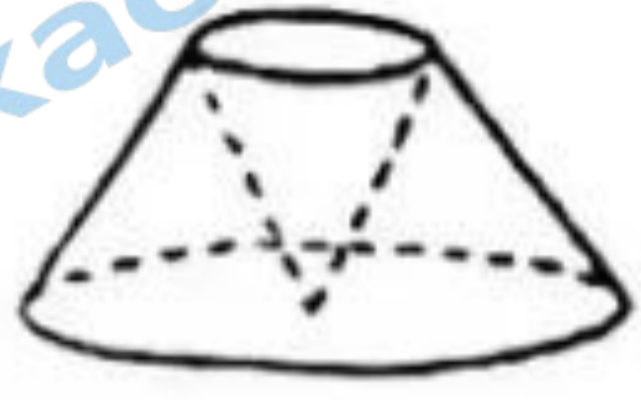
## 数学试题

## 注意事项:

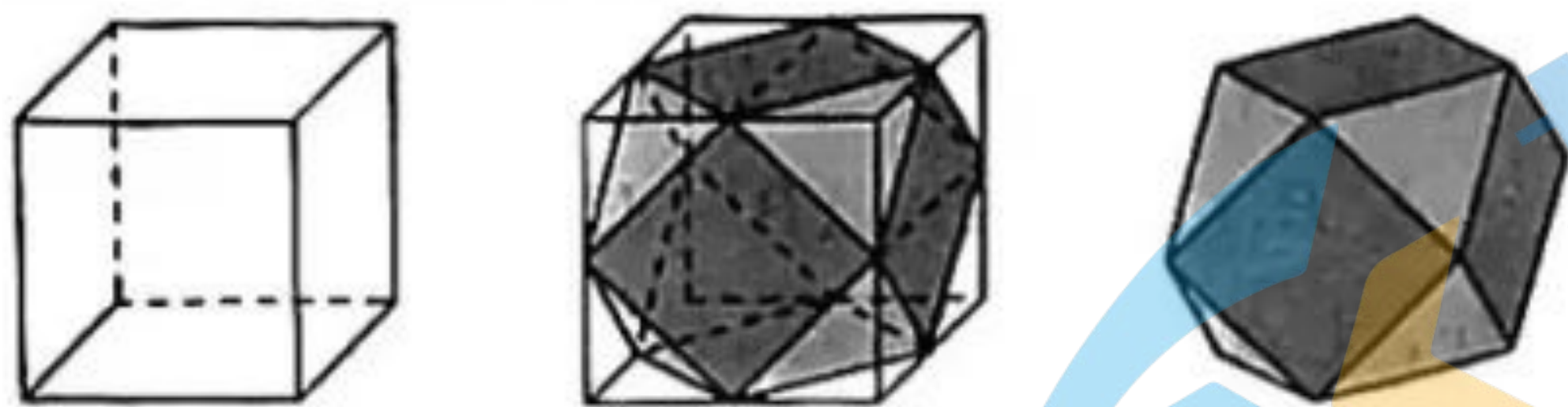
1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x+1| \geq 2\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + 2x - 8 < 0\}$ , 则  $A \cap B =$ 
  - A.  $\{x \mid -4 < x < 2\}$
  - B.  $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$
  - C.  $\{x \mid -4 < x \leq -3 \text{ 或 } 1 \leq x < 2\}$
  - D.  $\{x \mid -4 < x < -3 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$
2. 若  $z(1-i) = 2+i$ , 则  $z - \bar{z} =$ 
  - A. 1
  - B.  $8i$
  - C.  $-3i$
  - D.  $i$
3. 在边长为 2 的正三角形  $ABC$  中,  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EB}$ , 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} =$ 
  - A.  $-\frac{9}{4}$
  - B.  $\frac{3}{2}$
  - C.  $-\frac{3}{2}$
  - D.  $\pi$
4. 已知角  $\alpha$  的终边过点  $(3, m)$ , 若  $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 则实数  $m$  的值为
  - A. -3
  - B. 4
  - C. -3 或 3
  - D. -4 或 4
5. 如图,一种工业部件是由一个圆台挖去一个圆锥所构成的,已知圆台的上、下底面直径分别为 2 cm 和 4 cm,且圆台的母线与底面所成的角为  $\frac{\pi}{4}$ ,圆锥的底面是圆台的上底面,顶点在圆台的下底面上,则该工业部件的体积为

  - A.  $2\pi$
  - B.  $6\pi$
  - C.  $3\sqrt{2}\pi$
  - D.  $9\sqrt{2}\pi$
6. 若函数  $y = f(x)$  同时满足:①  $f(x) > 0$ ; ② 函数  $v = f(x)$  与函数  $y = \log_a(x)$  ( $a > 1$ ) 的单调性一致,则称函数  $y = f(x)$  为“鲁西西函数”.例如:函数  $f(x) = e^x$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减,在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $g(x) = x^2$  同样在  $(-\infty, 0)$  上单调递减,在  $(0, +\infty)$  上单调递增.若函数  $h(x) = e^x$  ( $x > 0$ ) 为“鲁西西函数”,则  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的最大值为
  - A.  $\frac{1}{e}$
  - B.  $e$
  - C.  $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$
  - D.  $e^{\frac{1}{e}}$
7. 已知直线  $l: y = x - \frac{p}{2}$  与抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 相交于  $A, B$  两点,若  $\triangle AOB$  ( $O$  为坐标原点) 的面积为  $\sqrt{2}$ , 则  $p =$ 
  - A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
  - B. 1
  - C. 2
  - D.  $\sqrt{2}$

8. 如图, 将正方体沿交于同一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥, 如此共可截去八个三棱锥, 截取后的剩余部分称为“阿基米德多面体”, 它是一个 24 等边半正多面体. 若从它的棱中任取两条, 则这两条棱所在的直线为异面直线的概率为



A.  $\frac{10}{23}$

B.  $\frac{12}{23}$

C.  $\frac{29}{69}$

D.  $\frac{50}{69}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列结论正确的有

A. 若变量  $y$  关于变量  $x$  的回归直线方程为  $\hat{y} = 2x + m$ , 且  $\bar{x} = m, \bar{y} = 6$ , 则  $m = 2$

B. 若随机变量  $\xi$  的方差  $D(\xi) = 2$ , 则  $D(2\xi + 1) = 4$

C. 若  $A, B$  两组成对数据的样本相关系数分别为  $r_A = 0.97, r_B = -0.99$ , 则  $B$  组数据比  $A$  组数据的相关性较强

D. 样本数据  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  和样本数据  $x_1 + 2, x_2 + 2, x_3 + 2, \dots, x_n + 2$  的四分位数相同

10. 将函数  $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$  ( $0 < \omega < 6$ ) 的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后得到函数  $g(x)$  的

图象. 若  $\left(0, \frac{\pi}{\omega}\right)$  是  $g(x)$  的一个单调递增区间, 则以下结论正确的为

A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$

B.  $f(x)$  在  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$  上单调递增

C. 函数  $F(x) = f(x) + g(x)$  的最大值为  $\sqrt{3}$

D. 方程  $f(x) = -\frac{1}{3}$  在  $[0, 2\pi]$  上有 4 个实数根

11. 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的上、下焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过点  $F_2$  且与一条渐近线垂直的直线  $l$  与  $C$  的上支交于点  $P$ , 垂足为  $A$ , 且  $|PF_1| = 3b - 2a$ ,  $O$  为坐标原点, 则

A. 双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{3}{2}x$

B. 双曲线  $C$  的离心率为  $\frac{\sqrt{13}}{2}$

C. 三角形  $AOF_1$  的面积为  $\frac{3}{4}a^2$

D. 直线  $l$  被以  $F_1F_2$  为直径的圆截得的弦长为  $\frac{3}{2}a$

12. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x+1)$  为奇函数, 且对  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x+4) = f(-x)$  恒成立, 则

A.  $f(x)$  为奇函数

B.  $f(3) = 0$

C.  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right)$

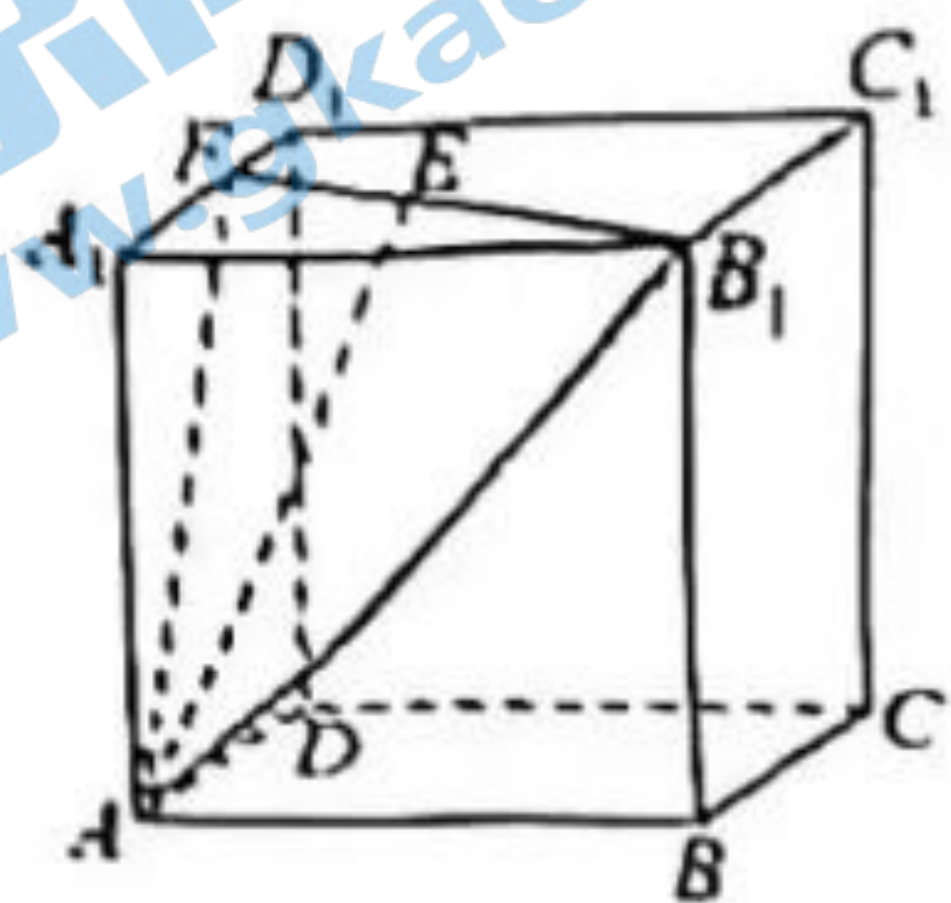
D.  $f(2023) = 0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知  $\theta \in (0, \pi)$ ，则  $\frac{1}{2\sin^2\theta} - \cos^2\theta$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

14.  $(x+3\sqrt{x}+2)^4$  的展开式中，含  $x$  的项的系数为 \_\_\_\_\_。

15. 如图，在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=4$ ，若  $F$  为棱  $A_1D_1$  上动点， $E$  为线段  $B_1F$  上的点，且  $AE \perp B_1F$ ，若  $AE$  与平面  $A_1B_1F$  所成角的正切值为  $\frac{5}{3}$ ，则三棱锥  $A-A_1B_1F$  的外接球表面积为 \_\_\_\_\_。



16. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $S_2=3$ ，且  $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ 2a_n + 1, & n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ ，则  $S_{10} =$  \_\_\_\_\_。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边， $B = \frac{2\pi}{3}$ ，且  $\frac{a+c\sin A}{\cos C} = \frac{c\cos A}{\sin C}$ 。

(1) 求角  $C$  的大小；

(2) 若  $\triangle ABC$  的外接圆面积为  $3\pi$ ，求  $BC$  边上的中线长。

18. (12 分) 已知递增等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $\frac{S_n}{S_2} = \frac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$ ，且  $b_1 = \frac{2}{3}$ 。

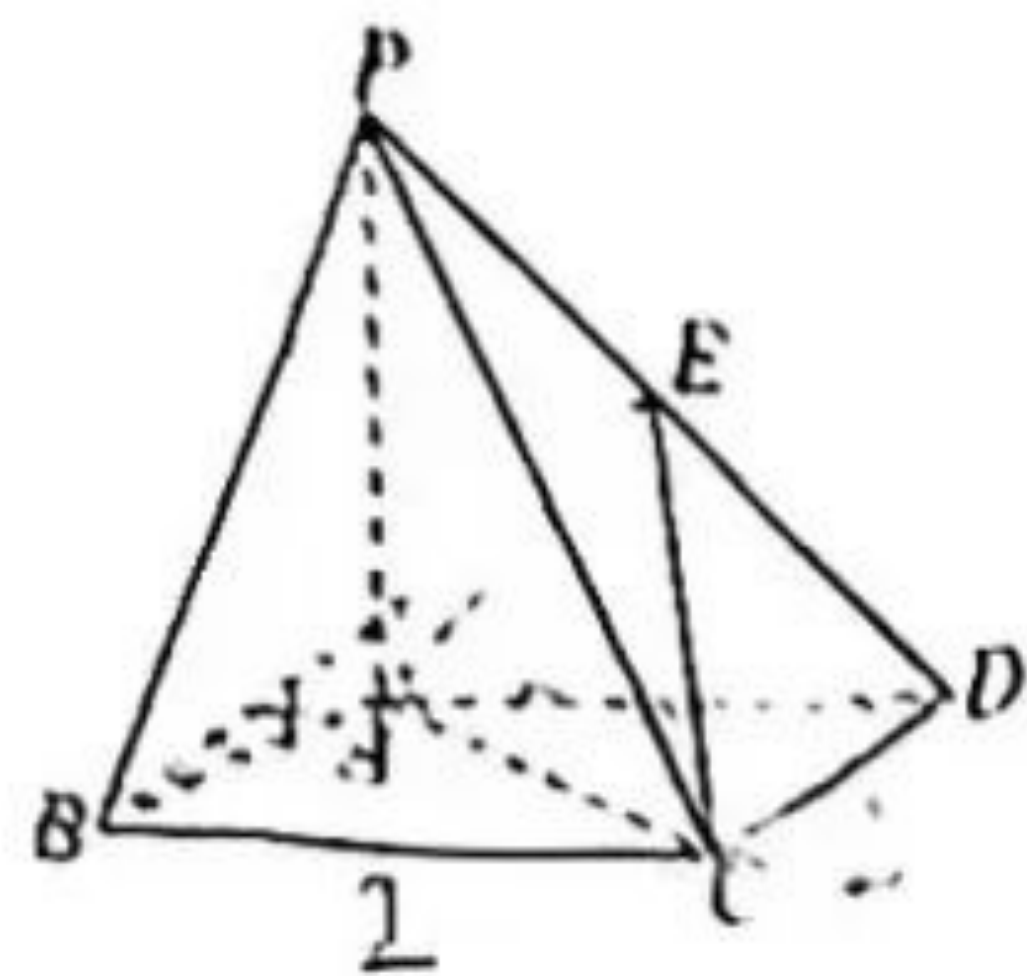
(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

19. (12 分) 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形，平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ，平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ， $E$  为  $PD$  中点，三棱锥  $P-ACE$  的体积为  $\frac{2}{3}$ 。

(1) 证明： $AE \perp$  平面  $PCD$ ；

(2) 求二面角  $A-CE-B$  的正弦值。



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯