2023 北京顺义杨镇一中高二（上）期中

数　　学

一、选择题，10 小题，每题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

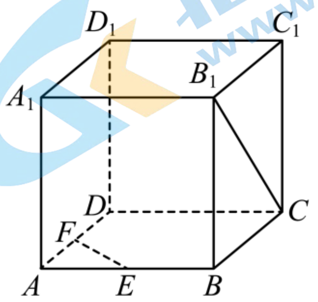
1. 直线 $\sqrt{3}x-y-1=0$ 的倾斜角为（　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，它的终边经过点 $(4,3)$，则 $\cos\alpha=$（　）

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

3. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点，则异面直线 B_1C 与 EF 所成的角的大小为（　）



A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

4. 已知平面 α 的法向量为 $(2,-4,-2)$，平面 β 的法向量为 $(-1,2,k)$，若 $\alpha /\!/ \beta$，则 $k=$（　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 如果 $AB>0$，$BC>0$，那么直线 $Ax+By+C=0$ 不经过的象限是（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

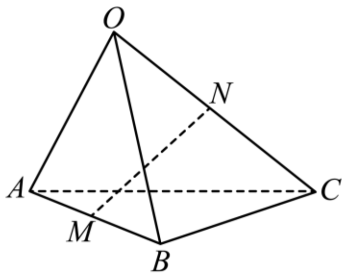
6. 已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 和圆 P 的方程为 $x^2+(y-1)^2=4$，两圆的位置关系为（　）

A. 内切　　B. 相交　　C. 相离　　D. 外切

7. 已知直线 $x+(m+2)y-1=0$ 与直线 $mx+3y-1=0$ 平行，则 m 的值为（　）

A. -3　　B. 1　　C. 1 或 3　　D. -1 或 3

8. 已知三棱锥 $O-ABC$，点 M，N 分别为 AB，OC 的中点，且 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于（　　）



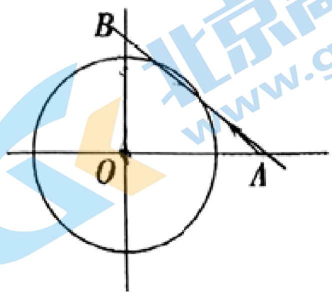
A. $\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)$

B. $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)$

C. $\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$

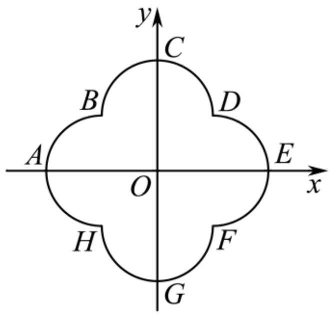
D. $\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right)$

9. 如图，已知一艘停在海面上的海监船 O 上配有雷达，其监测范围是半径为 25km 的圆形区域，一艘轮船从位于海监船正东 40km 的 A 处出发，径直驶向位于海监船正北 30km 的 B 处岛屿，速度为 $28\text{km}/\text{h}$.这艘轮船能被海监船监测到的时长为（　　）



A. 1 小时　　B. 0.75 小时　　C. 0.5 小时　　D. 0.25 小时

10. 如图所示,该曲线 W 是由 4 个圆: $(x-1)^2+y^2=1,(x+1)^2+y^2=1,x^2+(y+1)^2=1,x^2+(y-1)^2=1$ 的一部分所构成,则下列叙述错误的是（　　）



A. 曲线 W 围成的封闭图形面积为 $4+2\pi$

B. 若圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 与曲线 W 有 4 个交点,则 $r=\sqrt{2}$ 或 2

C. BD 与 DE 的公切线方程为 $x+y-1-\sqrt{2}=0$

D. 曲线上的点到直线 $x+y+5\sqrt{2}+1=0$ 的距离的最小值为 3

二、填空题，共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知 $A(1,2,3)$，$B(4,5,9)$，$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{AC}$ 的坐标为________，点 C 的坐标为________.

12. 椭圆的焦点坐标为 $(-3,0)$ 和 $(3,0)$，椭圆上任一点到两个焦点的距离之和为 10 的椭圆的标准方程为

________.

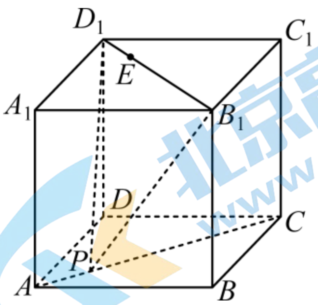
13. 已知直线 $l_1: ax-2y+4=0, l_2: x+(a-3)y+a=0$.

（1）当 $a=4$ 时，两直线 l_1, l_2 的交点 P 的坐标为________.

（2）若直线 $l_1 \perp l_2, a$ 的值为________.

14. 已知集合 $A=\left\{(x,y) \middle| x=\sqrt{1-y^2}\right\}$，$B=\left\{(x,y) \middle| y=x+b\right\}$，若集合 $A\cap B$ 中有 2 个元素，则实数 b 的取值范围是______

15. 如图，在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 AC 上的动点（包含端点），点 E 在线段 B_1D_1 上，且 $D_1E=\frac{1}{4}B_1D_1$，给出下列四个结论：



①存在点 P，使得平面 PB_1D_1 // 平面 C_1BD；

②存在点 P，使得 $\triangle PB_1D_1$ 是等腰直角三角形；

③若 $PE\le 5$，则点 P 轨迹的长度为 $2\sqrt{7}$；

④当 $\frac{AP}{PC}=\frac{1}{3}$ 时，则平面 PB_1D_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面图形的面积为 18.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题，6 小题，共 85 分，解答题应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

（1）写出 $f(x)$ 的最小正周期；

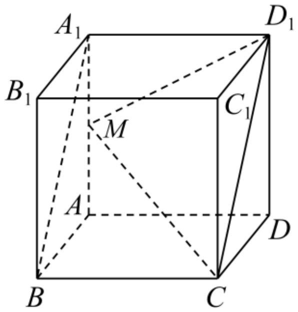
（2）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值及相应 x 的值.

17. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(3,0)$、$B(-1,-3)$、$C(1,1)$.

（1）求直线 BC 的方程；

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为线段 AA_1 的中点.



（1）求证：$A_1C \perp BC_1$；

（2）求平面 ADD_1A_1 与平面 MCD_1 夹角的余弦值；

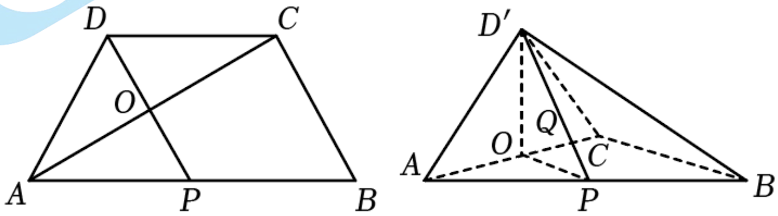
（3）求点 D 到平面 MCD_1 的距离.

19. 已知圆 C 的方程为：$x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

（1）求过点 $M(1,4)$ 的圆 C 的切线方程；

（2）过点 $P(0,4)$ 的直线 l 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l 的方程.

20. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD, \angle BAD=60^\circ, AB=2AD=2CD=4, P$ 为 AB 的中点，线段 AC 与 DP 交于 O 点，将 $\triangle ACD$ 沿 AC 折起到 $\triangle ACD'$ 的位置，使得平面 $ACB \perp$ 平面 ACD'.



（1）求证：$BC /\!/$ 平面 POD'；

（2）线段 PD' 上是否存在点 Q，使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$？若存在，求出 $\dfrac{PQ}{PD'}$ 的值；若不存在，请说明理由.

21. 古希腊数学家阿波罗尼斯发现如下结论：“平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $m(m\neq 1)$ 的点的轨迹是圆”.在平面直角坐标系中，已知点 $A(-2,1), B(1,1)$. P 满足 $\dfrac{PA}{PB}=\sqrt{2}$，设点 P 的轨迹为圆 M，点 M 为圆心，

（1）求圆 M 的方程；

（2）若点 Q 是直线 $l_1: x+y+5=0$ 上的一个动点，过点 Q 作圆 M 的两条切线，切点分别为 E,F，求四边形 $QEMF$ 的面积的最小值；

（3）若直线 $l_2: ax+by-1=0(a>0,b>0)$ 始终平分圆 M 的面积，写出 $\dfrac{a(b+1)+b(a+1)}{ab}$ 的最小值.

参考答案

一、选择题，10 小题，每题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】B

【分析】首先将直线方程化为斜截式，即可求出斜率，再根据斜率与倾斜角的关系即可得解.

【详解】直线l的方程为$\sqrt{3}x-y-1=0$，即$y=\sqrt{3}x-1$，

所以直线的斜率$k=\sqrt{3}$，设倾斜角为α，则$\tan\alpha=\sqrt{3}$，因为$0^\circ\le\alpha<180^\circ$，

所以$\alpha=60^\circ$.

故选：B.

2. 【答案】B

【分析】由任意角的三角函数的定义即可求得结果.

【详解】解：$\because$角α以Ox为始边，终边经过点$(4,3)$，

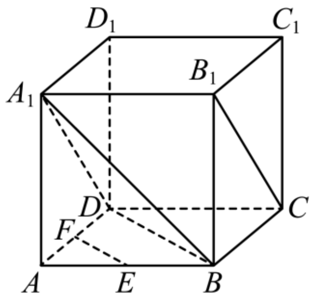
$\therefore \cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{4}{5}$.

故选：B.

3. 【答案】C

【分析】利用线线平行，将异面直线所成的角转化为相交直线所成的角，在三角形中求解即可.

【详解】如图，连接DB，A_1B，则$B_1C//A_1D$，



$\because E$，F分别是AB，AD的中点，

$\therefore DB // EF$，

$\therefore \angle A_1DB$是异面直线B_1C与EF所成的角，且$\triangle A_1DB$是等边三角形，

$\therefore \angle A_1DB=60^\circ$.

故选：C.

4. 【答案】C

【分析】根据题意得两平面的法向量平行，从而得到$\vec{m}=t\vec{n}$，进而求出结果.

【详解】由题意得：$\vec{m}=(2,-4,-2)$与$\vec{n}=(-1,2,k)$平行，故$\vec{m}=t\vec{n}$，即$\begin{cases}2=-t\\-4=2t\\-2=kt\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\t=-2\end{cases}$.

故选：C

5.【答案】A

【分析】将直线化为$y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$，结合已知条件即可判断不经过的象限.

【详解】由题设，直线可写成$y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$，又$AB>0$，$BC>0$，

$\therefore -\dfrac{A}{B}<0$，$-\dfrac{C}{B}<0$，故直线过二、三、四象限，不过第一象限.

故选：A.

6.【答案】B

【分析】将圆化为标准方程,找到圆心之间的距离和半径之间的关系即可判断圆与圆的位置关系.

【详解】由题知$x^2+y^2-2x+4y-4=0$可化为,

$(x-1)^2+(y+2)^2=9$,所以圆心为 $1,-2$,半径为 3,

$x^2+(y-1)^2=4$,圆心为$(0,1)$,半径为 2,

所以圆心之间的距离为$\sqrt{(0-1)^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{10}$,

因为圆心距大于半径差的绝对值,小于半径和,

所以两圆相交.

故选:B.

7.【答案】A

【分析】利用两直线平行即可得$m(m+2)-1\times3=0$，又因为$m=1$时两直线重合，即可得$m=-3$.

【详解】根据题意，由两直线平行可得$m(m+2)-1\times3=0$，即$m^2+2m-3=0$，

解得$m=1$或$m=-3$；

经检验$m=1$时，两直线重合，不合题意；

所以$m=-3$.

故选：A

8.【答案】D

【分析】运用向量的线性运算即可求得结果.

【详解】因为$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，

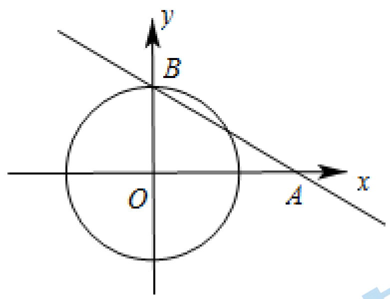
所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}==\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})$.

故选：D.

9.【答案】C

【分析】以 O 为原点，东西方向为 x 轴建立直角坐标系，求出直线与圆的方程，计算圆心到直线的距离和半径比较，可知这艘外籍轮船能否被海监船监测到；计算弦长，可求得持续时间为多长.

【详解】如图，以 O 为原点，东西方向为 x 轴建立直角坐标系,



则 $A(40,0)$， $B(0,30)$，圆 O 方程 $x^2+y^2=25$，

直线 AB 方程：$\frac{x}{40}+\frac{y}{30}=1$，即 $3x+4y-120=0$，

设 O 到 AB 距离为 d，则 $d=\frac{|-120|}{5}=24<25$，

所以外籍轮船能被海监船检测到,

设监测时间为 t，则 $t=\frac{2\sqrt{25^2-24^2}}{28}=\frac{1}{2}$（小时),

外籍轮船能被海监船检测到的时间是 0.5 小时.

故选：C.

10.【答案】D

【分析】对于 A,将曲线 W 围成的封闭图形可分割为一个边长为 2 的正方形和四个半径为 1 的相同的半圆构成计算即可;对于 B,结合图像分情况讨论即可;对于 C,设公切线方程为 $y=kx+t\left(k<0,t>0\right)$,根据直线和圆相切的条件列出方程求解即可得到结果;对于 D,根据选项 C 中的方法,求得 HB,HG 的公切线方程,再利用两条平行线间的距离公式计算即可.

【详解】曲线 W 围成的封闭图形可分割为一个边长为 2 的正方形和四个半径为 1 的相同的半圆构成,所以其面积为 $2\times2+2\times\pi\times1^2=4+2\pi$,故 A 正确;

当 $r=\sqrt{2}$ 时,交点为 B,D,F,H;当 $r=2$ 时,交点为 A,C,E,G;当 $0<r<\sqrt{2}$ 或 $r>2$ 时,没有交点;当 $\sqrt{2}<r<2$ 时,交点个数为 8 个,故 B 正确;

设 BD 与 DE 的公切线方程为 $y=kx+t\left(k<0,t>0\right)$,

由直线和圆相切的条件可得 $\frac{|t-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1=\frac{|k+t|}{\sqrt{1+k^2}}$,

解得 $k=-1$,$t=1+\sqrt{2}$ ($1-\sqrt{2}$ 舍去),

则其公切线方程为 $y=-x+1+\sqrt{2}$,即 $x+y-\sqrt{2}-1=0$,故 C 正确;

同理可得 HB,HG 的公切线方程为 $x+y+1+\sqrt{2}=0$,

则两平行线的距离为 $d=\dfrac{\left|5\sqrt{2}+1-1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}=4$,故 D 错误.

故选:D.

二、填空题，共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】 ①. $(1,1,2)$ ②. $(2,3,5)$

【分析】由空间向量坐标运算公式计算即可.

【详解】$\because A(1,2,3)$，$B(4,5,9)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(3,3,6)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(3,3,6)=(1,1,2)$，

故 $\overrightarrow{AC}$ 的坐标为 $(1,1,2)$.

$\because$ 原点 $O(0,0,0)$

$\therefore \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(1,2,3)+(1,1,2)=(2,3,5)$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\overrightarrow{OC}=(2,3,5)$.

故答案为：$(1,1,2)$；$(2,3,5)$.

12.【答案】 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

【分析】根据给定条件，利用椭圆定义求出椭圆方程作答.

【详解】依题意，椭圆长轴长 $2a=10$，则 $a=5$，而椭圆半焦距 $c=3$，因此椭圆短半轴长

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

所以所求椭圆标准方程是 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

故答案为：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

13.【答案】 ①. $(-2,-2)$ ②. 6

【分析】把 $a=4$ 代入，再解方程组求出交点坐标；利用直线垂直的充要条件列式计算即得.

【详解】当 $a=4$ 时，直线 $l_1:2x-y+2=0, l_2:x+y+4=0$，由 $\begin{cases}2x-y+2=0\\x+y+4=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$，

所以直线 l_1,l_2 的交点 P 的坐标为 $(-2,-2)$；

由 $l_1\perp l_2$，得 $a-2(a-3)=0$，解得 $a=6$，

所以 a 的值为 6.

故答案为：$(-2,-2)$；6

14. 【答案】$\left(-\sqrt{2},-1\right]$

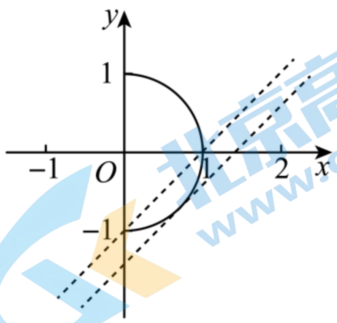
【分析】首先分析集合 A 、 B 的元素特征，再数形结合求出参数 b 的取值范围.

【详解】解：由 $x=\sqrt{1-y^2}$ ，则 $x\geq 0$ ，所以 $x^2+y^2=1\ (x\geq 0)$，

所以 $A=\left\{(x,y)\middle|x=\sqrt{1-y^2}\right\}$ 表示以 $(0,0)$ 为圆心，1 为半径的圆在 y 轴及右侧部分的点集，

集合 $B=\left\{(x,y)\middle|y=x+b\right\}$ 表示直线 $y=x+b$ 上的点集，

$\because$ 集合 A 与集合 B 都是点集，集合 $A\cap B$ 中有 2 个元素，



由 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$，解得 $b=\pm\sqrt{2}$，

由图可知 $-\sqrt{2}<b\leq -1$，即 $b\in\left(-\sqrt{2},-1\right]$.

故答案为：$\left(-\sqrt{2},-1\right]$

15. 【答案】①③④

【分析】①利用面面平行的判定定理求解，②利用空间直角坐标系求解，③分析点 P 在 AC 上运动时 PE 的变化情况即可求解，④根据图中的几何关系作出平面 PB_1D_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截面即可求解.

【详解】对于①，当点 P 和点 A 重合时，平面 PB_1D_1 // 平面 C_1BD，

连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O_1，连接 BD 交 AC 于点 O，连接 C_1D , C_1B , C_1O , AO_1，

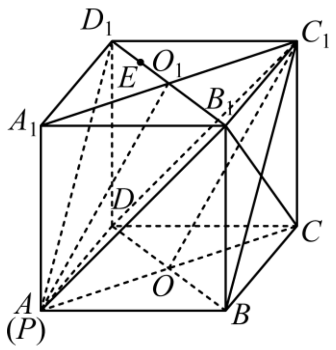
$\because O_1C_1 \,//\, PO$,且 $O_1C_1=AO \,//\, AO$,$\therefore$ 四边形 O_1POC_1 平行四边形，$\therefore O_1P \,//\, C_1O$，

$\because O_1P\not\subset$ 平面 C_1BD，$C_1O\subset$ 平面 C_1BD，$\therefore O_1P \,//\, C_1BD$，

$\because B_1D_1 \,//\, BD$，$B_1D_1\not\subset$ 平面 C_1BD，$BD\subset$ 平面 C_1BD，$\therefore B_1D_1 \,//\, C_1BD$，

又 $\because B_1D_1\cap PO_1=O_1$, B_1D_1 , $PO_1\subset$ 平面 PB_1D_1，$\therefore PB_1D_1$ // 平面 C_1BD；

故①正确；



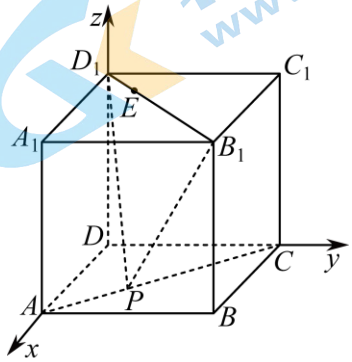
对于②，分别以 DA, DC, DD_1 所在的直线为 x 轴，y 轴，z 轴，

由几何关系可知 $PD_1 = PB_1$，要使 $\triangle PB_1D_1$ 是等腰直角三角形，则 $PD_1 \perp PB_1$，

由已知得 $D_1(0,0,4), B_1(4,4,4)$，设点 $P(4-a,a,0)$，

则 $\overrightarrow{PD_1}=(a-4,-a,4)$，$\overrightarrow{PB_1}=(a,4-a,4)$，

$\because \overrightarrow{PD_1}\cdot\overrightarrow{PB_1}=0$，$\therefore a^2-4a+8=0$，此方程无解，则不存在点 P，使得 $\triangle PB_1D_1$ 是等腰直角三角形，故②不正确；



对于③，因为 $D_1E=\frac{1}{4}B_1D_1=\sqrt{2}$，则 $E(1,1,4), A(4,0,0), C(0,4,0)$，

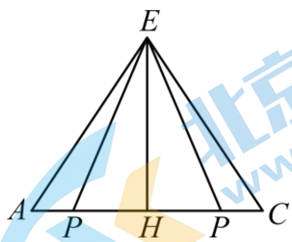
即 $EA=EC=\sqrt{26}>5$，则 P 轨迹是在 AC 上的线段，不包括端点 A 、C，如下图所示，

由已知得$\triangle EAC$ 为等腰三角形，则$\triangle EAC$ 底边上的高 $EH=3\sqrt{2}<5$，随着 P 向点 C 运动，EP 逐渐减小，

故在线段 AH 上存在一点 P 使得 $EP=5$，

同理可知靠近点 C 处也存在一点 P 使得 $EP=5$，

设线段 $PE=5$，由勾股定理可知 $PH=\sqrt{7}$，所以点 P 轨迹的长度为 $2\sqrt{7}$，故③正确；



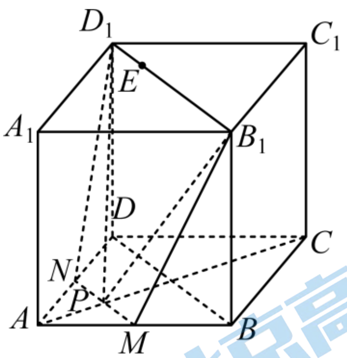
对于④，连接 BD，过点 P 作 BD 的平行线交 AB, AD 于点 M, N，连接 B_1M, D_1N，

则 MND_1B_1 为平面 PB_1D_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形，

由已知得 $AP=\frac{1}{4}AC=\sqrt{2}$,由△ AMN ∽△ ABD 可知 $MN=2\sqrt{2}$，

又因为 $MB_1=ND_1=2\sqrt{5}$,且 MN // B_1D_1 ,所以四边形 MND_1B_1 为等腰梯形，

其中梯形的高 $h=3\sqrt{2}$，所以截面面积为 $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\times3\sqrt{2}=18$，故④正确；



故答案为：①③④

三、解答题，6 小题，共 85 分，解答题应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】（1） 2π；

（2）最大值为 1， $x=\frac{\pi}{6}$.

【分析】（1）根据给定的函数式，利用正弦函数的周期公式计算即可.

（2）求出相位的范围，再利用正弦函数的性质求出最大值即得.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$.

【小问 2 详解】

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时， $x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$，因此当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)_{\max}=1$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值是 1，对应 $x=\frac{\pi}{6}$.

17. 【答案】（1） $2x-y-1=0$；

（2）5.

【分析】（1）求出直线 BC 的斜率，进而求出 BC 边的方程.

（2）求出直线 BC 的方程，由点到直线的距离求解三角形的高，进而求出面积.

【小问 1 详解】

直线 BC 的斜率为 $\frac{1-(-3)}{1-(-1)}=2$，因此 BC 边上的直线方程为 $y-1=2(x-1)$，所以 BC 边上的直线方程

为：$2x-y-1=0$.

【小问 2 详解】

直线 BC 的方程为 $2x-y-1=0$，

于是点 A 到直线 BC 的距离为：$d=\frac{|3\times 2-0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，而 $|BC|=\sqrt{(-1-1)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times|BC|\times d=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$.

18.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{2}{3}$

（3）$\frac{4}{3}$

【分析】（1）（2）（3）建立空间直角坐标系，利用空间向量法计算可得.

【小问 1 详解】

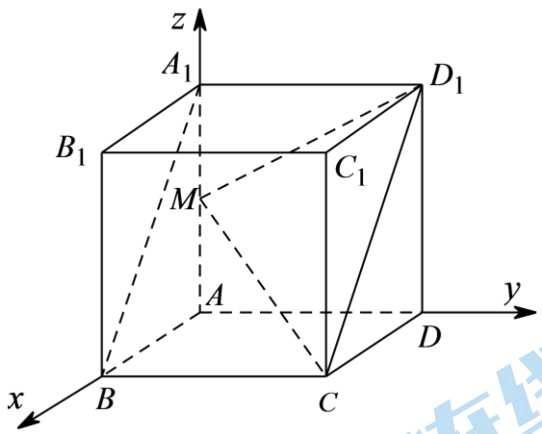
证明：如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 是 AA_1 的中点，

所以 $A(0,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),M(0,0,1),D_1(0,2,2),A_1(0,0,2),B(2,0,0)$，$C_1(2,2,2)$.

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2),\overrightarrow{BC_1}=(0,2,2)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BC_1}=2\times 0+2\times 2+(-2)\times 2=0$，所以 $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BC_1}$，即 $A_1C\perp BC_1$；



【小问 2 详解】

解：由（1）可得 $\overrightarrow{MD_1}=(0,2,1),\overrightarrow{MC}=(2,2,-1)$.

设平面 MCD_1 的法向量为 $\vec{u}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MD_1}=2y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MC}=2x+2y-z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $z=-2$，$x=-2$，所以 $\vec{u}=(-2,1,-2)$，

显然平面 ADD_1A_1 的法向量可以为 $\vec{n}=(1,0,0)$，

设平面 ADD_1A_1 与平面 MCD_1 夹角为 θ，所以 $\cos\theta=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{2}{3}$，

所以平面 ADD_1A_1 与平面 MCD_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

【小问 3 详解】

解：因为 $\overrightarrow{D_1D}=(0,0,-2)$，设点 D 到平面 MCD_1 的距离为 d，

则 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{D_1D}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{4}{3}$，故点 D 到平面 MCD_1 的距离为 $\dfrac{4}{3}$.

19.【答案】(1) $y=4$；

(2) $3x+4y-16=0$ 或 $x=0$.

【分析】(1) 由题意得点 M 在圆 C 上，由切线与过切点的半径垂直可得切线方程；

(2) 求出圆心到直线的距离，利用点到直线距离公式求解，注意分类讨论.

【小问 1 详解】

圆的标准方程是 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，圆心为 $C(1,2)$，半径为 $r=2$，

由 $|MC|=2$ 知点 M 在圆 C 上，且 MC 与 x 轴垂直，因此切线方程是 $y=4$；

【小问 2 详解】

由题意圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

因此直线 $x=0$ 满足题意，

再设直线 l 的斜率存在时的方程为 $y=kx+4$，由 $d=\dfrac{|k-2+4|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ 解得 $k=-\dfrac{3}{4}$，

直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4}x+4$，即 $3x+4y-16=0$，

综上，直线 l 方程为 $3x+4y-16=0$ 或 $x=0$.

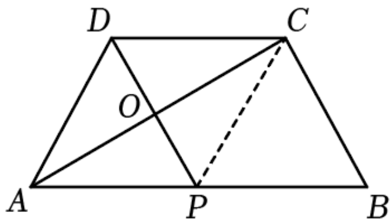
20.【答案】(1) 证明见解析

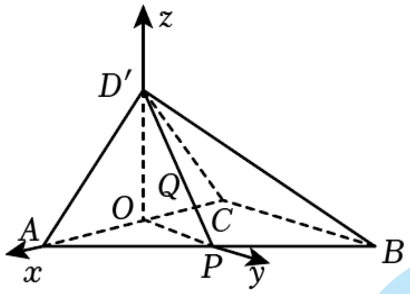
(2) 存在，$\dfrac{PQ}{PD'}=\dfrac{1}{3}$

【分析】(1) 根据菱形和中位线的性质得到 $OP\parallel BC$，然后根据线面平行的判定定理证明即可；

(2) 根据面面垂直和菱形的性质得到 OD'，OA，OP 两两垂直，然后建立空间直角坐标系，利用空间向量和 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$ 列方程，解方程得到 λ 即可.

【小问 1 详解】





在梯形 $ABCD$ 中连接 CP，

因为 $AB=2CD$， $AB // CD$， P 为 AB 中点，所以 $AP=AD=CD$， $AP// CD$，

所以四边形 $APCD$ 为菱形，

所以 O 是 AC 中点，

又 P 为 AB 中点，所以 $OP // BC$，

因为 $OP \subset$ 平面 POD'， $BC \not\subset$ 平面 POD'，

所以 BC // 平面 POD'.

【小问 2 详解】

因为四边形 $APCD$ 为菱形，所以 $AC \perp OP$， $AC \perp OD$，即 $AC \perp OD'$，

因为平面 $ACB \perp$ 平面 ACD'，平面 $ACB \cap$ 平面 $ACD' = AC$， $OD' \subset$ 平面 ACD'，

所以 $OD' \perp$ 平面 ABC，

因为 $OA, OP \subset$ 平面 ABC，所以 $OD' \perp OA$， $OD' \perp OP$，

所以 OD'， OA， OP 两两垂直，

则以 O 为原点，分别以 OA, OP, OD' 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

因为 $\angle BAD = 60°$，所以 $OA = OC = \sqrt{3}$， $OD = OP = 1$，

$P(0,1,0)$， $D'(0,0,1)$， $C\left(-\sqrt{3},0,0\right)$， $B\left(-\sqrt{3},2,0\right)$， $\overrightarrow{PD'}=(0,-1,1)$， $\overrightarrow{BC}=(0,-2,0)$，

$\overrightarrow{BD'}=\left(\sqrt{3},-2,1\right)$， $\overrightarrow{CP}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，

设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD'}=(0,-\lambda,\lambda)$，则 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}=\left(\sqrt{3},1-\lambda,\lambda\right)$，

设平面 BCD' 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD'}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2y=0\\ \sqrt{3}x-2y+z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=0$， $z=-3$，

所以 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},0,-3\right)$，

因为 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$，

所以$\left|\cos\left\langle \overrightarrow{CQ},\vec{m}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CQ}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{CQ}\right|\left|\vec{m}\right|}=\frac{\left|\left(\sqrt{3},1-\lambda,\lambda\right)\cdot\left(\sqrt{3},0,-3\right)\right|}{\sqrt{3+\left(1-\lambda\right)^2+\lambda^2}\times\sqrt{3+0+9}}=\frac{\sqrt{6}}{8}$，解得$\lambda=\frac{1}{3}$或2（舍去），

所以线段PD'上存在点Q使得CQ与平面BCD'所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{8}$，$\frac{PQ}{PD'}=\frac{1}{3}$.

21.【答案】(1) $\left(x-4\right)^2+\left(y-1\right)^2=16$

(2) $4\sqrt{34}$

(3) 11

【分析】(1) 根据定义化简$\frac{PA}{PB}=\sqrt{2}$即可得圆M的方程为$\left(x-4\right)^2+\left(y-1\right)^2=16$；

(2) 画出图象，利用几何关系可知当$\left|QM\right|$取最小值时，四边形$QEMF$的面积最小，写出表达式即可求出其最小值为$4\sqrt{34}$；

(3) 易知直线l_2过圆心，可得$4a+b=1$，将式子化简后利用基本不等式即可求得最小值为11.

【小问1详解】

根据题意设$P\left(x,y\right)$，由$\frac{PA}{PB}=\sqrt{2}$可得$\frac{\sqrt{\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2}}{\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2}}=\sqrt{2}$，

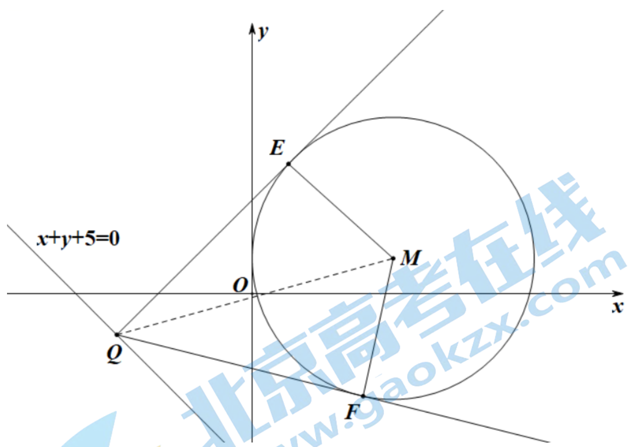
整理可得$\left(x-4\right)^2+\left(y-1\right)^2=16$，

即圆M的方程为$\left(x-4\right)^2+\left(y-1\right)^2=16$

【小问2详解】

由(1)可知圆M的圆心$M\left(4,1\right)$，半径$r=4$

如下图所示：



易知四边形$QEMF$的面积$S_{QEMF}=2S_{\triangle QEM}=2\times\frac{1}{2}\times\left|EM\right|\times\left|QE\right|=4\left|QE\right|$，

由勾股定理可知$\left|QE\right|=\sqrt{\left|QM\right|^2-r^2}=\sqrt{\left|QM\right|^2-16}$，

所以当$|QE|$取最小值，也即$|QM|$取最小值时，四边形$QEMF$的面积最小；

显然当$QM\perp l_1$时，$|QM|_{\min}=\dfrac{|4+1+5|}{\sqrt{1+1}}=5\sqrt{2}$，

所以$S_{QEMF}=4\times\sqrt{|QM|_{\min}^2-16}=4\sqrt{34}$

即可得四边形$QEMF$的面积的最小值为$4\sqrt{34}$；

【小问 3 详解】

若直线l_2始终平分圆M的面积，则可知l_2过圆心$M(4,1)$，

即$4a+b-1=0$，所以$4a+b=1$，

又$\dfrac{a(b+1)+b(a+1)}{ab}=\dfrac{2ab+a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+2$，

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+2=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(4a+b)+2=4+\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}+1+2\geq 7+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}=11$；

当且仅当$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4a}{b}$时，即$a=\dfrac{1}{6},b=\dfrac{1}{3}$时，等号成立；

所以$\dfrac{a(b+1)+b(a+1)}{ab}$的最小值为11.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！