西 城 区 高 三 统 一 测 试

数　　学(理科)

2018.4

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至6页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid 3x+2>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$

(A) $\{x\in\mathbf{R}\mid x<-1\}$　　(B) $\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<-\frac{2}{3}\}$

(C) $\{x\in\mathbf{R}\mid -\frac{2}{3}<x<3\}$　　(D) $\{x\in\mathbf{R}\mid x>3\}$

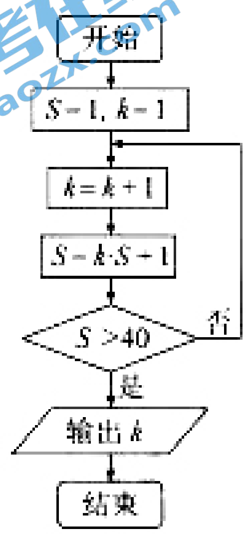
2. 执行如图所示的程序框图，输出的 k 值为

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

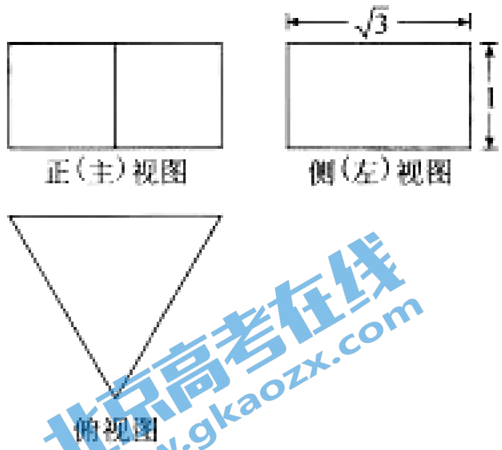


3. 已知圆的方程为 $x^2+y^2-2y=0$．以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系．该圆的极坐标方程为

(A) $\rho=-2\sin\theta$　　(B) $\rho=2\sin\theta$

(C) $\rho=-2\cos\theta$　　(D) $\rho=2\cos\theta$

4. 正三棱柱的三视图如图所示，该正三棱柱的表面积是



(A) $3\sqrt{3}$　　(B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

(C) $6+\sqrt{3}$　　(D) $6+2\sqrt{3}$

5. 已知 O 是正方形 $ABCD$ 的中心．若 $\overrightarrow{DO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，其中 λ，$\mu\in\mathbf{R}$，则 $\dfrac{\lambda}{\mu}=$

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) -2　　(C) $-\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{2}$

6. 设函数 $f(x)=x^2+bx+c$．则"$f(x)$有两个不同的零点"是"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)<0$"的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2-4x+1, & x>0,\\ 2\cdot 3^x, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $y=f(x)$ 的图象上关于原点 O 对称的点共有

(A) 0 对　　(B) 1 对　　(C) 2 对　　(D) 3 对

8. 某计算机系统在同一时间只能执行一项任务，且该任务完成后才能执行下一项任务．现有三项任务 U，V，W，计算机系统执行这三项任务的时间(单位：s)依次为 a，b，c，其中 $a<b<c$．一项任务的"相对等待时间"定义为从开始执行第一项任务到完成该任务的时间与计算机系统执行该任务的时间之比．下列四种执行顺序中，使三项任务"相对等待时间"之和最小的是

(A) U→V→W　　(B) V→W→U　　(C) W→U→V　　(D) U→W→V

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 若复数 $(a+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})$ 的实部与虚部相等，则实数 $a=$____.

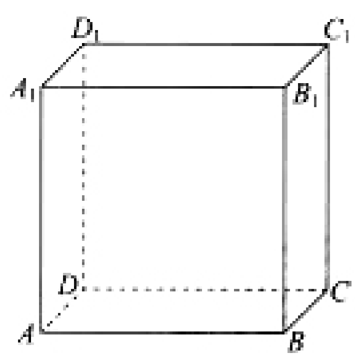
10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $a_1=2$，$S_4=20$，则 $a_3=$____；$S_n=$____.

11. 已知抛物线 $y^2=-8x$ 的焦点与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$ 的一个焦点重合，则 $a=$____；双曲线的渐近线方程是____.

12. 设 $\omega>0$，若函数 $y=\cos^2\omega x$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，则 $\omega=$____.

13. 安排甲、乙、丙、丁 4 人参加 3 个运动项目，每人只参加一个项目，每个项目都有人参加．若甲、乙 2 人不能参加同一个项目，则不同的安排方案的种数为____.（用数字作答）

14. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，$BC=1$，点 P 在侧面 A_1ABB_1 上．若点 P 到直线 AA_1 和 CD 的距离相等，则 A_1P 的最小值是____.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，已知$\sqrt{3}a\cdot\sin C=c\cdot\sin 2A$．

（Ⅰ）求$\angle A$的大小；

（Ⅱ）若$a=\sqrt{7}$，$b=2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积．

16．（本小题满分 13 分）

某企业 2017 年招聘员工，其中 A、B、C、D、E 五种岗位的应聘人数、录用人数和录用比例（精确到 1%）如下：

岗位	男性应聘人数	男性录用人数	男性录用比例	女性应聘人数	女性录用人数	女性录用比例
A	269	167	62%	40	24	60%
B	40	12	30%	202	62	31%
C	177	57	32%	184	59	32%
D	44	26	59%	38	22	58%
E	3	2	67%	3	2	67%
总计	533	264	50%	467	169	36%

（Ⅰ）从表中所有应聘人员中随机选择 1 人，试估计此人被录用的概率；

（Ⅱ）从应聘 E 岗位的 6 人中随机选择 2 人．记X为这 2 人中被录用的人数，求X的分布列和数学期望；

（Ⅲ）表中 A、B、C、D、E 各岗位的男性、女性录用比例都接近（二者之差的绝对值不大于 5%），但男性的总录用比例却明显高于女性的总录用比例．研究发现，若只考虑其中某四种岗位，则男性、女性的总录用比例也接近，请写出这四种岗位．（只需写出结论）

17.（本小题满分 14 分）

如图 1，在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC的中点，O为DE的中点，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$. 将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，使得平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，如图 2.

（Ⅰ）求证：$A_1O\perp BD$；

（Ⅱ）求直线A_1C和平面A_1BD所成角的正弦值；

（Ⅲ）线段A_1C上是否存在点F，使得直线DF和BC所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$？若存在，求出$\frac{A_1F}{A_1C}$的值；若不存在，说明理由.

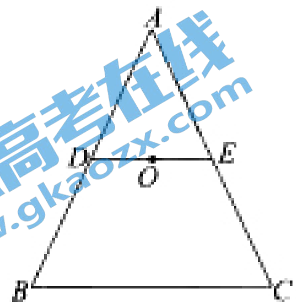


图 1

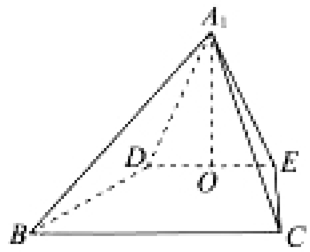


图 2

18.（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=e^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线与直线$y=-\frac{x}{e}$垂直，求a的值；

（Ⅱ）当$a\in(0,\ln 2)$时，证明：$f(x)$存在极小值.

19.（本小题满分 14 分）

已知$\odot O$：$x^2+y^2=4$和椭圆C：$x^2+2y^2=4$，F是椭圆C的左焦点.

（Ⅰ）求椭圆C的离心率和点F的坐标；

（Ⅱ）点P在椭圆C上，过P作x轴的垂线，交$\odot O$于点Q（P，Q不重合），l是过点Q的$\odot O$的切线. $\odot F$的圆心为点F，半径长为$|PF|$. 试判断直线l与$\odot F$的位置关系，并证明你的结论.

20.（本小题满分 13 分）

数列 A_n：$a_1, a_2, \cdots, a_n (n\geqslant 2)$ 满足：$a_k<1 (k=1,2,\cdots,n)$. 记 A_n 的前 k 项和为 S_k，并规定 $S_0=0$. 定义集合 $E_n=\{k\in \mathbf{N}^*, k\leqslant n \mid S_k>S_j, j=0,1,\cdots,k-1\}$.

（Ⅰ）对数列 A_5：$-0.3, 0.7, -0.1, 0.9, 0.1$，求集合 E_5；

（Ⅱ）若集合 $E_n=\{k_1, k_2, \cdots, k_m\} (m>1, k_1<k_2<\cdots<k_m)$，证明：$S_{k_{i+1}}-S_{k_i}<1$，其中 $i=1,2,\cdots,m-1$；

（Ⅲ）给定正整数 C. 对所有满足 $S_n>C$ 的数列 A_n，求集合 E_n 的元素个数的最小值.

西城区高三统一测试

数学（理科）参考答案及评分标准

2018.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．D　　2．C　　3．B　　4．D

5．B　　6．C　　7．C　　8．A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．-7　　10．6，n^2-n　　11．$\sqrt{3}$，$x\pm\sqrt{3}y=0$

12．2　　13．30　　14．$\sqrt{3}$

注：第 10，11 题第一空 3 分，第二空 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\sqrt{3}a\cdot\sin C=c\cdot\sin 2A$，

所以 $\sqrt{3}\dfrac{a}{c}\cdot\sin C=2\sin A\cos A$．　　［1 分］

在△ABC 中，由正弦定理得 $\sqrt{3}\dfrac{\sin A}{\sin C}\cdot\sin C=2\sin A\cos A$．　　［3 分］

所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．　　［4 分］

因为 $0<A<\pi$，　　［5 分］

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$．　　［6 分］

（Ⅱ）在△ABC 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $(\sqrt{7})^2=(2\sqrt{3})^2+c^2-2(2\sqrt{3})\cdot c\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　　［8 分］

整理得 $c^2-6c+5=0$，　　［9 分］

解得 $c=1$，或 $c=5$，均适合题意．　　［11 分］

当 $c=1$ 时，△ABC 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．　　［12 分］

当 $c=5$ 时，△ABC 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$．　　［13 分］

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 表中所有应聘人员总数为 $533+467=1000$，

被该企业录用的人数为 $264+169=433$，

所以 从表中所有应聘人员中随机选择 1 人，此人被录用的概率约为 $P=\dfrac{433}{1000}$．[3 分]

（Ⅱ）X 可能的取值为 $0,1,2$．[4 分]

因为应聘 E 岗位的 6 人中，被录用的有 4 人，未被录用的有 2 人，[5 分]

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$；　　$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$．[8 分]

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{2}{5}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{15}+1\times\dfrac{8}{15}+2\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{3}$．[10 分]

（Ⅲ）这四种岗位是：B、C、D、E．[13 分]

17.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 在△ABC 中，D，E 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $DE/\!/BC$，$AD=AE$．

所以 $A_1D=A_1E$，又 O 为 DE 的中点，

所以 $A_1O\perp DE$．[1 分]

因为 平面 $A_1DE\perp$ 平面 $BCED$，且 $A_1O\subset$ 平面 A_1DE，

所以 $A_1O\perp$ 平面 $BCED$，[3 分]

所以 $A_1O\perp BD$．[4 分]

（Ⅱ）取 BC 的中点 G，连接 OG，所以 $OE\perp OG$．

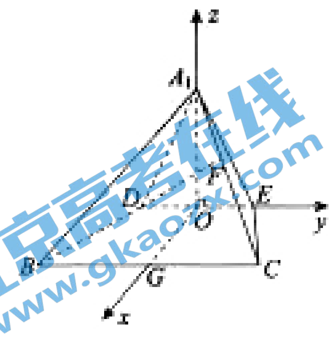
由（Ⅰ）得 $A_1O\perp OE$，$A_1O\perp OG$．

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$．[5 分]

由题意得，$A_1(0,0,2)$，$B(2,-2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,-1,0)$．

所以 $\overrightarrow{A_1B}=(2,-2,-2)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,-1,-2)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2)$．

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，



则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2y-2z=0,\\ -y-2z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=2$，$z=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$． ［7 分］

设直线 A_1C 和平面 A_1BD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

所以 直线 A_1C 和平面 A_1BD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$． ［9 分］

（III）线段 A_1C 上存在点 F 适合题意．

设 $\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，其中 $\lambda\in[0,1]$． ［10 分］

设 $F(x_1,y_1,z_1)$，则有 $(x_1,y_1,z_1-2)=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，

所以 $x_1=2\lambda, y_1=2\lambda, z_1=2-2\lambda$，从而 $F(2\lambda,\ 2\lambda,\ 2-2\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{DF}=(2\lambda,2\lambda+1,2-2\lambda)$，又 $\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{DF},\overrightarrow{BC}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{4|2\lambda+1|}{4\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}$． ［12 分］

令 $\dfrac{|2\lambda+1|}{\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

整理得 $3\lambda^2-7\lambda+2=0$． ［13 分］

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，舍去 $\lambda=2$．

所以 线段 A_1C 上存在点 F 适合题意，且 $\dfrac{A_1F}{A_1C}=\dfrac{1}{3}$． ［14 分］

18．（本小题满分 13 分）

解：（I）$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=e^x\cdot(a+\dfrac{1}{x}+\ln x)+e^x\cdot(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})$

$$=e^x\cdot(a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x)．$$ ［2 分］

依题意，有 $f'(1)=e\cdot(a+1)=e$， ［4 分］

解得 $a=0$． ［5 分］

（Ⅱ）由 $f'(x)=e^x\cdot(a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x)$ 及 $e^x>0$ 知，$f'(x)$ 与 $a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$ 同号．

令 $g(x)=a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$，［6 分］

则 $g'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^3}=\frac{(x-1)^2+1}{x^3}$．［8 分］

所以 对任意 $x\in(0,+\infty)$，有 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增．［9 分］

因为 $a\in(0,\ln 2)$，所以 $g(1)=a+1>0$，$g(\frac{1}{2})=a+\ln\frac{1}{2}<0$，

故存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $g(x_0)=0$．［11 分］

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 上的情况如下：

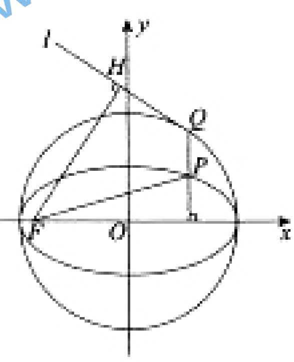
x	$(\frac{1}{2},x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,1)$ 上单调递增．

所以 $f(x)$ 存在极小值 $f(x_0)$．［13 分］

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．［1 分］



所以 $a^2=4$，$b^2=2$，从而 $c^2=a^2-b^2=2$．

因此 $a=2$，$c=\sqrt{2}$．

故椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．［3 分］

椭圆 C 的左焦点 F 的坐标为 $(-\sqrt{2},0)$．［4 分］

（Ⅱ）直线 l 与圆 F 相切．证明如下：［5 分］

设 $P(x_0,y_0)$，其中 $-2<x_0<2$，则 $x_0^2+2y_0^2=4$，［6 分］

依题意可设 $Q(x_0,y_1)$，则 $x_0^2+y_1^2=4$．［7 分］

直线 l 的方程为 $y-y_1=-\frac{x_0}{y_1}(x-x_0)$，

整理为 $x_0x+y_1y-4=0$. [9 分]

所以圆 F 的圆心 F 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|-\sqrt{2}x_0-4|}{\sqrt{x_0^2+y_1^2}}=|\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_0+2|$. [11 分]

因为 $|PF|^2=(x_0+\sqrt{2})^2+y_0^2=(x_0+\sqrt{2})^2+\dfrac{1}{2}(4-x_0^2)=\dfrac{1}{2}x_0^2+2\sqrt{2}x_0+4$, [13 分]

所以 $|PF|^2=d^2$,

即 $|PF|=d$,

所以 直线 l 与圆 F 相切. [14 分]

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $S_0=0$，$S_1=-0.3$，$S_2=0.4$，$S_3=0.3$，$S_4=1.2$，$S_5=1.3$， [2 分]

所以 $E_5=\{2,4,5\}$. [3 分]

（Ⅱ）由集合 E_n 的定义知 $S_{k_{i+1}}>S_{k_i}$，且 k_{i+1} 是使得 $S_k>S_{k_i}$ 成立的最小的 k，

所以 $S_{k_{i+1}-1}\leqslant S_{k_i}$. [5 分]

又因为 $a_{k_{i+1}}<1$，

所以 $S_{k_{i+1}}=S_{k_{i+1}-1}+a_{k_{i+1}}$ [6 分]

$<S_{k_i}+1$.

所以 $S_{k_{i+1}}-S_{k_i}<1$. [8 分]

（Ⅲ）因为 $S_n>S_0$，所以 E_n 非空.

设集合 $E_n=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$，不妨设 $k_1<k_2<\cdots<k_m$，

则由（Ⅱ）可知 $S_{k_{i+1}}-S_{k_i}<1\ (i=1,2,\cdots,m-1)$，

同理 $S_{k_1}-S_0<1$，且 $S_n\leqslant S_{k_m}$.

所以 $S_n=(S_n-S_{k_m})+(S_{k_m}-S_{k_{m-1}})+\cdots+(S_{k_2}-S_{k_1})+(S_{k_1}-S_0)$

$<0+\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{m个}=m$.

因为 $S_n>C$，所以 E_n 的元素个数 $m\geqslant C+1$. [11 分]

取常数数列 A_n： $a_i=\dfrac{C+1}{C+2}$ $(i=1,2,\cdots,C+1)$，并令 $n=C+1$，

则 $S_n=\dfrac{(C+1)^2}{C+2}=\dfrac{C^2+2C+1}{C+2}>C$，适合题意，

且 $E_n=\{1,2,\cdots,C+1\}$，其元素个数恰为 $C+1$，

综上，E_n 的元素个数的最小值为 $C+1$． [13 分]