大兴区 2019-2020 学年第二学期期末高一年级

数 学 试 卷

一、选择题（共 10 小题）．

1．复数 $1+i^2$＝（　　）

A．0　　B．2　　C．$2i$　　D．$1-i$

2．在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$＝（　　）

A．$\overrightarrow{CA}$　　B．$\overrightarrow{AC}$　　C．$\overrightarrow{BD}$　　D．$\overrightarrow{DB}$

3．某中学高一年级有 280 人，高二年级有 320 人，高三年级有 400 人，为了解学校高中学生视力情况，现用比例分配的分层随机抽样方法抽取一个容量为 50 的样本，则高一年级应抽取的人数为（　　）

A．14　　B．16　　C．28　　D．40

4．若单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$=（　　）

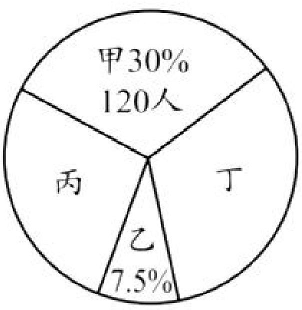
A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．1

5．若 a 和 b 是异面直线，a 和 c 是平行直线，则 b 和 c 的位置关系是（　　）

A．平行　　B．异面

C．异面或相交　　D．相交、平行或异面

6．甲、乙、丙、丁四组人数分布如图所示，根据扇形统计图的情况可以知道丙、丁两组人数和为（　　）



A．150　　B．250　　C．300　　D．400

7．已知复数 z 满足（$z-1$）i＝$1+i$，则 z＝（　　）

A．$-2-i$　　B．$-2+i$　　C．$2+i$　　D．$2-i$

8．若长方体所有顶点都在一个球面上，长、宽、高分别是 3，2，1，则这个球面的面积为（　　）

A．9π　　B．12π　　C．14π　　D．18π

9．设$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，则“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$”是“$\vec{a}$与$\vec{b}$共线”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知△ABC 是等腰三角形，$AB=AC=5$，$BC=6$，点 P 在线段 AC 上运动，则 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$的取值范围是（　　）

A．[3，4]　　　B．$[\frac{12}{5}$，6]　　　C．[6，8]　　　D．$[\frac{24}{5}$，8]

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．设复数 $z=1+i$，则 z 的模$|z|=$_______．

12．数据 19，20，21，23，25，26，27，则这组数据的方差是_______．

13．三棱锥的三条侧棱两两垂直，长分别为 1，2，3，则这个三棱锥的体积为_______．

14．已知$\vec{a}=$（1，2），$\vec{b}=$（2，y），$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 $y=$_______．

15．在△ABC 中，$b=10$，$A=\frac{\pi}{6}$．

①若 $a=5$，则角 B 大小为_______；

②若角 B 有两个解，则 a 的取值范围是_______．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．已知复数 $z=(m^2-m)+(m+3)i$（$m\in R$）在复平面内对应点 Z.

（Ⅰ）若 $m=2$，求 $z\cdot\overline{z}$;

（Ⅱ）若点 Z 在直线 $y=x$ 上，求 m 的值．

17．已知三个点 A（2，1），B（3，2），D（－1，4）．

（Ⅰ）求证：$AB\perp AD$;

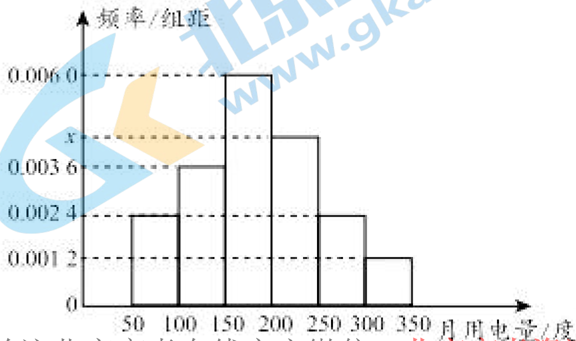
（Ⅱ）若四边形 $ABCD$ 为矩形，求点 C 的坐标及矩形 $ABCD$ 两对角线所成锐角的余弦值．

18．为了解某小区 7 月用电量情况，通过抽样，获得了 100 户居民 7 月用电量（单位：度），将数据按照[50，100)，[100，150)，…，[300，350]分成六组，制成了如图所示的频率分布直方图．

（Ⅰ）求频率分布直方图中 x 的值；

（Ⅱ）已知该小区有 1000 户居民，估计该小区 7 月用电量不低于 200 度的户数，并说明理由；

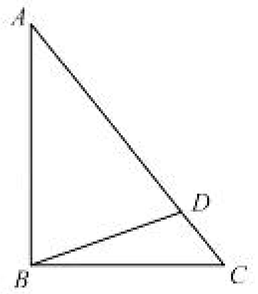
（Ⅲ）估计该小区 85%的居民 7 月用电量的值，并说明理由．



19．如图，在△ABC中，$\angle ABC=90°$，$AB=4$，$BC=3$，点D在线段AC上，且$AD=4DC$.

（Ⅰ）求BD的长；

（Ⅱ）求$\sin\angle BDC$的值.

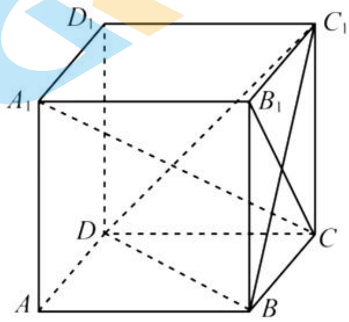


20．如图所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=1$.

（Ⅰ）求证：$BD\perp A_1C$；

（Ⅱ）求证：平面$BDC_1\perp$平面A_1B_1C；

（Ⅲ）用一张正方形的纸把正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$完全包住，不将纸撕开，求所需纸的最小面积.（结果不要求证明）

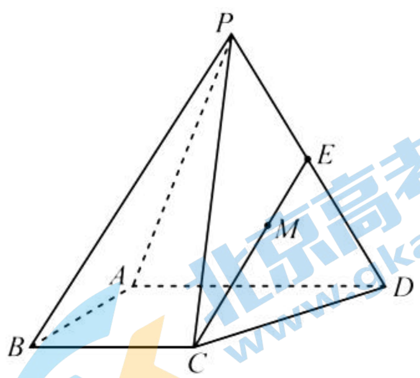


21．如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，$BC\parallel$平面PAD，$BC=\frac{1}{2}AD$，E是PD的中点.

（Ⅰ）求证：$BC\parallel AD$；

（Ⅱ）求证：$CE\parallel$平面PAB；

（Ⅲ）若M是线段CE上一动点，则线段AD上是否存在点N，使$MN\parallel$平面PAB？说明理由.



参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．【分析】直接利用虚数单位 i 的运算性质化简求值．

解：∵$i^2=-1$，

∴$1+i^2=1-1=0$．

故选：A．

2．【分析】利用向量平行四边形法则即可得出．

解：由向量平行四边形法则可得：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，

故选：B．

3．【分析】先求出抽取样本的比例是多少，再计算从高一学生中应抽取的人是多少．

解：根据题意，得；

抽取样本的比例是$\dfrac{50}{280+320+400}=\dfrac{1}{20}$，

∴从高一学生中应抽取的人数为 $280\times\dfrac{1}{20}=14$．

故选：A．

4．【分析】直接利用向量的数量积求解即可．

解：单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

故选：B．

5．【分析】借助正方体模型，找出三条直线 a，b，c，符合题意，判断 b，c 的位置关系．

解：考虑正方体 $ABCD-A'B'C'D'$中，直线 AB 看做直线 a，直线 $B'C'$看做直线 b，

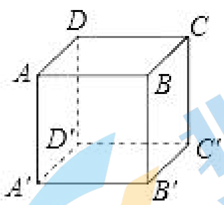
即直线 a 和直线 b 是异面直线，

若直线 CD 看做直线 c，可得 a，c 平行，则 b，c 异面；

若直线 $A'B'$看做直线 c，可得 a，c 平行，则 b，c 相交．

若 b，c 平行，由 a，c 平行，可得 a，b 平行，这与 a，b 异面矛盾，故 b，c 不平行．

故选：C．



6．【分析】先根据甲组人数及其所占百分比可得总人数，再求出丙、丁两组人数占总人数的百分比，即可得解．

解：∵甲组人数为 120 人，占总人数的百分比为 30%，

∴总人数为＝120÷30%＝400 人，

∵丙、丁两组人数和占总人数的百分比为 1 - 30% - 7.5%＝62.5%

∴丙、丁两组人数和为 400×62.5%=250 人.

故选：B.

7. 【分析】把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算化简得答案.

解：由（z - 1）i=1+i，得 $z-1=\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)(-i)}{-i^2}=1-i$，

∴z=2 - i.

故选：D.

8. 【分析】求出长方体的对角线的长度，得到外接球的直径，然后求解外接球的表面积.

解：长方体所有顶点都在一个球面上，长、宽、高分别是 3，2，1，

所以长方体的外接球的直径为：$\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$，

外接球的半径为：$\frac{\sqrt{14}}{2}$.

则这个球面的面积为：$4\times(\frac{\sqrt{14}}{2})^2\pi=14\pi$.

故选：C.

9. 【分析】结合向量数量积的性质及向量共线的定义即可求解.

解：因为$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，由$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$两边平方可得，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$，

故夹角θ=0，即$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，

当$\vec{a}$与$\vec{b}$共线时，夹角θ=0 或π，此时$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$不一定成立.

故选：A.

10. 【分析】以 BC 的中点 O 为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴，OA 所在直线为 y 轴建立直角坐标系，分别求得 B，C，A 的坐标，可得直线 AC 的方程，设 P（m，n），（$0\le n\le4$），即有 $m=3-\frac{3}{4}n$，再由向量的运算和模的公式，可得 n 的函数，结合二次函数的最值求法，可得所求范围.

解：以 BC 的中点 O 为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴，

OA 所在直线为 y 轴建立直角坐标系，

可得 B（﹣3，0），C（3，0），由$|AC|=5$，可得 A（0，4），

直线 AC 的方程为$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$，即 $4x+3y=12$，

可设 P（m，n），（$0\le n\le4$），即有 $m=3-\frac{3}{4}n$，

则 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=|(-3-m,\ -n)+(3-m,\ -n)|=|(-2m,\ -2n)|=2\sqrt{m^2+n^2}$

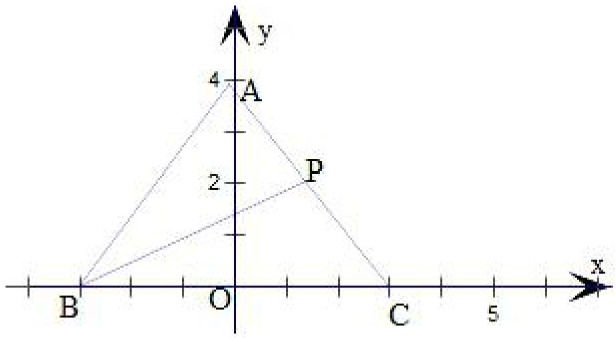
$=2\sqrt{(3-\frac{3}{4}n)^2+n^2}=2\sqrt{\frac{25}{16}(n-\frac{36}{25})^2+\frac{144}{25}}$，

当 $n=\frac{36}{25}\in[0,4]$，可得 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$的最小值为 $2\times\frac{12}{5}=\frac{24}{5}$；

当 n=4 时，可得 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$的最大值为 8，

则 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$的取值范围是$[\frac{24}{5}, 8]$.

故选：D.



二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【分析】直接代入模长公式即可.

解：因为复数 $z=1+i$，则 z 的模$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$;

故答案为：$\sqrt{2}$.

12. 【分析】根据题意，先求出这组数据的平均数，进而由方差计算公式计算可得答案.

解：根据题意，数据 19，20，21，23，25，26，27，其平均数$\overline{x}=\frac{1}{7}$（19+20+21+23+25+26+27）=23，

则其方差 $S^2=\frac{1}{7}[(19-23)^2+(20-23)^2+(21-23)^2+(23-23)^2+(25-23)^2+(26-23)^2+(27-23)^2]$

$=\frac{58}{7}$;

故答案为：$\frac{58}{7}$.

13. 【分析】由已知画出图形，再由等体积法求三棱锥的体积.

解：如图，三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两垂直，

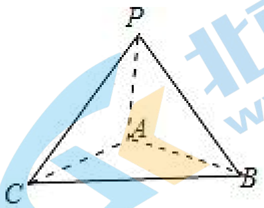
不妨设 $PA=1$，$PB=2$，$PC=3$.

则 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$,

由 $PC\perp PA$，$PC\perp PB$，$PA\cap PB=P$，得 $PC\perp$平面 PAB.

$\therefore V_{P-ABC}=V_{C-PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\times PC=\frac{1}{3}\times1\times3=1$.

故答案为：1.



14. 解：$\vec{a}+\vec{b}=(3, y+2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(-1, 2-y)$,

$\because |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$,

∴$9+(y+2)^2=1+(2-y)^2$，解得 $y=-1$．

故答案为：-1．

15．【分析】①根据正弦定理带入计算即可；

②由正弦定理表示出 $\sin B$，根据 B 的度数确定出 B 的范围，要使三角形有两解确定出 B 的具体范围，利用正弦函数的值域求出 x 的范围即可．

解：①由正弦定理可得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{10\times\frac{1}{2}}{5}=1$，故 $B=\dfrac{\pi}{2}$；

②∵在△ABC 中，$b=10$，$A=\dfrac{\pi}{6}$，

∴由正弦定理得：$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{5}{a}$，

∵$A=30°$，

∴$0<B<150°$，

要使三角形有两解，得到 $30°<B<150°$，且 $B\neq 90°$，即 $\dfrac{1}{2}<\sin B<1$，

∴$\dfrac{1}{2}<\dfrac{5}{a}<1$，

解得：$5<a<10$，即：$a\in(5,10)$．

故答案为：$\dfrac{\pi}{2}$；$(5,10)$．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．【分析】（Ⅰ）由 m 求得 z，再由 $z\cdot\overline{z}=|z|^2$ 求解；

（Ⅱ）由题意，可得 z 的实部与虚部相等，由此可得关于 m 的方程求解．

解：（Ⅰ）∵$m=2$，∴$z=2+5i$，

则 $z\cdot\overline{z}=|z|^2=(\sqrt{2^2+5^2})^2=29$；

（Ⅱ）若点 Z 在直线 $y=x$ 上，则 $m^2-m=m+3$，

即 $m^2-2m-3=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=3$．

17．【分析】（Ⅰ）求出向量的坐标，利用向量的数量积为 0，两向量垂直证出两线垂直．

（Ⅱ）利用向量相等对应的坐标相等求出点 C 的坐标，求出两对角线对应的向量坐标，利用向量的数量积公式求出向量的夹角．

【解答】（Ⅰ）证明：可得 $\overrightarrow{AB}=(1,1)$，$\overrightarrow{AD}=(-3,3)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times(-3)+1\times3=0$，

∴$AB\perp AD$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）及四边形 $ABCD$ 为矩形，得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，设 $C(x,y)$，

则 $(1,1)=(x+1,y-4)$，∴$\begin{cases}x+1=1\\y-4=1\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$，即 $C(0,5)$；

$\therefore \overrightarrow{AC}=(-2, 4)$，$\overrightarrow{BD}=(-4, 2)$，

得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=8+8=16$，$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{5}$，

设 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 夹角为θ，则 $\cos\theta=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}>0$，

∴该矩形对角线所夹的锐角的余弦值 $\frac{4}{5}$.

18. 【分析】（Ⅰ）由概率统计相关知识，各组频率和为 1，列出方程求出 x 的值；

（Ⅱ）由频率分布直方图可得 100 户居民 7 月用电量不低于 200 度的频率为（0.0044+0.0024+0.0012）×50＝0.4，由此得解.

（Ⅲ）由频率分布直方图可得 85%分位数一定位于区间（250.300）内，由此得解.

解：（Ⅰ）由频率分布直方图可得：（0.0024+0.0036+0.0060+x+0.0024+0.0012）×50＝1，

解得：x＝0.0044.

（Ⅱ）由频率分布直方图可得，100 户居民 7 月用电量不低于 200 度的频率为（0.0044+0.0024+0.0012）×50＝0.4，

由此可以估计该小区有 1000 户居民 7 月用电量不低于 200 度的户数为 1000×0.4＝400.

（Ⅲ）由频率分布直方图可得，7 月用电量低于 250 度的频率为 0.82，7 月用电量低于 300 度的频率为 0.94，

所以 85%分位数一定位于区间（250.300）内，

由 $250+50\times\frac{0.85-0.82}{0.94-0.82}=262.5$.

由此估计该小区 85%的居民 7 月用电量约为 262.5 度.

19. 【分析】（*I*）由已知可求 AC，$\cos A$，然后结合余弦定理可求 BD，

（*II*）由已知结合正弦定理即可求解.

解：（*I*）因为 $\angle ABC=90°$，$AB=4$，$BC=3$，

所以 $AC=5$，$\cos A=\frac{4}{5}$，

又点 D 在线段 AC 上，且 $AD=4DC$，

所以 $AD=4$，△ABD 中，由余弦定理可得，$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A$，

$=16+16-2\times4\times4\times\frac{4}{5}=\frac{32}{5}$，

所以 $BD=\frac{4\sqrt{10}}{5}$；

（*II*）因为 $\sin C=\cos A=\frac{4}{5}$，

△BCD 中，由正弦定理可得，$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin C}$，

所以 $\sin\angle BDC=\frac{3\times\frac{4}{5}}{\frac{4\sqrt{10}}{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

20. 【分析】（Ⅰ）连结 AC，推导出 $AC\perp BD$，$BD\perp AA_1$，从而 $BD\perp$平面 A_1AC，由此能证明 $BD\perp A_1C$.

（Ⅱ）推导出 $BC_1\perp B_1C$，$A_1B_1\perp BC_1$，由此能证明 $BC_1\perp$平面 A_1B_1C，从而平面 $BDC_1\perp$平面 A_1B_1C；

（Ⅲ）所需纸的最小面积为 8.

解：（Ⅰ）证明：连结 AC，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

∵底面 $ABCD$ 是正方形，∴$AC\perp BD$，

∵$AA_1\perp$平面 $ABCD$，∴$BD\perp AA_1$，

∵$AA_1\cap AC=A$，∴$BD\perp$平面 A_1AC，

∵$A_1C\subset$平面 A_1AC，∴$BD\perp A_1C$.

（Ⅱ）证明：∵侧面 BCC_1B_1 是正方形，∴$BC_1\perp B_1C$，

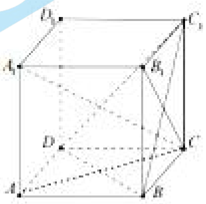
∵$A_1B_1\perp$平面 BCC_1B_1，∴$A_1B_1\perp BC_1$，

∵$A_1B_1\cap B_1C=B_1$，∴$BC_1\perp$平面 A_1B_1C，

∵$BC_1\subset$平面 BDC_1，∴平面 $BDC_1\perp$平面 A_1B_1C；

（Ⅲ）用一张正方形的纸把正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 完全包住，

不将纸撕开，所需纸的最小面积为 8.



21. 【分析】（Ⅰ）根据线面平行的性质定理即可证明；

（Ⅱ）取 PA 的中点 F，连接 EF，BF，利用中位线的性质，平行四边形的性质，以及线面平行的判断定理即可证明；

（Ⅲ）取 AD 中点 N，连接 CN，EN，根据线面平行的性质定理和判断定理即可证明.

【解答】证明：（Ⅰ）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$BC/\!/$平面 PAD，$BC\subset$平面 $ABCD$，

平面 $ABCD\cap$平面 $PAD=AD$，

∴$BC/\!/AD$，

（Ⅱ）取 PA 的中点 F，连接 EF，BF，

∵E 是 PD 的中点，

∴$EF/\!/AD$，$EF=\frac{1}{2}AD$，

又由（Ⅰ）可得 $BC/\!/AD$，$BC=\frac{1}{2}AD$，

∴$BC/\!/EF$，$BC=EF$，

∴四边形 $BCEF$ 是平行四边形，

∴$CE/\!/BF$，

∵$CE\not\subset$平面 PAB，$BF\subset$平面 PAB，

∴CE∥平面 PAB．

（Ⅲ）取 AD 中点 N，连接 CN，EN，

∵E，N 分别为 PD，AD 的中点，

∴EN∥PA，

∵$EN\not\subset$平面 PAB，$PA\subset$平面 PAB，

∴EN∥平面 PAB，

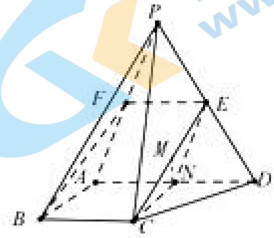
又由（Ⅱ）可得 CE∥平面 PAB，$CE\cap EN=E$，

∴平面 CEN∥平面 PAB，

∵M 是 CE 上的动点，$AN\subset$平面 CEN，

∴MN∥平面 PAB，

∴线段 AD 存在点 N，使得 MN∥平面 PAB．



关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多