2019—2020学年度高三年级上学期期中考试

数学试卷（理科）

命题人：王丽娜　　审核人：陈丽敏

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分。考试时间120分钟。

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

注意事项：答卷Ⅰ前，考生将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。

一、选择题（每小题5分，共60分。下列每小题所给选项只有一项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上）

1．已知曲线 $f\left(x\right)=x\cos x+3x$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线与直线 $ax+4y+1=0$ 垂直，则实数 a 的值为（　　）

A．-4　　B．-1　　C．1　　D．4

2．已知各项不为0的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_5-2a_7^2+2a_8=0$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 是等比数列且 $b_7=a_7$，则 b_2b_{12} 等于（　　）

A．$\frac{4}{9}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{9}{4}$　　D．$\frac{2}{3}$

3．对于函数 $f(x)$，若存在区间 $A=[m,n]$ 使得 $\{y\mid y=f(x),x\in A\}=A$ 则称函数 $f(x)$ 为“同域函数”，区间A为函数 $f(x)$ 的一个“同域区间”.给出下列四个函数：

①$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$；②$f(x)=x^2-1$；③$f(x)=|x^2-1|$；④$f(x)=\log_2(x-1)$.

存在“同域区间”的“同域函数”的序号是（　　）

A．①②　　B．①②③　　C．②③　　D．①②④

4．设 θ 为两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角，已知对任意实数 t．$\left|\vec{b}+t\vec{a}\right|$ 的最小值为1.则（　　）

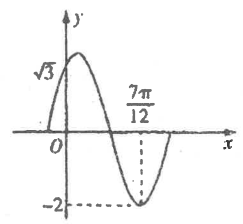
A．若 θ 确定，则 $|\vec{b}|$ 唯一确定　　B．若 $|\vec{b}|$ 确定，则 θ 唯一确定

C．若 θ 确定，则 $|\vec{a}|$ 唯一确定　　D．若 $|\vec{a}|$ 确定，则 θ 唯一确定

5．已知点 $P\left(x,y\right)$ 是直线 $y=2\sqrt{2}x-4$ 上一动点，PM 与 PN 是圆 $C:x^2+\left(y-1\right)^2=1$ 的两条切线，M,N 为切点，则四边形 $PMCN$ 的最小面积为(　　)

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

6.已知函数 $f(x)=A\sin(wx+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f(\frac{3\pi}{4})=$（　　）



A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

7．已知函数 $f(x)=\left|\frac{1}{2}-4\sin x\cos x\right|$，若 $f(x-a)=-f(x+a)$ 恒成立，则实数a的最小正值为（　　）

A．2π　　B．π　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

8．设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n$，则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前20项和为（　　）

A．$\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^{19}}$　　B．$\frac{7}{4}-\frac{1}{4\times3^{19}}$　　C．$\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^{18}}$　　D．$\frac{7}{4}-\frac{1}{4\times3^{18}}$

9．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别是 F_1、F_2，以 F_2 为圆心的圆过椭圆的中心，且与椭圆交于点 P，若直线 PF_1 恰好与圆 F_2 相切于点 P，则椭圆的离心率为(　　)

A．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B．$\sqrt{3}-1$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

10. 已知函数 $f(x)=a\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像的一条对称轴为直线 $x=\dfrac{5\pi}{6}$，且 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-4$，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为( )

A. $-\dfrac{\pi}{3}$　　B. 0　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}$

11. 若函数 $f(x)=e^x(x-3)-\dfrac{1}{3}kx^3+kx^2$ 只有一个极值点，则 k 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,e)$　　B. $(0,e]$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $(0,2]$

12. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线交曲线左支于 A，B 两点，$\triangle F_2AB$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形，且 $\angle AF_2B=30°$．若该双曲线的离心率为 e，则 $e^2=$（　　）

A. $11+4\sqrt{3}$　　B. $13+5\sqrt{3}$　　C. $16-6\sqrt{3}$　　D. $19-10\sqrt{3}$

第Ⅱ卷（非选择题 共90分）

二、填空题（每题5分，共20分。把答案填在答题纸的横线上）

13. 已知向量 $\vec{a},\vec{b},|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，且 $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________.

14. 已知抛物线 $E:y^2=12x$ 的焦点为 F，准线为 l，过 F 的直线 m 与 E 交于 A，B 两点，过 A 作 $AM\perp l$，垂足为 M，AM 的中点为 N，若 $AM\perp FN$，则 $|AB|=$______

15. 已知函数 $f(x)=(x^2-2x)e^{x-1}$，若当 $x>1$ 时，$f(x)-mx+1+m\le 0$ 有解，则 m 的取值范围为__________

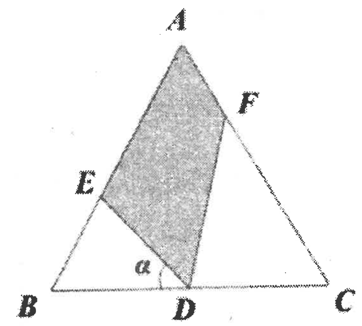
16. 数列 $\{a_n\}$ 为 1，1，2，1，1，2，3，1，1，2，1，1，2，3，4，…，首先给出 $a_1=1$，接着复制该项后，再添加其后继数 2，于是 $a_2=1$，$a_3=2$，然后再复制前面所有的项 1，1，2，再添加 2 的后继数 3，于是 $a_4=1$，$a_5=1$，$a_6=2$，$a_7=3$，接下来再复制前面所有的项 1，1，2，1，1，2，3，再添加 4，…，如此继续，则 $a_{2019}=$______.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 如图为一块边长为2km的等边三角形地块ABC，为响应国家号召，现对这块地进行绿化改造，计划从BC的中点D出发引出两条成60°角的线段DE和DF，与AB和AC围成四边形区域AEDF，在该区域内种上草坪，其余区域修建成停车场，设∠BDE = α.

（1）当α = 60°时，求绿化面积；

（2）试求地块的绿化面积S(α)的取值范围.



18.（本小题满分 12 分）

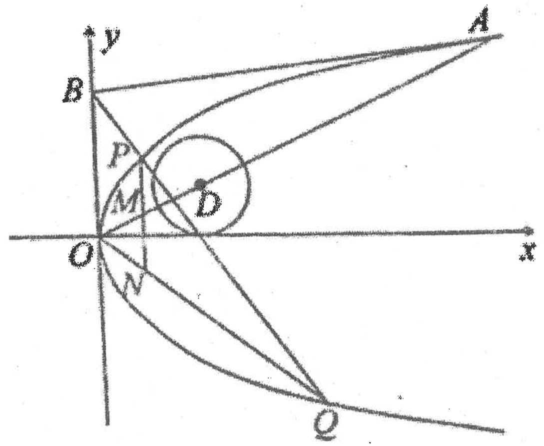
已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，且$a_1=1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=4$.

（1）若$a_3+b_3=7$，求$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若$T_3=13$，求S_5.

19. （本小题满分 12 分）

已知圆$D:(x-2)^2+(y-1)^2=1$，点A在抛物线$C:y^2=4x$上，O为坐标原点，直线OA与圆D有公共点.



（1）求点A横坐标的取值范围；

（2）如图，当直线OA过圆心D时，过点A作抛物线的切线交y轴于点B，过点B引直线l交抛物线C于P,Q两点，过点P作x轴的垂线分别与直线OA,OQ交于M,N，求证：M为PN中点.

20. （本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d\in(0,\pi]$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\sin(a_n)$，集合$S=\{x\mid x=b_n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

（1）若$a_1=0$，$d=\frac{2\pi}{3}$，求集合S；

（2）若$a_1=\frac{\pi}{2}$，求d使得集合S恰有两个元素；

（3）若集合S恰有三个元素，$b_{n+T}=b_n$，T是不超过5的正整数，求T的所有可能值，并写出与之相应的一个等差数列$\{a_n\}$的通项公式及集合S.

21. （本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=(x-1)\ln x,g(x)=x-\ln x-\frac{3}{e}$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）令$h(x)=mf(x)+g(x)(m>0)$两个零点$x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1+e>x_2+\frac{1}{e}$.

22. （本小题满分 12 分）

已知椭圆C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过定点$M(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)已知直线$l:y=kx-\frac{1}{3}(k\in R)$与椭圆$C$交于$A,B$两点，试问在$y$轴上是否存在定点$P$，使得以弦$AB$为直径的圆恒过点$P$？若存在，求出点$P$的坐标和$\Delta PAB$的面积的最大值；若不存在，请说明理由.

河北衡水中学 2019-2020 学年度上学期期中考试

高三理科数学答题纸

姓名：________ 缺考标记 ☐

准考证号：☐☐☐☐☐☐☐☐☐

贴条形码区

科目	
语文	☐
数学	☐
英语	☐
物理	☐
化学	☐
生物	☐
政治	☐
历史	☐
地理	☐
科类	
文	☐
理	☐

注意事项
1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，并认真核准条形码上的准考证号、姓名及科目。在规定位置贴好条形码。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写要求字体工整、笔迹清楚。
3. 请严格按照题号在相应的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁、不装订、不要折叠、不要破损。
5. 正确填涂：▬

选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

二、填空题

13、 $\frac{1}{2}$ 14、 16

15、 $m>1$ 16、 1

三、解答题

17、解：(1) 当 $\alpha=60^\circ$ 时 $DE//AC$，$DF//AB$，

$\therefore AEDF$ 为平行四边形，则 $\triangle BDE$ 与 $\triangle CDF$

均为边长=1 的等边三角形

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\cdot\sin60^\circ=\sqrt{3}$

$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}\times1\times1\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ 绿化面积：$\sqrt{3}-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}(km^2)$

(2) 由题意知，$30^\circ<\alpha<90^\circ$

在 $\triangle BDE$ 中 $\angle BED=120^\circ-\alpha$，

由正弦定理 $BE=\frac{\sin\alpha}{\sin(120^\circ-\alpha)}$

在 $\triangle CDF$ 中 $\angle CDF=120^\circ-\alpha$，$\angle CFD=\alpha$，

由正弦定理得 $CF=\frac{\sin(120^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}$.

$\therefore BE+CF=\frac{\sin\alpha}{\sin(120^\circ-\alpha)}+\frac{\sin(120^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2(120^\circ-\alpha)}{\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)}$

$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha)^2+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\sin(120^\circ-\alpha)}$

$=\frac{\frac{5}{4}\sin^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha}$

$=1+\frac{3}{\sqrt{3}\sin2\alpha-\cos2\alpha+1}=1+\frac{3}{2\sin(2\alpha-30^\circ)+1}$

$30^\circ<\alpha<90^\circ$ $\therefore 30^\circ<2\alpha-30^\circ<150^\circ$

$\therefore \frac{1}{2}<\sin(2\alpha-30^\circ)\leq1$.

$\therefore 2\leq1+\frac{3}{2\sin(2\alpha-30^\circ)+1}<\frac{5}{2}$ 即 $BE+CF\in[2,\frac{5}{2})$

$S(\alpha)=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CDF}-S_{\triangle BDE}$

$=\sqrt{3}-\frac{1}{2}(BE+CF)\sin60^\circ$

$=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}(BE+CF)\in(\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\therefore$ 绿化 $S(\alpha)$ 取值范围为 $(\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

18、

T(1): 设等差数列 $\{a_n\}$ 公差 d，等比 $\{b_n\}$ 公比为 q $(q\neq0)$.

有 $(1+d)+q=4$ 即 $d+q=3$.

(1) $\because \begin{cases}(1+2d)+q^2=7\\ d+q=3\end{cases} \Rightarrow q=2$ $\therefore b_n=2^{n-1}$

(2) $\because T_3=1+q+q^2=13$

解得 $q=-4$ 或 $q=3$

当 $q=-4$ 时 $d=7$ $S_5=5+\frac{5\times4}{2}\times7=75$

当 $q=3$ 时 $d=0$ $S_5=5a_1=5$.

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

19、

解：(1) 由题意直线 OA 斜率存在且不为零，设 $l_{OA}: y=kx$

$\begin{cases}y=kx\\ y^2=4x\end{cases} \Rightarrow x_A=\frac{4}{k^2}$ ~~D(2,1)~~

$D(2,1)$ 到 $l_{OA}: kx-y=0$ 的距离 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\leq1 \Rightarrow 0<k\leq\frac{4}{3}$

$\therefore x_A\in[\frac{9}{4},+\infty)$.

(2) 当直线 OA 过圆 m $(D(2,1))$ 时 $k=\frac{1}{2}$ $x_A=\frac{4}{k^2}=16$ $\therefore A(16,8)$.

$y^2=4x\ (y>0) \Rightarrow y=2\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\therefore k_{AB}=y'|_{x=16}=\frac{1}{4}$

$\therefore l_{AB}: y-8=\frac{1}{4}(x-16)$ 即 $y=\frac{1}{4}x+4$ 得 $B(0,4)$.

设 $l: y=mx+4$ $P(\frac{y_1^2}{4},y_1)$ $Q(\frac{y_2^2}{4},y_2)$.

由 $\begin{matrix}l_{OA}: y=\frac{1}{2}x\\ l_{OQ}: y=\frac{4}{y_2}x\end{matrix} \Rightarrow y_M=\frac{y_1^2}{8}$ $y_N=\frac{y_1^2}{y_2}$

$\begin{cases}y=mx+4\\ y^2=4x\end{cases} \Rightarrow my^2-4y+16=0$

$\therefore y_1+y_2=\frac{4}{m}$ $y_1y_2=\frac{16}{m}$.

$y_P+y_N=y_1+\frac{y_1^2}{y_2}=\frac{y_1(y_1+y_2)}{y_1y_2}=\frac{y_1\frac{4}{m}}{\frac{16}{m}}=\frac{y_1^2}{4}=2y_M$.

即 M 为 PN 中点。

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

20、

解：(1) ∵等差数列$\{a_n\}$公差$d\in(0,\pi]$

数列$\{b_n\}$满足$b_n=\sin(a_n)$

集合$S=\{x|x=b_n, n\in N^*\}$,

当$a_1=0$　$d=\frac{2\pi}{3}$

∴集合$S=\{-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

(2) ∵$a_1=\frac{\pi}{2}$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\sin(a_n)$

集合$S=\{x|x=b_n, n\in N^*\}$恰好有两个元素，

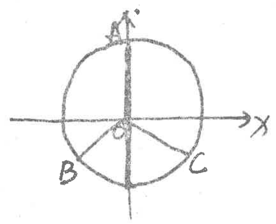
如图：根据三角函数线

①等差数列$\{a_n\}$的终边落在y轴的正负半轴上时，集合恰好有两个元素.

此时$d=\pi$；

②a_1终边落在OA上，要使得集合S恰有2个元素，可以使a_2，a_3的终边关于y轴对称，如图OB，OC，此时$d=\frac{2\pi}{3}$.

综上$d=\frac{2\pi}{3}$或$d=\pi$



(3) ①当$T=3$时，$b_{n+3}=b_n$

集合$S=\{b_1,b_2,b_3\}$符合题意.

与之相应的一个等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2\pi}{3}n$，

此时$S=\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\}$

②当$T=4$时　$b_{n+4}=b_n$，

$\sin(a_n+4d)=\sin a_n$.

$a_n+4d=a_n+2k\pi$或

$a_n+4d=2k\pi-a_n$.

等差数列$\{a_n\}$的公差$d\in(0,\pi]$，

故$a_n+4d=a_n+2k\pi$，$d=\frac{k\pi}{2}$，

又∵$k=1,2$

当$k=1$时满足条件，此时$S=\{0,1,-1\}$

与之相应的一个等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{\pi}{2}n$，此时$S=\{0,1,-1\}$.

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

21、(I) 由题意　$f(x)=(x-1)\ln x$

则$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$　且$f'(1)=0$

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$　函数$f(x)$单调递减.

当$x\geq 1$时　$f'(x)\geq 0$　函数$f(x)$单调递增.

∴$f(x)$在$(0,1)$单调递减，在$[1,+\infty)$上单调递增.

(II) $h(x)=m(x-1)\ln x+x-\ln x-e^{3}$

$h'(x)=m(1+\ln x-\frac{1}{x})+1-\frac{1}{x}$　且x，$m>0$可知.

$0<x<1$时　$h'(x)<0$　$h(x)$单调递减

$x\geq 1$时　$h'(x)\geq 0$　$h(x)$单调递增，

即$h(x)$的最小值为$h(1)=1-e^{3}<0$.

因此当$x=\frac{1}{e}$时　$h(\frac{1}{e})=m(\frac{1}{e}-1)(-1)+\frac{1}{e}-(-1)-e^{3}$

$=\frac{m(e-1)+e-2}{e}>0$

可知$h(x)$在$(\frac{1}{e},1)$上存在一个零点；

当$x=e$时　$h(e)=m(e-1)+e-1-e^{3}>0$

可知$h(x)$在$(1,e)$上也存在一个零点；

因此　$x_2-x_1<e-\frac{1}{e}$　即　$x_1+e>x_2+\frac{1}{e}$

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

22、解：

(1) 由题知
$$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ b^2+c^2=a^2\\ \frac{1}{2a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=\frac{5}{2}\\ b^2=\frac{5}{4}\end{cases}$$
椭圆C的方程为$\frac{2x^2}{5}+\frac{4y^2}{5}=1$.

(2) 由$\begin{cases}y=kx-\frac{1}{3}\\ \frac{2x^2}{5}+\frac{4y^2}{5}=1\end{cases}\Rightarrow 9(2k^2+4)x^2-12kx-43=0$ ①

设$A(x_1,y_1)$　$B(x_2,y_2)$　则x_1，x_2为方程①的两根.

∴$x_1+x_2=\frac{12k}{9(2k^2+4)}$　$x_1x_2=\frac{-43}{9(2k^2+4)}$

设$P(0,p)$，则$\overrightarrow{PA}=(x_1,y_1-p)$　$\overrightarrow{PB}=(x_2,y_2-p)$

∴$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2+y_1y_2-p(y_1+y_2)+p^2$

$=x_1x_2+(kx_1-\frac{1}{3})(kx_2-\frac{1}{3})-pk(x_1+x_2)+\frac{2p}{3}+p^2$.

$=\frac{(18p^2-45)k^2+36p^2+24p-39}{9(2k^2+4)}$

假设在y轴上存在定点P，使以弦AB为直径的圆恒过P点.

则$PA\perp PB$，即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.

即$(18p^2-45)k^2+36p^2+24p-39=0$　对任意$k\in R$恒成立.

∴$\begin{cases}18p^2-45=0\\ 36p^2+24p-39=0\end{cases}$. 此方程组无解，

∴不存在定点满足条件.

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效