2019 北京房山区高三二模

数　　学（文）

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x(x-3)>0\}$，则 $C_U A=$

(A) $[0,3]$　　(B) $(-\infty,3]$

(C) $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$　　(D) $(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

（2）下列函数中为偶函数的是

(A) $y=x^3+x$　　(B) $y=x^2-4$

(C) $y=\sqrt{x}$　　(D) $y=|x+1|$

（3）执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值为

(A) 4

(B) 5

(C) 8

(D) 9

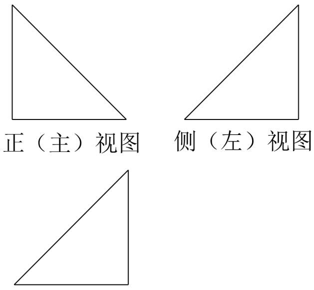
（4）若 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\ x-2y\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最小值为

(A) -6　　(B) -1　　(C) 3　　(D) 4

（5）在以 AB 为边，AC 为对角线的矩形中，$\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,k)$，则实数 $k=$

(A) -6　　(B) 4　　(C) 2　　(D) $\dfrac{2}{3}$

（6）已知某四面体的三视图如图所示，正视图、侧视图、俯视图是全等的等腰直角三角形，则该四面体的四个面中直角三角形的个数为


正（主）视图　侧（左）视图
俯视图

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1

（7）设 $a\in\mathbf{R}$，则“ $a=1$ ”是“直线 $l_1:ax+2y+4=0$ 与直线 $l_2:x+(a+1)y+a=0$

平行”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

（8）高考文科综合由政治、历史、地理三个科目组成，满分 300 分，每个科目各 100 分,若规定每个科目 60 分为合格，总分 180 分为文科综合合格．某班高考文科综合各科目合格人数如下：

科目	政治	历史	地理	文科综合
合格人数	23	20	21	30

则该班政治、历史、地理三个科目都合格的人数最多有

(A) 人13 人　(B) 15 人　(C) 17 人　(D) 20 人

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）复数 $z=3+\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，则 $|z|=$____.

（10）双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=2x$，则离心率等于___.

（11）函数 $f(x)=\sin 2x$，若 x_1,x_2 满足 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为___.

（12）已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 与直线 $l:y=k(x+1)$，则圆心 C 的坐标为___，

若圆 C 关于直线 l 对称，则 $k=$___.

（13）设 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a\neq 1,b\neq 1$，能说明“若 $\log_a 3>\log_b 3$，则 $b>a$ ”为假命题的一组 a,b 的值依次为_____.

（14）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & x\leqslant 0,\\ x^2-3ax+a, & x>0,\end{cases}$ 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的值域为____；

若 $f(x)$ 有三个零点，则 a 的取值范围是____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15)（本小题 13 分）

已知在△ ABC 中，$a^2+c^2-ac=b^2$.

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）求 $\cos A+\cos C$ 的最大值.

(16)（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n, n\in \mathbf{N}^+$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=4$，$b_4=17$，

且 $\{b_n-a_n\}$ 是等差数列.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(17)（本小题 13 分）

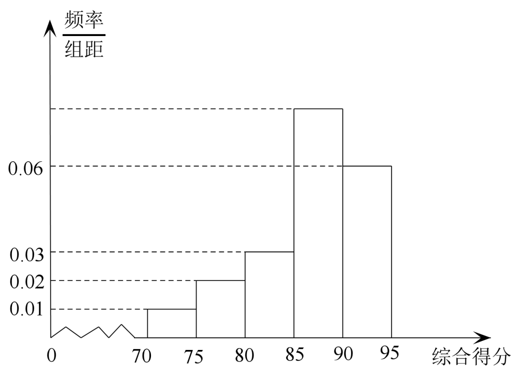
为降低空气污染，提高环境质量，政府决定对汽车尾气进行整治. 某厂家生产甲、乙两种不同型号的汽车尾气净化器，为保证净化器的质量，分别从甲、乙两种型号的净化器中随机抽取 100 件作为样本进行产品性能质量评估，评估综合得分 m 都在区间 $[70,95]$. 已知评估综合得分与产品等级如下表：

综合得分 m	等级
$m\geqslant 85$	一级品
$75\leqslant m<85$	二级品
$70\leqslant m<75$	三级品

根据评估综合得分，统计整理得到了甲型号的样本频数分布表和乙型号的样本频率分布直方图（图表如下）.

综合得分	频数
[75,80)	10
[80,85)	30
[85,90)	40
[90,95]	20
合计	100

甲型



乙型

（Ⅰ）从厂家生产的乙型净化器中随机抽取一件，估计这件产品为二级品的概率；

（Ⅱ）在某次促销活动中，厂家从 2 件甲型一级品和 3 件乙型一级品中随机抽取 2 件送给两名幸运客户，求这两名客户得到同一型号产品的概率；

（Ⅲ）根据图表数据，请自定标准，对甲、乙两种型号汽车尾气净化器的优劣情况进行比较.

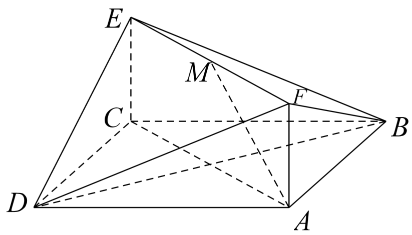
(18)（本小题 14 分）

已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直， $AB=2, AF=\sqrt{2}$, M 为 EF 的中点.

(Ⅰ)求证：平面 ABF // 平面 DCE ；

(Ⅱ)求证： AM // 平面 BDE ；

(Ⅲ)求证： $AM\perp$ 平面 BDF .



(19)（本小题 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,1)$ ，其右焦点为 $F(1,0)$

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和离心率；

（Ⅱ）过点 $M(2,0)$ 的直线与椭圆 C 交于 P,Q 两点， Q 关于 x 轴对称的点为 N ，

判断 P,F,N 三点是否共线？并加以证明.

(20)（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x-2\sin x+1, g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+m\cos x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调区间；

（Ⅲ）当 $m>1$ 时，证明： $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在最小值.

数学试题答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	B	B	A	C	C

二、填空题

（9）$\sqrt{10}$　（10）$\sqrt{5}$　（11）$\frac{\pi}{2}$　（12）$(1,2)$; 1

（13）$3,\frac{1}{3}$ 答案不唯一　（14）$(0,+\infty)$; $(\frac{4}{9},1]$

三、解答题

（15）（本小题 13 分）

（Ⅰ） 由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a\cdot c}=\frac{a\cdot c}{2a\cdot c}=\frac{1}{2}$

角 B 为三角形内角　$\therefore \angle B=\frac{\pi}{3}$　……………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得　$\angle A+\angle C=\pi-\angle B=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \angle A=\frac{2\pi}{3}-\angle C$

$\therefore \cos A+\cos C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)+\cos C$

$=\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos C+\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin C+\cos C$

$=-\frac{1}{2}\cdot\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin C+\cos C$

$=\frac{1}{2}\cdot\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin C$

$=\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos C+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin C$

$=\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$　……………11 分

$\because 0<C<\frac{2\pi}{3}$　$\therefore \frac{\pi}{6}<C+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \frac{1}{2}<\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$

$\therefore \cos A+\cos C$ 的最大值是 1　……………13 分

（16）（本小题 13 分）

（Ⅰ） 由 $a_{n+1}=2a_n, n\in\mathbf{N}^+$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2, n\in\mathbf{N}^+$

所以 数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$，公比 $q=2$ 的等比数列…………………..2 分

所以 通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$ ……………4 分

设 $c_n=b_n-a_n$，则数列 $\{c_n\}$ 是等差数列

$c_1=b_1-a_1=4-1=3,\quad c_4=b_4-a_4=17-2^3=9$

由 $c_4=c_1+3d$ 得公差 $d=2$ ……………………………..7 分

所以 $c_n=b_n-a_n=3+2(n-1)=2n+1$ ……………………………..8 分

所以 $b_n==2n+1+2^{n-1}$ ……………………………..9 分

（Ⅱ）$S_n=\dfrac{(3+2n+1)n}{2}+\dfrac{1-2^n}{1-2}=n(n+2)+2^n-1$ ……………13 分

（16）（本小题 13 分）

（Ⅰ）设事件 A 为“从厂家生产的乙型净化器中随机抽取一件，这件产品为二级品”

由图可得 $P(A)=(0.02+0.03)\times5=0.25$ …………………………. 4 分

（Ⅱ）设甲型净化器记为 a_1,a_2，乙型净化器记为 b_1,b_2,b_3，从 5 件中任取 2 件共有 10 种：

$(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3)(a_2,b_1),(a_2,b_2)(a_2,b_3),(b_1,b_2),\ (b_1,b_3),(b_2,b_3)$

这两名顾客得到同一型号产品共有 4 种：$(a_1,a_2),(b_1,b_2)\ (b_1,b_3),(b_2,b_3)$

设事件 B 为“两名顾客得到同一型号产品”， 则

$P(B)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ ………………10 分

(Ⅲ）答案不唯一，只要有数据支撑，言之有理可得分（下面给出两种参考答案）

（1）可根据三级品率进行比较，由图表可知甲型产品三等品概率为 0，乙型三等品概率 0.05.所以可以认为甲型产品的质量更好；

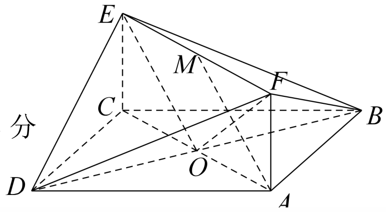
（2）可根据一级品率进行比较，由图表可知甲型产品一等品概率为 0.6，乙型一等品概率为 0.7.所以可以认为乙型产品的质量更好；

………………………………13 分

（17）（本小题 14 分）

（Ⅰ）因为 正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$，

所以 $AB//CD,\quad AF//CE$ ……………………………2 分



又 $AB \cap AF = A$, $CD \cap CE = C$

$AB, AF \subset$ 平面 ABF， $CD, CE \subset$ 平面 DCE

所以 平面 ABF // 平面 DCE ………………………………4 分

（Ⅱ）设 $AC \cap BD = O$，连结 OE，

因为 正方形 $ABCD$，所以 O 为 AC 中点

又 矩形 $ACEF$，M 为 EF 的中点

所以 $EM // OA$, 且 $EM = OA$ ………………………………..6 分

所以 $OAME$ 为平行四边形

所以 $AM // OE$ ………………………………..8 分

又 $AM \not\subset$ 平面 BDE， $OE \subset$ 平面 BDE

所以 AM // 平面 BDE ………………………………9 分

（Ⅲ）因为 正方形 $ABCD$ 所以 $BD \perp AC$

又 因为 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ACEF$， 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ACEF = AC$，

$BD \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $BD \perp$ 平面 $ACEF$

$AM \subset$ 平面 $ACEF$

所以 $BD \perp AM$ ……………………………….11 分

在矩形 $ACEF$ 中， O 为 AC 中点， M 为 EF 的中点， $AF = \sqrt{2}$

所以 $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{2}AB = \sqrt{2}$

所以 $AFMO$ 为正方形

所以 $OF \perp AM$ ………………………………..13 分

而 $BD \subset$ 平面 BDF， $OF \subset$ 平面 BDF， $BD \cap OF = O$

所以 $AM \perp$ 平面 BDF ………………………………14 分

（19）（本小题 13 分）

（Ⅰ）依题意：$b=1,c=1$，所以 $a^2=b^2+c^2=2$，

所以 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………………..4 分

（Ⅱ）依题意，直线 QM 斜率存在，设直线 QM 方程为 $y=k(x-2)$ ………..5 分

由 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 整理得 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 则 $N\ (x_2,-y_2)$ $x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{8k^2-2}{1+2k^2}$. ………..7 分

所以 $k_{PF}=\frac{y_1}{x_1-1},k_{NF}=\frac{y_2}{1-x_2}$,

$k_{PF}-k_{NF}=\frac{y_1}{x_1-1}-\frac{y_2}{1-x_2}=\frac{y_1(1-x_2)-y_2(x_1-1)}{(x_1-1)(1-x_2)}=\frac{k(x_1-2)(1-x_2)-k(x_2-2)(x_1-1)}{(x_1-1)(1-x_2)}$

$=\frac{3k(x_1+x_2)-2kx_1x_2-4k}{(1-x_1)(x_2-1)}=\frac{3k\frac{8k^2}{1+2k^2}-\frac{2k(8k^2-2)}{1+2k^2}-\frac{4k+8k^3}{1+2k^2}}{(1-x_1)(x_2-1)}=0$

………………………………..12 分

所以 $k_{PF}=k_{FN}$， 所以 P、F、N 三点共线. ………………………………..13 分

（20）（本小题 14 分）

（Ⅰ）因为 $f(x)=x-2\sin x+1$，所以 $f'(x)=1-2\cos x$

则 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，所以切线方程为 $y=-x+1$ ……………………4 分

（Ⅱ）令 $f'(x)=0$，即 $\cos x=\frac{1}{2}$，$x\in(0,\pi)$，得 $x=\frac{\pi}{3}$

当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 变化如下：

x	$(0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3},\pi)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	减	最小值	增

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\frac{\pi}{3})$，单调递增区间为 $(\frac{\pi}{3},\pi)$ …………………8 分

（Ⅲ）因为 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+m\cos x$，所以 $g'(x)=x-m\sin x$

令 $h(x)=g'(x)=x-m\sin x$，则 $h'(x)=1-m\cos x$ ……………9 分

因为 $m>1$，所以 $\frac{1}{m}\in(0,1)$

所以 $h^{'}(x)=1-m\cos x=0$, 即 $\cos x=\dfrac{1}{m}$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 内有唯一解 x_0

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$h^{'}(x)<0$，当 $x\in\left(x_0,\pi\right)$ 时，$h^{'}(x)>0$，

所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减, 在 $\left(x_0,\pi\right)$ 上单调递增. ……………11 分

所以 $h(x_0)<h(0)=0$，又因为 $h(\pi)=\pi>0$

所以 $h(x)=x-m\sin x$ 在 $(x_0,\pi)\subseteq(0,\pi)$ 内有唯一零点 x_1 ……………12 分

当 $x\in\left(0,x_1\right)$ 时，$h(x)<0$ 即 $g^{'}(x)<0$，

当 $x\in\left(x_1,\pi\right)$ 时，$h(x)>0$ 即 $g^{'}(x)>0$， ……………13 分

所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_1\right)$ 上单调递减, 在 $\left(x_1,\pi\right)$ 上单调递增.

所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $x=x_1$ 处取得最小值

即 $m>1$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上存在最小值

………………………………………14 分