

数 学 (理科)

2018.5

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分 (选择题 共40分)

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$

- (A) $\{1\}$ (B) $\{3, 5\}$ (C) $\{1, 6\}$ (D) $\{1, 3, 5, 6\}$

(2) 已知复数 z 在复平面上对应的点为 $(1, -1)$, 则

- (A) $z+1$ 是实数 (B) $z+1$ 是纯虚数 (C) $z+i$ 是实数 (D) $z+i$ 是纯虚数

(3) 已知 $x > y > 0$, 则

- (A) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^y$
(C) $\cos x > \cos y$ (D) $\ln(x+1) > \ln(y+1)$

(4) 若直线 $x+y+a=0$ 是圆 $x^2+y^2-2y=0$ 的一条对称轴, 则 a 的值为

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

(5) 设曲线 C 是双曲线, 则“ C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ ”是“ C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$ ”的

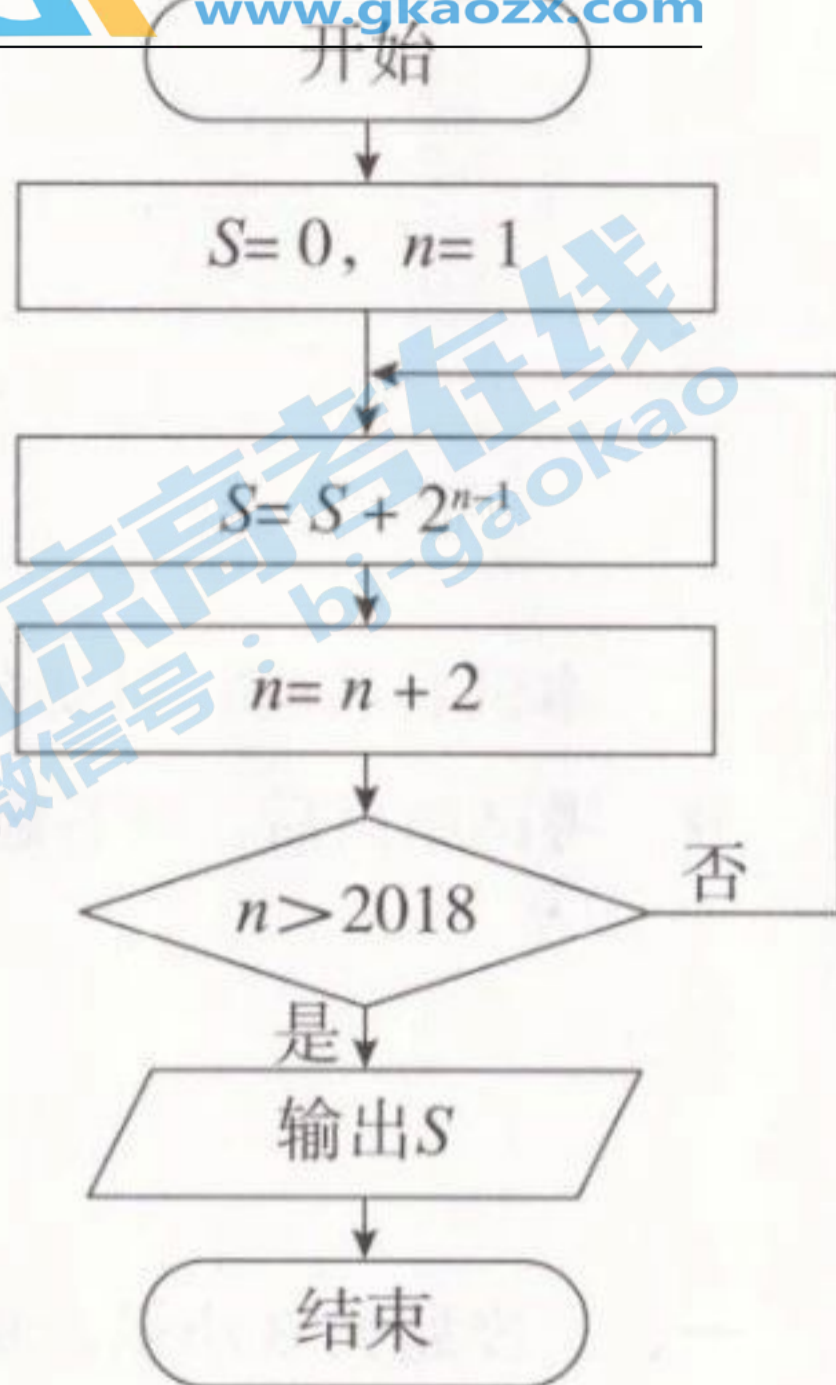
- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

(6) 关于函数 $f(x) = \sin x - x \cos x$, 下列说法错误的是

- (A) $f(x)$ 是奇函数
(B) 0 不是 $f(x)$ 的极值点
(C) $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上有且仅有 3 个零点
(D) $f(x)$ 的值域是 \mathbf{R}

(7) 已知某算法的程序框图如图所示, 则该算法的功能是

- (A) 求首项为 1, 公比为 2 的等比数列的前 2017 项的和
- (B) 求首项为 1, 公比为 2 的等比数列的前 2018 项的和
- (C) 求首项为 1, 公比为 4 的等比数列的前 1009 项的和
- (D) 求首项为 1, 公比为 4 的等比数列的前 1010 项的和



(8) 已知集合 $M=\{x \in \mathbb{N}^* | 1 \leq x \leq 15\}$, 集合 A_1, A_2, A_3 满足

- ① 每个集合都恰有 5 个元素;
- ② $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = M$.

集合 A_i 中元素的最大值与最小值之和称为集合 A_i 的特征数, 记为 $X_i (i=1, 2, 3)$, 则 $X_1+X_2+X_3$ 的值不可能为 ().

- (A) 37
- (B) 39
- (C) 48
- (D) 57

第二部分 (非选择题, 共110分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 极坐标系中, 点 $(2, \frac{\pi}{2})$ 到直线 $\rho \cos \theta = 1$ 的距离为 _____.

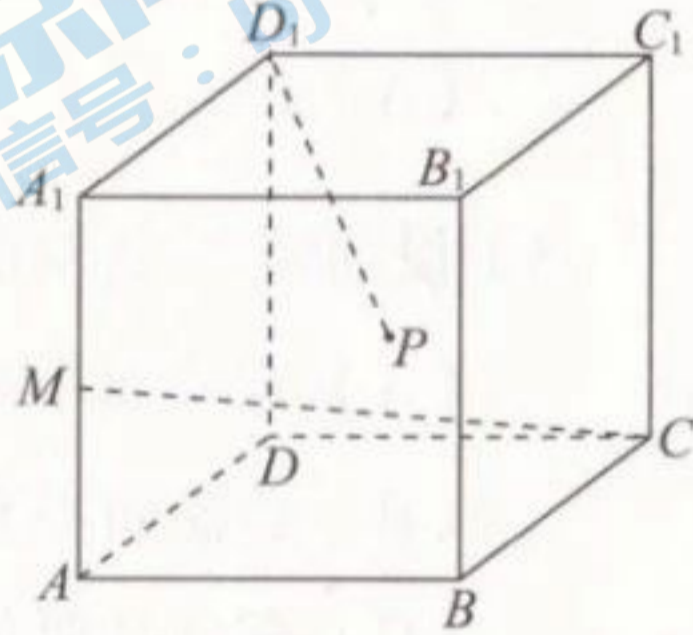
(10) 在 $(x + \frac{2}{x})^5$ 的二项展开式中, x^3 的系数为 _____.

(11) 已知平面向量 a, b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且满足 $|a|=2, |b|=1$, 则 $a \cdot b =$ _____, $|a+2b| =$ _____.

(12) 在 $\triangle ABC$ 中, $a:b:c=4:5:6$, 则 $\tan A =$ _____.

(13) 能够使得命题“曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{a} = 1 (a \neq 0)$ 上存在四个点 P, Q, R, S 满足四边形 $PQRS$ 是正方形”为真命题的一个实数 a 的值为 _____.

(14) 如图, 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是棱 AA_1 的中点, 点 P 在侧面 ABB_1A_1 内, 若 D_1P 垂直于 CM , 则 $\triangle PBC$ 的面积的最小值为 _____.



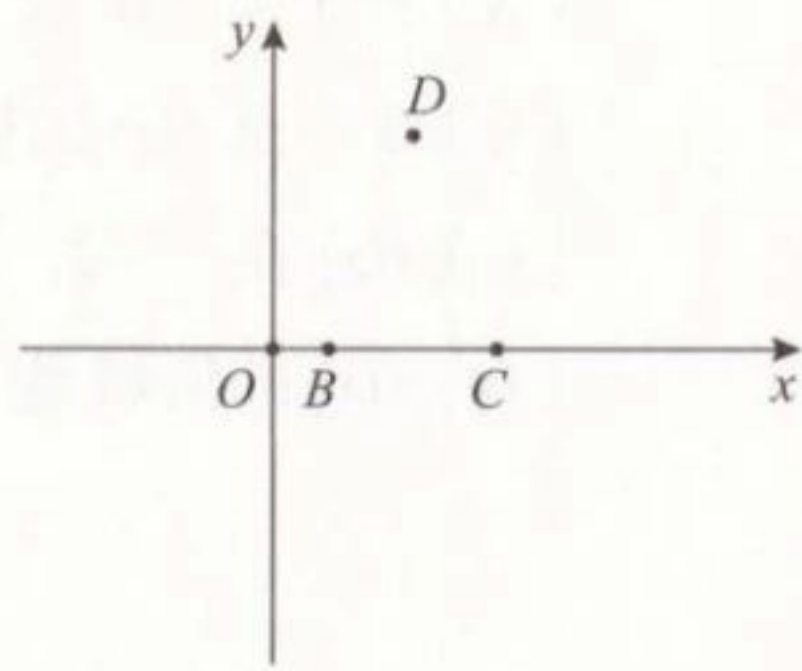
三、解答题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

如图, 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 在一个周期内的图象经过 $B(\frac{\pi}{6}, 0), C(\frac{2\pi}{3}, 0), D(\frac{5\pi}{12}, 2)$ 三点.

(I) 写出 A, ω, φ 的值;

(II) 若 $\alpha \in (\frac{5\pi}{12}, \frac{2\pi}{3})$, 且 $f(\alpha) = 1$, 求 $\cos 2\alpha$ 的值.



(16) (本小题 13 分)

某中学为了解高二年级中华传统文化经典阅读的整体情况，从高二年级随机抽取 10 名学生进行了两轮测试，并把两轮测试成绩的平均分作为该名学生的考核成绩。记录的数据如下：

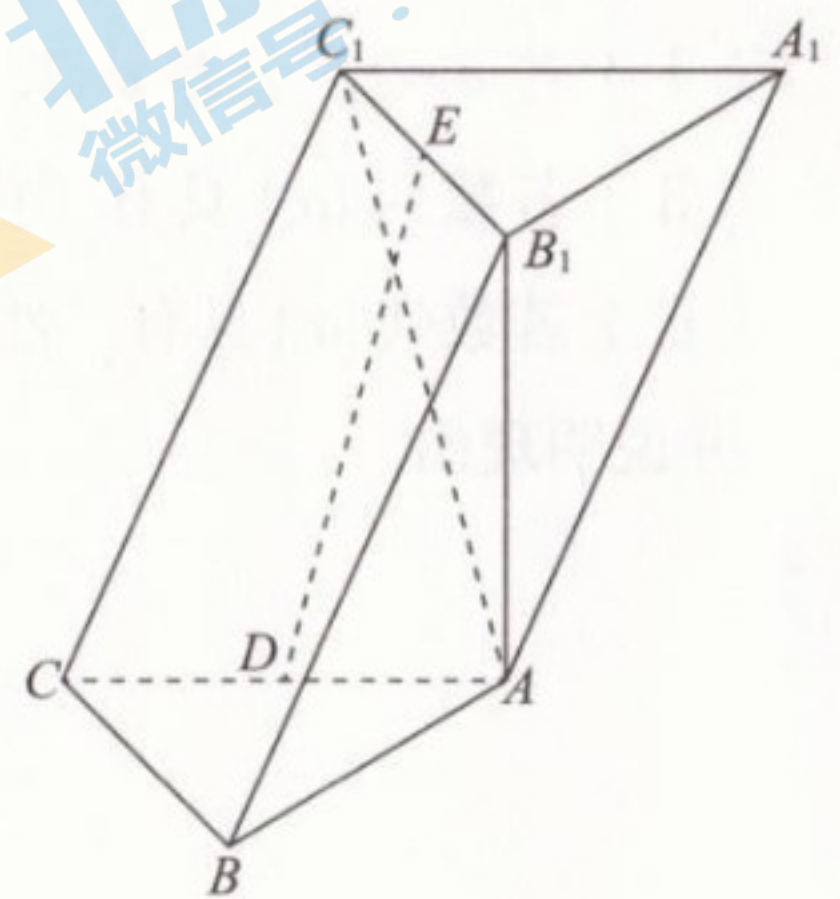
	1号	2号	3号	4号	5号	6号	7号	8号	9号	10号
第一轮测试成绩	96	89	88	88	92	90	87	90	92	90
第二轮测试成绩	90	90	90	88	88	87	96	92	89	92

- (I) 从该校高二年级随机选取一名学生，试估计这名学生考核成绩大于等于 90 分的概率；
- (II) 从考核成绩大于等于 90 分的学生中再随机抽取两名同学，求这两名同学两轮测试成绩均大于等于 90 分的概率；
- (III) 记抽取的 10 名学生第一轮测试成绩的平均数和方差分别为 \bar{x}_1 , s_1^2 ，考核成绩的平均数和方差分别为 \bar{x}_2 , s_2^2 ，试比较 \bar{x}_1 与 \bar{x}_2 , s_1^2 与 s_2^2 的大小。(只需写出结论)

(17) (本小题 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC=BC=AB_1=2$ ， $AB_1 \perp$ 平面 ABC ， $AC_1 \perp AC$ ， D , E 分别是 AC , B_1C_1 的中点。

- (I) 证明： $AC \perp B_1C_1$ ；
- (II) 证明： $DE \parallel$ 平面 AA_1B_1B ；
- (III) 求 DE 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值。



(18) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, F 为右焦点, 圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, P 为椭圆 C 上一点, 且 P 位于第一象限, 过点 P 作 PT 与圆 O 相切于点 T , 使得点 F, T 在 OP 两侧.

- (I) 求椭圆 C 的焦距及离心率;
- (II) 求四边形 $OFPT$ 面积的最大值.

(19) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = e^{ax} - ax - 3 (a \neq 0)$.

- (I) 求 $f(x)$ 的极值;
- (II) 当 $a > 0$ 时, 设 $g(x) = \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{2}ax^2 - 3x$, 求证: 曲线 $y = g(x)$ 存在两条斜率为 -1 且不重合的切线.

(20) (本小题 13 分)

如果数列 $\{a_n\}$ 满足“对任意正整数 $i, j, i \neq j$, 都存在正整数 k , 使得 $a_k = a_i a_j$ ”, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”. 已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷项的等差数列, 公差为 d .

- (I) 若 $a_1 = 2$, 公差 $d = 3$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否具有“性质 P”, 并说明理由;
- (II) 若数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”, 求证: $a_1 \geq 0$ 且 $d \geq 0$;
- (III) 若数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”, 且存在正整数 k , 使得 $a_k = 2018$, 这样的数列 $\{a_n\}$ 共有多少个? 并说明理由.