文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{1,2,3,5,7,11\}$，$B=\{x\mid 3<x<15\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

2．若 $\bar{z}(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，则 $z=$

A．$1-\mathrm{i}$　　B．$1+\mathrm{i}$　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

3．设一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差为 0.01，则数据 $10x_1,10x_2,\cdots,10x_n$ 的方差为

A．0.01　　B．0.1　　C．1　　D．10

4. Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域．有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 Logistic 模型：$I(t)=\dfrac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数．当 $I(t^{*})=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^{*} 约为（$\ln 19\approx 3$）

A．60　　B．63　　C．66　　D．69

5．已知 $\sin\theta+\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=1$，则 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6．在平面内，A，B 是两个定点，C 是动点．若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，则点 C 的轨迹为

A．圆　　B．椭圆　　C．抛物线　　D．直线

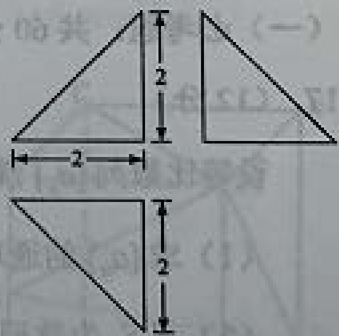
7．设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为

A．$(\dfrac{1}{4},0)$　　B．$(\dfrac{1}{2},0)$　　C．$(1,0)$　　D．$(2,0)$

8．点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

9．右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是



A．$6+4\sqrt{2}$

B．$4+4\sqrt{2}$

C．$6+2\sqrt{3}$

D．$4+2\sqrt{3}$

10．设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 3$，$c=\dfrac{2}{3}$，则

A．$a<c<b$　　B．$a<b<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

11．在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\tan B=$

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$4\sqrt{5}$　　D．$8\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$，则

A. $f(x)$ 的最小值为2

B. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 对称

D. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 0, \\ 2x-y\geqslant 0, \\ x\leqslant 1, \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

14. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $y=\sqrt{2}x$，则 C 的离心率为________.

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x+a}$. 若 $f'(1)=\dfrac{e}{4}$，则 $a=$________.

16. 已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=4$，$a_3-a_1=8$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$，求 m.

18.（12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市100天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

空气质量等级 \ 锻炼人次	[0,200]	(200,400]	(400,600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为1，2，3，4的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为1或2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为3或4，则称这天“空气质量不好”．根据所给数据，完成下面的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次$\leqslant 400$	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

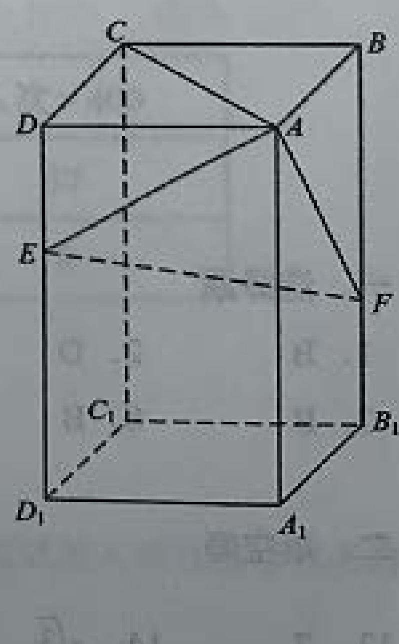
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19．（12分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E，F分别在棱DD_1，BB_1上，且$2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$．证明：

（1）当$AB=BC$时，$EF\perp AC$；

（2）点C_1在平面AEF内．



20．（12分）

已知函数$f(x)=x^3-kx+k^2$．

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$有三个零点，求k的取值范围．

21．（12分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1\,(0<m<5)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$分别为$C$的左、右顶点．

（1）求C的方程；

（2）若点P在C上，点Q在直线$x=6$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积．

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2-t-t^2,\\ y=2-3t+t^2\end{cases}$（$t$为参数且$t\neq1$），$C$与坐标轴交于$A$，$B$两点．

（1）求$|AB|$；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线AB的极坐标方程．

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

设a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a+b+c=0$，$abc=1$．

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$\max\{a,b,c\}$表示a，b，c中的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$．

文科数学试题参考答案

一、选择题

1．B	2．D	3．C	4．C	5．B	6．A
7．B	8．B	9．C	10．A	11．C	12．D

二、填空题

13．7　　14．$\sqrt{3}$　　15．1　　16．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$

三、解答题

17．解：

（1）设$\{a_n\}$的公比为q，则$a_n=a_1q^{n-1}$．由已知得

$$\begin{cases}a_1+a_1q=4,\\a_1q^2-a_1=8.\end{cases}$$

解得$a_1=1$，$q=3$．

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^{n-1}$．

（2）由（1）知$\log_3 a_n=n-1$．

故$S_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$．

由$S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$得$m(m-1)+(m+1)m=(m+3)(m+2)$，即$m^2-5m-6=0$．

解得$m=-1$（舍去），$m=6$．

18．解：

（1）由所给数据，该市一天的空气质量等级为1，2，3，4的概率的估计值如下表：

空气质量等级	1	2	3	4
概率的估计值	0.43	0.27	0.21	0.09

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为

$$\frac{1}{100}(100\times20+300\times35+500\times45)=350.$$

（3）根据所给数据，可得2×2列联表：

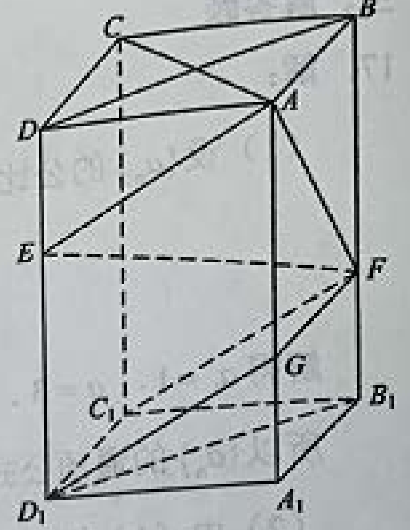
	人次≤400	人次>400
空气质量好	33	37
空气质量不好	22	8

根据列联表得

$$K^2=\frac{100\times(33\times8-22\times37)^2}{55\times45\times70\times30}\approx5.820.$$

由于$5.820>3.841$，故有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关．

19．解：



（1）如图，连结 BD，B_1D_1．因为 $AB=BC$，所以四边形 $ABCD$ 为正方形，故 $AC\perp BD$．又因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，于是 $AC\perp BB_1$．所以 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D．

由于 $EF\subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $EF\perp AC$．

（2）如图，在棱 AA_1 上取点 G，使得 $AG=2GA_1$，连结 GD_1，FC_1，FG．

因为 $D_1E=\frac{2}{3}DD_1$，$AG=\frac{2}{3}AA_1$，$DD_1 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} AA_1$，所以 $ED_1 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} AG$，于是四边形 ED_1GA 为平行四边形，故 $AE//GD_1$．

因为 $B_1F=\frac{1}{3}BB_1$，$A_1G=\frac{1}{3}AA_1$，$BB_1 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} AA_1$，所以 $FG \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} A_1B_1$，$FG \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} C_1D_1$，四边形 FGD_1C_1 为平行四边形，故 $GD_1//FC_1$．

于是 $AE//FC_1$．所以 A，E，F，C_1 四点共面，即点 C_1 在平面 AEF 内．

20．解：

（1）$f'(x)=3x^2-k$．

当 $k=0$ 时，$f(x)=x^3$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；

当 $k<0$ 时，$f'(x)=3x^2-k>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增．

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}$．当 $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{3k}}{3})$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-\frac{\sqrt{3k}}{3},\frac{\sqrt{3k}}{3})$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\frac{\sqrt{3k}}{3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{3k}}{3})$，$(\frac{\sqrt{3k}}{3},+\infty)$ 单调递增，在 $(-\frac{\sqrt{3k}}{3},\frac{\sqrt{3k}}{3})$ 单调递减．

（2）由（1）知，当 $k\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 不可能有三个零点．

当 $k>0$ 时，$x=-\frac{\sqrt{3k}}{3}$ 为 $f(x)$ 的极大值点，$x=\frac{\sqrt{3k}}{3}$ 为 $f(x)$ 的极小值点．此时，

$-k-1<-\dfrac{\sqrt{3k}}{3}<\dfrac{\sqrt{3k}}{3}<k+1$ 且 $f(-k-1)<0$，$f(k+1)>0$，$f(-\dfrac{\sqrt{3k}}{3})>0$．根据 $f(x)$ 的单调性，当且仅当 $f(\dfrac{\sqrt{3k}}{3})<0$，即 $k^2-\dfrac{2k\sqrt{3k}}{9}<0$ 时，$f(x)$ 有三个零点，解得 $k<\dfrac{4}{27}$．因此 k 的取值范围为 $(0,\dfrac{4}{27})$．

21．解：

（1）由题设可得 $\dfrac{\sqrt{25-m^2}}{5}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，得 $m^2=\dfrac{25}{16}$，所以 C 的方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1.$$

（2）设 $P(x_P,y_P)$，$Q(6,y_Q)$，根据对称性可设 $y_Q>0$，由题意知 $y_P>0$．

由已知可得 $B(5,0)$，直线 BP 的方程为 $y=-\dfrac{1}{y_Q}(x-5)$，所以 $|BP|=y_P\sqrt{1+y_Q^2}$，$|BQ|=\sqrt{1+y_Q^2}$．

因为 $|BP|=|BQ|$，所以 $y_P=1$，将 $y_P=1$ 代入 C 的方程，解得 $x_P=3$ 或 -3．

由直线 BP 的方程得 $y_Q=2$ 或 8．

所以点 P，Q 的坐标分别为 $P_1(3,1)$，$Q_1(6,2)$；$P_2(-3,1)$，$Q_2(6,8)$．

$|P_1Q_1|=\sqrt{10}$，直线 P_1Q_1 的方程为 $y=\dfrac{1}{3}x$，点 $A(-5,0)$ 到直线 P_1Q_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，故 $\triangle AP_1Q_1$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{10}=\dfrac{5}{2}$．

$|P_2Q_2|=\sqrt{130}$，直线 P_2Q_2 的方程为 $y=\dfrac{7}{9}x+\dfrac{10}{3}$，点 A 到直线 P_2Q_2 的距离为 $\dfrac{\sqrt{130}}{26}$，故 $\triangle AP_2Q_2$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{130}}{26}\times\sqrt{130}=\dfrac{5}{2}$．

综上，$\triangle APQ$ 的面积为 $\dfrac{5}{2}$．

22．解：

（1）因为 $t\neq1$，由 $2-t-t^2=0$ 得 $t=-2$，所以 C 与 y 轴的交点为 $(0,12)$；由 $2-3t+t^2=0$ 得 $t=2$，所以 C 与 x 轴的交点为 $(-4,0)$．

故 $|AB|=4\sqrt{10}$．

（2）由（1）可知，直线 AB 的直角坐标方程为 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{12}=1$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得直线 AB 的极坐标方程

$$3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0.$$

23．解：

（1）由题设可知，a，b，c 均不为零，所以

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]\\&=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\\&<0.\end{aligned}$$

（2）不妨设 $\max\{a,b,c\}=a$，因为 $abc=1$，$a=-(b+c)$，所以 $a>0$，$b<0$，$c<0$．由 $bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}$，可得 $abc\leqslant\frac{a^3}{4}$，故 $a\geqslant\sqrt[3]{4}$，所以 $\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$．