海淀区高三年级第一学期期中练习

数　　学（理科）

2016.11

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|(x-1)(x-3)<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$　　C. $\{x|1<x<3\}$　　D. $\{x|x>2或x<1\}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-4)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$

A. 垂直　　B. 不垂直也不平行　　C. 平行且同向　　D. 平行且反向

3. 函数 $y=2^x+\dfrac{2}{2^x}$ 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

4. 已知命题 $p:\exists c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 有解，则 $\neg p$ 为

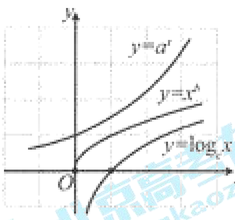
A. $\forall c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 无解

B. $\forall c\leqslant 0$，方程 $x^2-x+c=0$ 有解

C. $\exists c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 无解

D. $\exists c\leqslant 0$，方程 $x^2-x+c=0$ 有解

5. 已知函数 $y=a^x, y=x^b, y=\log_c x$ 的图象如图所示，则



A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

6. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

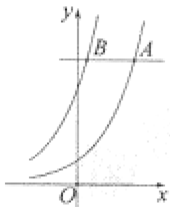
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=\cos^4 x+\sin^2 x$，下列结论中错误的是

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. 函数 $f(x)$ 最小值为 $\dfrac{3}{4}$

C. $\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期　　D. 函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内是减函数

8. 如图所示，A是函数$f(x)=2^x$的图象上的动点，过点A作直线平行于x轴，交函数$g(x)=2^{x+2}$的图象于点B，若函数$f(x)=2^x$的图象上存在点C使得△ABC为等边三角形，则称A为函数$f(x)=2^x$上的好位置点．函数$f(x)=2^x$上的**好位置点**的个数为



A．0　　B．1

C．2　　D．大于2

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

9. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n+1$，则$a_2+a_3=$_____.

10. 若角θ的终边过点$P(3,-4)$，则$\sin(\theta-\pi)=$____.

11. 已知正方形$ABCD$边长为1，E是线段CD的中点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$____.

12. 去年某地的月平均气温y(℃)与月份x(月)近似地满足函数$y=a+b\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6})$（$a,b$为常数）．若6月份的月平均气温约为22℃，12月份的月平均气温约为4℃，则该地8月份的月平均气温约为_____℃.

13. 设函数$f(x)=\begin{cases}2^x-a, x\leq 1,\\ \log_a x, x>1,\end{cases}(a>0，且a\neq 1)$．

①若$a=\frac{3}{2}$，则函数$f(x)$的值域为______；

②若$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，则a的取值范围是_____.

14. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$．$\forall a,b\in\mathbf{R}$，若此函数同时满足：

（i）当$a+b=0$时有$f(a)+f(b)=0$；

（ii）当$a+b>0$时有$f(a)+f(b)>0$，

则称函数$f(x)$为Ω函数.

在下列函数中：

①$y=x+\sin x$；②$y=3^x-(\frac{1}{3})^x$；③$y=\begin{cases}0, & x=0,\\ -\frac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$

是Ω函数的为_____.（填出所有符合要求的函数序号）

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}-b_n=a_n$，且 $b_2=-18, b_3=-24$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求 b_n 取得最小值时 n 的值.

16.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})-\cos 2x$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间.

17.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x^3-9x$，函数 $g(x)=3x^2+a$.

（Ⅰ）已知直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线，且 l 与曲线 $y=g(x)$ 相切，求 a 的值；

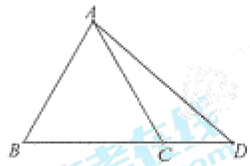
（Ⅱ）若方程 $f(x)=g(x)$ 有三个不同实数解，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分 13 分）

如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在边 BC 的延长线上，且 $BC=2CD$，$AD=\sqrt{7}$.

（Ⅰ）求 CD 的长；

（Ⅱ）求 $\sin\angle BAD$ 的值.



19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=e^x(x^2+ax+a)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：当 $a\geqslant 4$ 时，函数 $f(x)$ 存在最小值.

20.（本小题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷数列，满足 $\lg a_{n+1}=|\lg a_n-\lg a_{n-1}|$（$n=2,3,4,\cdots$）.

（Ⅰ）若 $a_1=2, a_2=3$，求 a_3, a_4, a_5；

（Ⅱ）求证：“数列 $\{a_n\}$ 中存在 $a_k(k\in\mathbf{N}^*)$ 使得 $\lg a_k=0$”是“数列 $\{a_n\}$ 中有无数多项是 1”的充要条件；

（Ⅲ）求证：在数列 $\{a_n\}$ 中 $\exists a_k(k\in\mathbf{N}^*)$，使得 $1\leqslant a_k<2$.

高三数学（理科）试题　第 4 页（共 4 页）

海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案

数学（理科） 2016.11

阅卷须知:

1.评分参考中所注分数，表示考生正确做了该步应得的该步骤分数。

2.其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题（本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	A	C	C	D	B

二、填空题（本大题共 6 小题, 每小题 5 分，有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分，共 30 分）

9. 24	10. $\frac{4}{5}$	11. $\frac{1}{2}$
12. 31	13. $(-\frac{3}{2},+\infty)$; $a\geqslant 2$	14. ①②

（第 13 题，第一空 3 分，第二空 2 分．第 14 题，选错 0 分；漏选 3 分；全选对 5 分）

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分)

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ） 法一：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$b_{n+1}-b_n=a_n$，

所以$a_2=b_3-b_2$，

$=-24-(-18)=-6$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_2+(n-2)d$

$=2n-10$.

法二：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$b_{n+1}-b_n=a_n$，

所以$a_2=b_3-b_2=-24-(-18)=-6$，

所以$a_1=a_2-d=-8$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-10$.

（Ⅱ）法一：因为$b_{n+1}-b_n=a_n$，

所以$b_2-b_1=a_1$， $b_3-b_2=a_2$， $b_4-b_3=a_3$， $\cdots$， $b_n-b_{n-1}=a_{n-1}$，

将上面$n-1$个等式的等号两边分别相加，

得$b_n-b_1=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$ $(n>1)$

所以$b_n=b_1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$

$=b_2+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$

$$=b_2+\frac{(a_2+a_{n-1})(n-2)}{2}$$
$$=n^2-11n$$

又因为 $b_1=b_2-a_1=-10$ 符合上式，

所以 $b_n=n^2-11n=\left(n-\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n=5$ 或 $n=6$ 时，b_n 取得最小值 $b_5=b_6=-30$.

法二：因为 $b_{n+1}-b_n=a_n$，

所以 $b_2-b_1=a_1$，$b_3-b_2=a_2$，$b_4-b_3=a_3$，$\cdots$，

所以 $b_n=b_{n-1}+a_{n-1}$
$$=b_{n-2}+a_{n-2}+a_{n-1}$$
$$=b_{n-3}+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}$$
$$=\cdots$$
$$=b_1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}.$$

所以 $b_n=b_1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}\ (n>1)$
$$=b_2+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$$
$$=b_2+\frac{(a_2+a_{n-1})(n-2)}{2}$$
$$=n^2-11n,$$

又因为 $b_1=b_2-a_1=-10$ 符合上式，

所以 $b_n=n^2-11n=\left(n-\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n=5$ 或 $n=6$ 时，b_n 取得最小值 $b_5=b_6=-30$.

法三：因为 $b_{n+1}-b_n=2n-10$，

所以，当 $n<5$ 时，有 $b_{n+1}-b_n<0$，即 $b_1>b_2>b_3>b_4>b_5$；

当 $n=5$ 时，有 $b_{n+1}-b_n=0$，即 $b_6=b_5$；

当 $n>5$ 时，有 $b_{n+1}-b_n>0$，即 $b_6<b_7<b_8<\cdots$.

所以 $n=5$ 或 $n=6$ 时，b_n 取得最小值 $b_5=b_6=-30$.

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})-\cos 2x$，

所以 $f(\frac{\pi}{3})=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\frac{2\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$=1$.

（Ⅱ）因为 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})-\cos 2x$

$=\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}-\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

函数 $y=\sin x$ 的单调增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

17.（本小题满分 13 分）

解：（I）因为 $f(x)=x^3-9x$，

所以 $f(0)=0$，$f'(x)=3x^2-9$，

所以 $f'(0)=-9$，

所以直线 l 方程为 $y=-9x$.

设直线 l 与曲线 $y=g(x)$ 相切于点 $(x_0,-9x_0)$，

又 $g'(x)=6x$，所以 $g'(x_0)=6x_0=-9$，解得 $x_0=-\frac{3}{2}$，

又 $g(x_0)=-9x_0$，即 $g(-\frac{3}{2})=\frac{27}{4}+a=\frac{27}{2}$，解得 $a=\frac{27}{4}$

（II）记函数 $F(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x^2-9x-a$，$x\in\mathbf{R}$.

$F'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$,

由 $F'(x)=0$ 解得 $x=3$，或 $x=-1$.

$F'(x)$，$F(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$

$F(x)$	+	0	−	0	+
$F'(x)$	↗	极大值 $5-a$	↘	极小值 $-27-a$	↗

又因为 $F\left(a^2+5\right)=\left(a^2+5\right)\left(a^4+7a^2+1\right)-a\geq a^2+5-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>$ ，且

$a^2+5\in(3,+\infty)$；

$F\left(-a^2-2\right)=\left(-a^2-2\right)\left(a^4+7a^2+1\right)-a\leq-a^2-2-a=-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}<0$，且

$-a^2-2\in\left(-\infty,-1\right)$.

（或者：因为当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$F(x)\to-\infty$）

所以方程 $f(x)=g(x)$ 有三个不同实数解的条件为 $\begin{cases}5-a>0\\-27-a<0\end{cases}$，

解得 $-27<a<5$.

综上，实数 a 的取值范围为 $-27<a<5$.

18. （本小题满分 13 分）

解：（I）法一： 因为 ΔABC 是等边三角形，且 $BC=2CD$，

所以 $AC=2CD$， $\angle ACD=120^\circ$.

在 ΔACD 中，由余弦定理得

$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD$，

所以 $7=4CD^2+CD^2-4CD\cdot CD\cos120^\circ$，

解得 $CD=1$.

法二：因为 ΔABC 是等边三角形，且 $BC=2CD$，

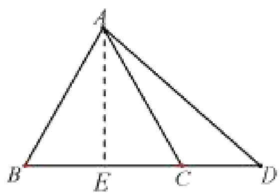
所以 $AB=2CD$， $BD=3CD$， $\angle ABC=60^\circ$.

在 ΔABD 中，由余弦定理得

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\angle ABC$，

所以 $7=4CD^2+9CD^2-12CD\cdot CD\cos60^\circ$，

解得 $CD=1$.



法三： 取 BC 中点 E，连接 AE.

在等边三角形 ΔABC 中，

$AE\perp BC$， $AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BC$，

设 $CD=x$， 则 $BC=2x$，

所以 $AE=\sqrt{3}x$， $DE=2x$，

在直角三角形 ΔAED 中，

$AD^2=AE^2+DE^2=7x^2=7$，

解得 $x=1$， 即 $CD=1$.

（II） 在 ΔABC 中， $BD=3CD=3$，

由正弦定理，有 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle B}$，

所以 $\sin\angle BAD=\dfrac{BD\sin\angle B}{AD}=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.

19. （本小题满分 14 分）

解：（I）函数 $f(x)=e^x(x^2+ax+a)$ 得

$$f'(x)=e^x(x^2+ax+a)+e^x(2x+a)$$

$$=e^x\left[x^2+(a+2)x+2a\right]$$

$$=e^x(x+2)(x+a)$$

由 $f'(x)=0$ 解得 $x=-2$， 或 $x=-a$.

① 当 $-a=-2$，即 $a=2$ 时， $f'(x)=e^x(x+2)^2\geq 0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$；

②当 $-a>-2$，即 $a<2$ 时，

$f'(x)$， $f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-a)$	$-a$	$(-a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

③当 $-a<-2$，即 $a>2$ 时，

$f'(x)$，$f(x)$的情况如下：

x	$(-\infty,-a)$	$-a$	$(-a,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

综上，当$a=2$时，函数$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,+\infty)$；当$a<2$时，函数$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-2)$，$(-a,+\infty)$，单调减区间为$(-2,-a)$；当$a>2$时，函数$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-a)$，$(-2,+\infty)$，单调减区间为$(-a,-2)$.

（II）法一：由（I）可知，当$a\geqslant 4$时，函数$f(x)$在$x\in[-a,+\infty)$上$f(x)\geqslant f(-2)$，

且$f(-2)=e^{-2}(4-a)\leqslant 0$.

因为$a\geqslant 4$，

所以，当$x\in(-\infty,-a)$时，$x(x+a)\geqslant 0$，$e^x>0$，

所以，当$x\in(-\infty,-a)$时，$f(x)=e^x(x^2+ax+a)=e^x[x(x+a)+a]>0$，

所以，当$a\geqslant 4$时，函数$f(x)$存在最小值$f(-2)$.

法二：由（I）可知，当$a\geqslant 4$时，函数$f(x)$在$x\in[-a,+\infty)$上$f(x)\geqslant f(-2)$，

且$f(-2)=e^{-2}(4-a)\leqslant 0$.

当$x\to-\infty$时，$x^2+ax+a\to+\infty$，所以$f(x)>0$，

由（I）可知，函数$f(x)$在$(-\infty,-a)$上是增函数，

所以当$x\in(-\infty,-a)$时，$f(x)>0$.

所以，当$a\geqslant 4$时，函数$f(x)$存在最小值$f(-2)$.

20.（本小题满分 14 分）

解：（I）因为$a_1=2,a_2=3$，$\lg a_{n+1}=|\lg a_n-\lg a_{n-1}|$（$n=2,3,4,\cdots$）.

所以$\lg a_3=|\lg 3-\lg 2|=\lg\frac{3}{2}$，即$a_3=\frac{3}{2}$；

所以$\lg a_4=|\lg\frac{3}{2}-\lg 3|=\lg 2$，即$a_4=2$；

所以$\lg a_5=|\lg 2-\lg\frac{3}{2}|=\lg\frac{4}{3}$，即$a_5=\frac{4}{3}$.

（II）必要性：已知数列$\{a_n\}$中有无数多项是1，则数列$\{a_n\}$中存在$a_k(k\in\mathbf{N}^*)$使得$\lg a_k=0$.

证明：因为数列$\{a_n\}$中有无数多项是1，

所以数列$\{a_n\}$中存在$a_k(k\in\mathbf{N}^*)$使得$a_k=1$，

所以数列$\{a_n\}$中存在$a_k(k\in\mathbf{N}^*)$使得$\lg a_k=0$.

充分性：已知数列$\{a_n\}$中存在$a_k(k\in\mathbf{N}^*)$使得$\lg a_k=0$，则数列$\{a_n\}$中有无数多项是1.

（注：此处1分是给在"学生能够将充要性的证明分成两个条件与结论清楚的两个命题来证明"）

法一：证明：假设数列$\{a_n\}$中没有无数多项是1，不妨设$a_m=1(m\in\mathbf{N}^*)$是数列$\{a_n\}$中为1的最后一项，则$a_{m+1}\neq 1$，

若$a_{m+1}>1$，则由$\lg a_{n+1}=|\lg a_n-\lg a_{n-1}|$（$n=2,3,4,\cdots$）可得$\lg a_{m+2}=\lg a_{m+1}$，

所以$\lg a_{m+3}=|\lg a_{m+2}-\lg a_{m+1}|=0$，所以$a_{m+3}=1$，这与假设矛盾；

若$0<a_{m+1}<1$，则由$\lg a_{n+1}=|\lg a_n-\lg a_{n-1}|$（$n=2,3,4,\cdots$）可得$\lg a_{m+2}=-\lg a_{m+1}$，

所以$\lg a_{m+3}=|\lg a_{m+2}-\lg a_{m+1}|=-2\lg a_{m+1}$，

所以$\lg a_{m+4}=|\lg a_{m+3}-\lg a_{m+2}|=|-2\lg a_{m+1}+\lg a_{m+1}|=-\lg a_{m+1}$，

所以$\lg a_{m+5}=|\lg a_{m+4}-\lg a_{m+3}|=|-\lg a_{m+1}+2\lg a_{m+1}|=-\lg a_{m+1}$，

所以$\lg a_{m+6}=|\lg a_{m+5}-\lg a_{m+4}|=0$，

所以$a_{m+6}=1$，这与假设矛盾.

综上，可知假设不成立，所以原命题正确.

由①②可知，"数列$\{a_n\}$中存在$a_k(k\in\mathbf{N}^*)$使得$\lg a_k=0$"是"数列$\{a_n\}$中有无数多项是1"的充要条件.

法二：证明：设$b_n=\lg a_n$，则$b_{n+1}=|b_n-b_{n-1}|$（$n=2,3,4,\cdots$），待证命题即：

已知数列$\{b_n\}$中存在$b_k(k\in\mathbf{N}^*)$使得$b_k=0$，则数列$\{b_n\}$中有无数多项是0.

①若$b_k=0(k=2,3,4,\cdots)$，则$b_{k+2}=b_{k+1}$，所以$b_{k+3}=0$，

循此可推证 $b_{k+3m}=0$（$m\in\mathbf{N}$）；

②若 $b_1=0$，当 $b_2\geqslant 0$ 时，$b_3=b_2$，所以 $b_4=0$，

由①证明可知 $b_{k+3m}=0$（$m\in\mathbf{N}$）；

当 $b_2<0$ 时，$b_3=-b_2$，所以 $b_4=|b_3-b_2|=2$，所以

$b_5=|b_4-b_3|=-b$，所以 $b_6=|b_5-b_4|=-b_2$，所以 $b_7=|b_6-b_5|=0$，

由①证明可知 $b_{k+3m}=0$（$m\in\mathbf{N}$）.

所以数列 $\{b_n\}$ 中有无数多项是 0.

（III）法一：

证明：假设在数列 $\{a_n\}$ 中,不存在 $a_k(k\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $1\leqslant a_k<2$，

则 $0<a_k<1$ 或 $a_k\geqslant 2$（$k=1,2,3,\cdots$）.

由 $\lg a_{n+1}=|\lg a_n-\lg a_{n-1}|$（$n=2,3,4,\cdots$）可得

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}, a_n\geqslant a_{n-1},\\ \dfrac{a_{n-1}}{a_n}, a_n<a_{n-1},\end{cases}$$（$n=2,3,4,\cdots$）*，且 $a_n>0$（$n=1,2,3,\cdots$），

所以当 $n>2$ 时，$a_n\geqslant 1$.

所以 $a_n\geqslant 2$（$n=3,4,5,\cdots$）.

若 $a_4=a_3\geqslant 2$，则 $a_5=1$ 与 $a_5\geqslant 2$ 矛盾；

若 $a_4\neq a_3\geqslant 2$，

设 $b_m=\max\{a_{2m+1},a_{2m+2}\}$（$m=1,2,3,\cdots$），则 $b_m\geqslant 2$.

由（*）可得，$a_{2m+3}\leqslant\dfrac{\max\{a_{2m+1},a_{2m+2}\}}{2}=\dfrac{1}{2}b_m$，$a_{2m+4}\leqslant\dfrac{1}{2}\max\{a_{2m+2},a_{2m+3}\}$

所以 $\max\{a_{2m+3},a_{2m+4}\}\leqslant\dfrac{1}{2}b_m$，即 $b_{m+1}\leqslant\dfrac{1}{2}b_m$（$m=1,2,3,\cdots$），

所以 $b_m\leqslant\dfrac{b_1}{2^{m-1}}$，

对于 b_1，显然存在 l 使得 $2^{l-1}\leqslant b_1<2^l$，

所以 $b_{l+1} \leqslant \frac{b_1}{2^l} < 1$，这与 $b_m \geqslant 2$ 矛盾，

所以假设不成立，原命题正确.

法二：

证明：设 $b_n = \lg a_n$，则 $b_{n+1} = |b_n - b_{n-1}|$（$n = 2,3,4,\cdots$），

证明"在数列 $\{a_n\}$ 中,存在 $a_k(k \in \mathbf{N}^*)$ 满足 $1 \leqslant a_k < 2$"，即证明"在数列 $\{b_n\}$ 中,存在 $b_k(k \in \mathbf{N}^*)$ 满足 $0 \leqslant b_k < \lg 2$".

假设在数列 $\{b_n\}$ 中，不存在 $b_k(k \in \mathbf{N}^*)$ 满足 $0 \leqslant b_k < \lg 2$，

则 $b_k < 0$ 或 $b_k \geqslant \lg 2$.（$k = 1,2,3,\cdots$）

由 $b_{n+1} = |b_n - b_{n-1}|$，（$n = 2,3,4,\cdots$）*

可得 $b_n \geqslant 0$.（$n = 3,4,5,\cdots$）

所以 $b_n \geqslant \lg 2$，（$n = 3,4,5,\cdots$）

若 $b_4 = b_3 \geqslant \lg 2$，则 $b_5 = 0$ 与 $b_5 \geqslant \lg 2$ 矛盾；

若 $b_4 \neq b_3 \geqslant \lg 2$，

设 $c_m = \max\{b_{2m+1}, b_{2m+2}\}$（$m = 1,2,3,\cdots$），则 $c_m \geqslant \lg 2$.（$m = 1,2,3,\cdots$）

由（*）可得，$b_{2m+3} \leqslant \max\{b_{2m+1}, b_{2m+2}\} - \lg 2$，$b_{2m+4} \leqslant \max\{b_{2m+2}, b_{2m+3}\} - \lg 2$

所以 $\max\{b_{2m+3}, b_{2m+4}\} \leqslant \max\{b_{2m+1}, b_{2m+2}\} - \lg 2$，

即 $c_{m+1} \leqslant c_m - \lg 2$，（$m = 1,2,3,\cdots$）

所以 $c_m \leqslant c_1 - (m-1)\lg 2$，

对于 c_1，显然存在 l 使得 $l\lg 2 \leqslant c_1 < (l+1)\lg 2$，

所以 $c_{l+1} \leqslant c_1 - l\lg 2 < \lg 2$，这与 $c_{l+1} \geqslant \lg 2$ 矛盾，

所以假设不成立，原命题正确.

扫描二维码，关注北京高考官方微信！

查看更多北京高考相关资讯！